

Écoulements pulsés à deux phases en conduites déformables et poreuses à parois élastiques et anisotropes. Application à la microcirculation sanguine

Mohammed TAIBI ¹*, Mohamed KERROUM ¹, Kamal GUERAOU ¹,
Abdellah HAMMOUMI ¹ & Gamal ZEGGWAGH ¹

(Reçu le 27/07/2001 ; Accepté le 02/01/2002)

جريان نبضي ذو طورين عبر قنوات ذات بطانة مرنة مدودة ومتباينة الخواص ونفيدة. تطبيق الدورة المجرية

نهدف من خلال هذا البحث تقديم حلول عددية لجريان سائل ذو طورين (الدم) عبر قنوات مرنة. هذا الجريان ذو طبيعة نبضية، مع الأخذ بعين الاعتبار زيادة على الطبيعة (الغير النيوتونية) للسائل المركزي، التمدد المحوري والشعاعي للبطانة، نفاذتها وتباين خواصها. باستعمال طريقة الفرق النهائي لحل المعادلات المحلية والعمامة للجريان النبضي - مع الأخذ بعين الاعتبار معادلات القنوات - نحدد الكميات العمامة والمحلية للجريان مع دراسة تأثير العوامل المتعلقة بالسائل على هذه الأخيرة. هذا العمل الذي يسهم في المعرفة الجيدة لخصائص جريان الدم في العروق يجد له تطبيقاً في المجال الصناعي.

الكلمات المفتاحية : جريان- الدم- الدورة المجرية- بطانة مرنة- الفرق النهائي- نفيد- مدود

Écoulements pulsés à deux phases en conduites déformables et poreuses à parois élastiques et anisotropes. Application à la microcirculation sanguine

L'objet du présent travail consiste en la modélisation numérique d'écoulements du sang considéré comme un fluide à deux phases (fluide newtonien-fluide de Casson généralisé) en régime pulsé, dans une conduite déformable. Une telle modélisation tient compte, en plus du caractère non newtonien du fluide, du déplacement axial et radial de la paroi, de sa porosité et de l'anisotropie. En utilisant une méthode numérique aux différences finies implicites pour résoudre les systèmes des équations locales, intégrales et le système des équations de la paroi, les quantités locales et globales de l'écoulement ont été déterminées.

Mots clés : Écoulement pulsé - Fluides à deux phases - Casson généralisé - Parois anisotropes - Microcirculation

Pulsated flows with two phases in deformable and porous conduits with elastic and anisotropic walls. Application to the blood microcirculation

The objective of the present work is a numerous simulation of blood flow considered with a two-fluid model (newtonian fluid-casson generalized fluid) through deformable tubes. The porosity, anisotropy, axial and radial displacement of the pipe are considered. Using an implicit finite differences method to solve the equations systems local, integral and the duct, we determine the global and the local quantities for the flow. This study considered as a step in the modelling of flow in blood vessels, may also contribute to other important fields such as water desalination or gel filtration.

Key words : Pulsatile flow - Two phase fluids - Casson generalized - Pulsatile flow - Microcirculