

## Modélisation et étude numérique de la pollution de la nappe phréatique

Mohamed HAMI<sup>1</sup>✧, Kamal GUERAOU<sup>1</sup>, Abdellah HAMMOUMI<sup>1</sup>,  
Mohamed EL HATRI<sup>2</sup>, Mohamed KERROUM<sup>1</sup> & Gamal ZEGGWAGH<sup>1</sup>

(Reçu le 27/04/1996 ; Accepté le 27/05/1996)

### نموذج لدراسة تحليلية لمشكل تلوث حقل ماء جوفي

نحلل من خلال هذه المساهمة طريقة حسابية لأجل دراسة كيفية نقل الأجسام الصلبة عبر الطبقات الأرضية و التي تسبب في تدني جودة المياه الجوفية. و في هذا الإطار و لأجل التمكن من مراقبة هذه الظاهرة استعملنا طريقة الفرق النهائي لحل المعادلات الرياضية التي تخضع لها هذه الظاهرة.

الكلمات المفتاحية : مسامية - منطقة غير مشبعة - الإشباع بالماء.

### Modélisation et étude numérique de la pollution de la nappe phréatique

Une méthode numérique pour la simulation dynamique du transfert de masse dans le sol, causant la dégradation de la qualité des eaux souterraines est développée. Pour se faire, la méthode des différences finies est utilisée pour résoudre le problème et prévoir le profil des pressions, des vitesses de filtration, des saturations en eau et de la concentration du soluté.

**Mots clés :** Porosité - Zone non-saturé - Saturation en eau

### Modelisation and numerical study of groundwater pollution

A numerical method for the dynamic simulation of mass transfert in the ground wich participate in groudwater pollution is developed. To that purpose, the finite difference method is used to solve the solution of a system and in order to know profiles of pressure, filtrate velocity, water saturation and solute concentration.

**Key words:** Porosity- Unsaturated zone - Water saturation

<sup>1</sup> Groupe de Mécanique des Fluides et des Structures, Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014, Rabat, Maroc

<sup>2</sup> École Supérieure de Technologie de Fès

✧ Auteur correspondant

## INTRODUCTION

La pollution de l'environnement est l'un des grands fléaux du XX<sup>ème</sup> siècle qui résulte du développement industriel. L'un des secteurs les plus sensibles à ce fléau est l'eau souterraine.

La pollution de celle-ci est le risque permanent de limitation de la ressource en eau dans un proche avenir. Le phénomène de pollution des eaux souterraines est régi par des processus liés entre eux:

- écoulement de l'eau dans un milieu poreux ;
- transport de soluté.

La complexité de ces processus dépend de facteurs hydrogéologiques du milieu, de la non-uniformité de l'écoulement, de l'interaction physico-chimique entre le soluté et la matrice poreuse et du mécanisme de propagation du soluté. Un modèle mathématique régissant un pareil phénomène est basé sur plusieurs équations décrivant chacune un processus donné.

Dans le domaine de la pollution de l'eau souterraine, les lois fondamentales sont traduites par la loi de Darcy et l'équation de conservation de masse.

Nombreux sont les modèles qui ont été proposés pour simuler l'écoulement de fluide chargés dans un milieu poreux. Freeze (1971) propose une modélisation tridimensionnelle de l'écoulement dans les systèmes saturé et non saturé. Bear (1972 & 1979) propose une discussion détaillée des écoulements et du transport du soluté dans un aquifère.

D'autres auteurs (Segol, 1977; Frind & Verge, 1978) et plus récemment (Mose, 1990; Gentile *et al.*, 1990; Huyakorn, 1993; Jacob, 1993) ont proposé des modèles de simulation et des méthodes de résolution, basées sur la méthode des différences finies et sur la méthode des éléments finis, du problème de l'écoulement et du transport du soluté dans un milieu poreux saturé ou non saturé.

## MÉTHODES

### 1. Modèle théorique

#### • Équation d'écoulement

Le problème de pollution de l'eau souterraine dans le cas général est gouverné par des équations de

type "diffusion" regroupant tous les phénomènes physico-chimiques accompagnant ce problème. L'écoulement de l'eau pur de densité  $\rho$ , ayant une vitesse de filtration  $q$ , dans un milieu présentant une porosité  $\varepsilon$  est régi par l'équation [1] (Bear, 1972- 1979).

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon S_e)}{\partial t} + \text{div}(\rho q) = S_{\text{ext}} \quad [1]$$

$S_{\text{ext}}$  : source extérieure de l'eau

$S_e$  : saturation en l'eau

#### • Équation du transport du soluté

L'eau considérée dans cette étude n'est pas pure, mais se trouve chargée par des agents de pollution de type chimique, organique ou inorganique. L'équation qui régit le transport d'un agent de pollution, dont la dose de présence dans le fluide est mesurée par la concentration  $C$ , s'écrit (Crolet, 1992) :

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon S_e C + \rho_s (1-\varepsilon)C)}{\partial t} + \text{div}(\rho\varepsilon S_e C q - \rho\varepsilon S_e D \nabla C) = F_C \quad [2]$$

$C_s$  : concentration du soluté dans le solide

$\rho_s$  : densité du solide

$F_C$  : taux du soluté dans la matrice poreuse

$D$  : tenseur de diffusion et de dispersion cinématique

#### • Loi de Darcy

Cette loi exprime la vitesse de filtration d'un fluide de densité  $\rho$  et de viscosité  $\mu$ , dans un milieu de perméabilité intrinsèque  $K$  (Bear, 1972 - 1979) et s'exprime par:

$$q = - \frac{K(S_e)}{\varepsilon \mu S_e} (\nabla P - \rho g) \quad [3]$$

$P$  : pression, définie par  $P = P_a - P_e$

$P_a$  : pression atmosphérique

$P_e$  : pression dans l'eau

$g$  : accélération gravitationnelle

#### • Interaction soluté - solide

L'interaction du soluté en suspension avec le solide est exprimée par la relation suivante (Crolet, 1992) et selon la nature de  $\beta(C)$  différents modèles existent:

$$\frac{\partial C_s}{\partial t} = \beta(C) \frac{\partial C}{\partial t} \quad [4]$$

• **Saturation en eau**

Cette grandeur est définie comme étant le rapport du volume d'eau au volume des vides dans la matrice poreuse considérée ( Crolet, 1992 ; Bear, 1972-1979). À ce niveau, on considère l'expression empirique proposée par Van Genuchten (1980) :

$$S_e = S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (aP)^n} \right]^{\frac{n-1}{n}} \quad [5]$$

$S_{e0}$  : saturation en eau résiduelle  
 a et n : coefficients empiriques

**2. Cadre d'étude du présent travail**

On exprime le problème posé préalablement dans le cas unidimensionnel, en considérant un échantillon du milieu poreux non saturé homogène; le tenseur de perméabilité intrinsèque K est réduit à un coefficient scalaire constant ; les densités  $\rho$  et  $\rho_s$  respectives du fluide et du solide sont constantes. Le problème est alors présenté sous forme d'équations [6, 7 et 8].

$$q = -K \frac{\partial P}{\partial z} + K \rho g \quad [6]$$

$$\rho \varepsilon a^2 P \left[ \frac{1}{1 + (aP)^2} \right]^{\frac{3}{2}} \frac{\partial P}{\partial t} - \rho K \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = S_{ext} \quad [7]$$

$$\left\{ \rho \varepsilon S_{e0} + \rho \varepsilon (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (aP)^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \rho_s (1 - \varepsilon) \beta \right\} \frac{\partial C}{\partial t} + (S_{ext} + \rho K \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}) C \quad [8]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho \varepsilon \left[ S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (aP)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right] (K \rho g - K \frac{\partial P}{\partial z}) C \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho \varepsilon \left[ S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (aP)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right] d \frac{\partial C}{\partial z} \right\} = F_C(t)$$

Les conditions aux limites associées à ce système d'équations sont du type Dirichlet; elles portent sur la pression  $P=P^*$ , et la concentration  $C=C^*$

**2.1. Schéma de résolution**

Le système étudié est un aquifère à deux dimensions (z,t), muni d'un maillage à pas constants  $\Delta z$  et  $\Delta t$  définis par :

$$\Delta z = \frac{L}{J_{max} - 1} \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{t}{K_{1max} - 1}$$

$$z = (j-1)\Delta z \quad \text{avec} \quad 1 < j < j_{max}$$

$$z = (K-1)\Delta t \quad \text{avec} \quad 1 < K < K_{max}$$

La discrétisation des équations précédentes est faite à l'aide de la méthode des différence finies de type implicite (Nougier, 1989). Ainsi, on obtient les équations [9], [10], [11] et [12].

$$(S_{e0} - 1) \rho \varepsilon a^2 P_p(j) \frac{P(j) - P_p(j)}{\Delta t} \left[ \frac{1}{1 + (a P_p(j))^2} \right]^{\frac{3}{2}} \quad [9]$$

$$- \rho K \left( \frac{P(j+1) - 2P(j) + P(j-1))}{(\Delta z)^2} \right) = S_{ext}$$

$$q(j) = -K \frac{P(j+1) - P(j-1)}{2 \Delta z} + \rho g K \quad \text{pour} \quad 1 < j < j_{max} \quad [10]$$

$$S_e(j) = S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (a P(j))^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad [11]$$

$$(A_1(j) + \Delta t B_1(j) - 2E_1(j) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}) C(j) + (D_1(j) \frac{\Delta t}{2 \Delta z} + E_1(j) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2}) C(j+1) + (E_1(j) \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} - D_1(j) \frac{\Delta t}{2 \Delta z}) C(j-1) = A_1(j) C_p(j) + \Delta t F_C \quad [12]$$

$$- D_1(j) \frac{\Delta t}{2 \Delta z} C(j-1) = A_1(j) C_p(j) + \Delta t F_C$$

$P_p(j)$  et  $C_p(j)$  [éq. précédentes) sont respectivement la pression et la concentration du soluté au point d'abscisse j à l'instant (t- $\Delta t$ ).

Équations [13], [14], [15] et [16] : voir page suivante.

Pour la résolution des équations [9, 10, 11 et 12], on opte pour la méthode de double balayage de type implicite (Nougier, 1989).

$$A_1(j) = \rho \varepsilon S_{\text{ext}} + \rho \varepsilon (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (a P_p)^2} \right]^{\frac{1}{2}} + \rho_s (1 - \varepsilon) \beta \quad [13]$$

$$B_1(j) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \varepsilon \left\{ S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (a P_p)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} (K \rho g - K \frac{\partial P}{\partial z}) \right) + S_{\text{ext}} + \rho K \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \quad [14]$$

$$D_1(j) = \left( \rho \varepsilon \left\{ S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (a P_p)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} (K \rho g - K \frac{\partial P}{\partial z}) \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho \varepsilon \left\{ S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (a P_p)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} d \right) \quad [15]$$

$$E_1(j) = -\rho \varepsilon d \left\{ S_{e0} + (1 - S_{e0}) \left[ \frac{1}{1 + (a P_p)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad [16]$$

## 2.2. Profil initial, test de convergence et données numérique du programme

Le profil initial peut être absolument quelconque pourvu qu'il satisfasse aux conditions aux limites. Toutefois, pour réduire le temps de calcul, on choisit un profil initial qui soit assez proche du profil réel.

Le critère de la convergence de la solution porte sur la pression. On impose, pour cela, à la pression de vérifier:

$$\text{Sup} \left[ \frac{P_m(z, t) - P_{m+1}(z, t)}{P_m(z, t)} \right] < \varepsilon$$

où

$\varepsilon$  est une quantité petite fixée à l'avance.

$m$  est le nombre de cycle de calcul.

Les données du programme prises de la littérature (Crolet, 1994) sont celles qui caractérisent le comportement du fluide (eau) et de la matrice poreuse.

- la densité du fluide considéré,  $\rho$ , est égale à 1000 (kg/m<sup>3</sup>)
- la profondeur de l'échantillon,  $L$ , est égale à 100 m
- l'accélération de la pesanteur,  $g$ , est égale à 10 (m/s.s)
- la conductivité hydraulique,  $K$ , vaut 3.10<sup>-10</sup>(m/s.s)
- la saturation en eau résiduelle,  $S_{e0}$ , est égale à 0,2 m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>
- la source extérieure de l'eau,  $S_{\text{ext}}$ , vaut 10<sup>-9</sup>(kg/m<sup>3</sup>.s)
- la pression à  $z=0$ ,  $P_0$ , est nulle
- la pression à  $z=L$ ,  $P_L$ , vaut 10<sup>5</sup> Pa
- la porosité totale,  $\varepsilon$ , est égale à 0,86 m<sup>3</sup>/m<sup>3</sup>

## RÉSULTATS

On présente les résultats obtenus lors de l'étude du problème de transfert d'un soluté dans le cas unidimensionnel à travers un milieu homogène non saturé ayant une porosité constante ( $\varepsilon$ ), une conductivité hydraulique constante ( $K$ ).

On suppose également que le coefficient de dispersion cinématique ( $d$ ) est constant.

La figure 1 montre qu'il y a une relation linéaire entre la pression capillaire et la profondeur. Le niveau  $z=0$  correspondant à la surface supérieure de la nappe est pris à la pression capillaire nulle, c'est-à-dire on suppose que la surface de la nappe est sous pression atmosphérique ; au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la nappe, la pression capillaire augmente pour atteindre la pression atmosphérique à la surface du sol ; ceci est dû à la diminution des tensions interfaciales qui existent entre la phase liquide et la phase solide du système.

La figure 2 montre le profil des vitesses de filtration. On constate que celui-ci est constant, ce qui est dû au fait qu'on a considéré une matrice homogène de porosité uniforme. D'autre part, cette grandeur est déterminée à partir de la loi de Darcy qui exprime la vitesse de filtration comme étant une grandeur proportionnelle au gradient de pression.

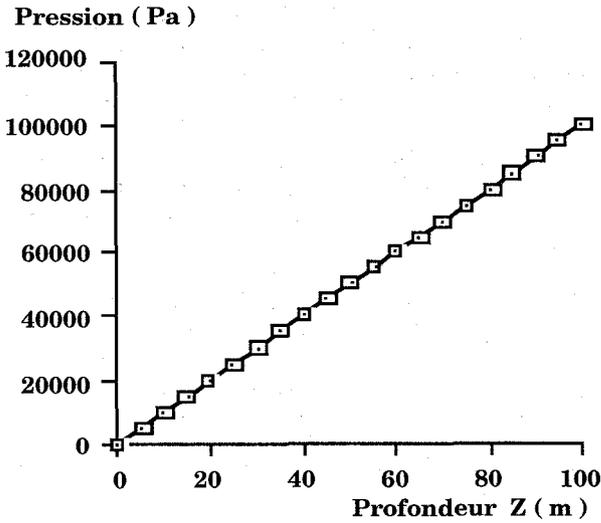


Figure 1. Évolution de la pression capillaire en profondeur

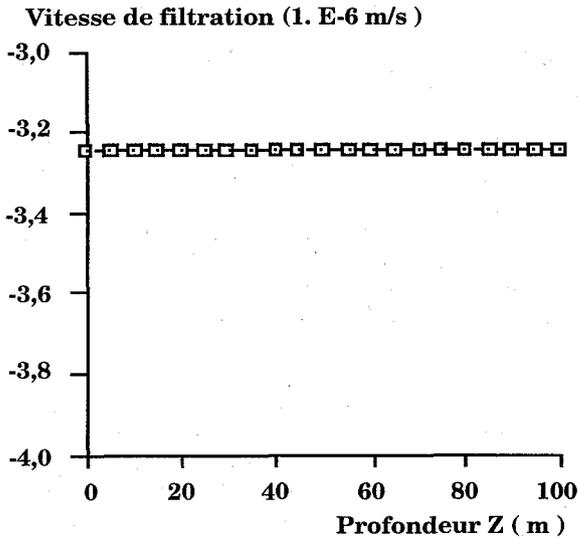


Figure 2. Profil des vitesses de filtration

La figure 3 laisse apparaître une diminution de la saturation en eau à partir de sa valeur maximale  $S_e=1$  au point  $z=0$ , jusqu'à la valeur de la saturation en eau résiduelle. Ceci s'explique par le fait que l'eau, véhicule du transport du soluté, subit une expansion dans le milieu sous l'effet de la pression. Ce résultat est prévu par la relation particulière ( $n=2$ ) de Van Genuchten (1980) décrite précédemment.

D'un autre côté, la saturation en eau diminue faiblement au voisinage de la surface supérieure de la nappe à cause de l'existence d'un front d'humectation qui rend l'expansion de l'eau moins importante que dans les régions relativement loin de la nappe.

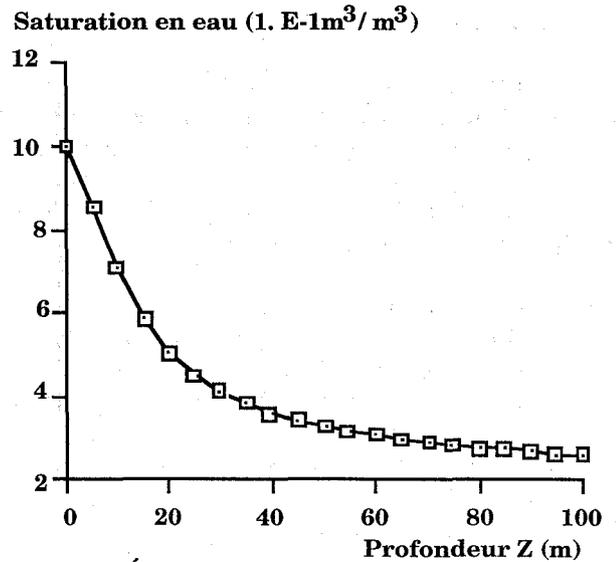


Figure 3. Évolution de la saturation en eau en profondeur

On constate, d'après la figure 4, que la concentration du soluté diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la nappe. Compte tenu des hypothèses simplificatrices posées, on a considéré la modélisation de l'équilibre linéaire de sorption ( $\beta(c) = \text{constante}$ ) c'est à dire que le soluté se dépose dans le solide. D'autre part, la saturation en eau diminue en s'éloignant de la nappe (Figure 3), car la teneur en eau du milieu diminue ; il s'en suit que le soluté est forcé à occuper un volume d'eau décroissant, limité par une couche d'eau moins épaisse qu'avant, ce qui entraîne une augmentation de la concentration du soluté dans l'eau.

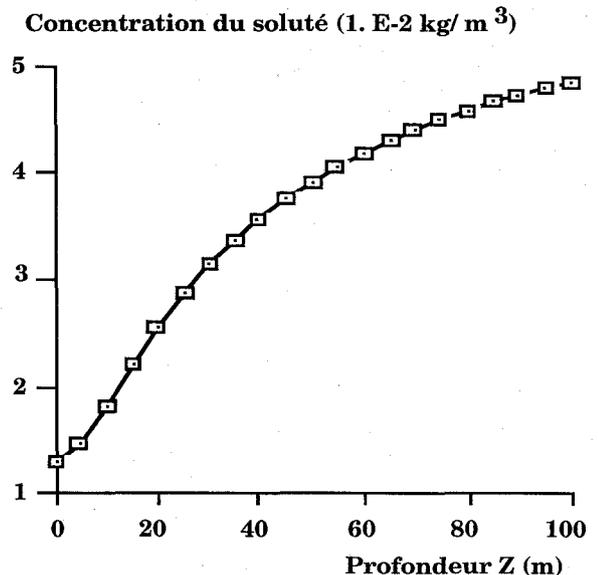


Figure 4. Évolution de la concentration du soluté en profondeur

## CONCLUSION

Lors de cette étude, on a constaté que les équations qui régissent le problème de la pollution de l'eau souterraine sont le siège d'un couplage non linéaire extrêmement complexe. Il s'en suit que la résolution d'un tel problème, par les modèles analytiques connus, est impossible.

Les insuffisances de ces modèles nous ont conduit à mettre au point une méthode fondée sur la résolution (aux différences finies) des équations qui régissent le problème de pollution des aquifères. Cette méthode offre l'avantage de prendre en compte les caractéristiques relativement réelles du sol, de l'eau et du soluté. Les résultats prédits par cette approche seront d'autant plus convergents que les paramètres qui gouvernent les écoulements de l'eau, dans un milieu poreux non saturé, englobent toutes les caractéristiques du milieu et les interactions entre différentes phases.

## RÉFÉRENCES CITÉES

Bear J. (1972) Dynamics of fluid in porous media American Elsevier, New-York

Bear J. (1979) Hydraulics of groundwater Mc-Graw Hill, New-York

Freeze R.A. (1971) Three dimensional, transient, saturated-unsaturated flow in a groundwater basin. *Water Resour. Res* 7(2): 347-366

Frind E.O. & Verge M.J. (1978) Three dimensional modeling of groundwater flow systems. *Water Resour. Res.* 15(5): 844-856p.

Gentile G., Brusa L., Nigo L., Mezzani D. & Rangogni R. (1990) A 3D finite element code for modeling salt intrusions in aquifers 8th int. conf. on computational methods in water resources. Venice 11-15 juin, Italy

Huyakorn (1993) Improved three dimensional finite element techniques for field simulation of contaminant hydrology 12 (3) : 33, Elsevier Sciences Publishers Amsterdam

Jacob F. (1993) Modélisation tridimensionnelle par la méthode des éléments finis de l'écoulement et du transport en milieu poreux saturé. Thèse de l'Université de Franche-Comté, France

Van Genuchten M.Th. (1980) A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc.Am. J.* 44(5) : 892-898

Crolet J. M. (1992) Comportement des nappes phréatique: écoulement, transport de soluté, transport d'énergie. Formulation générale. Rapport

Crolet J. M. (1994) Computational methods for transport in porous media. Journées Numériques. Besançon

Nougier J.P. (1989) Méthodes de calcul. Masson 3ème édition, Paris

Mose R. (1990) Application de la méthode des éléments finis mixte hybride et de la "marche au hasard" à la modélisation de l'écoulement et du transport de masse en milieu poreux. Thèse de l'Université de Strasbourg . France

Segol G. (1977) A three dimensional Galerkin-finite element model for the analysis of contaminant transport in saturated-unsaturated porous media. In: W.G. Cray Pinder and C.A. Brebbia (editors), finite element in water resources. Pentech. London pp. 2 123-2 124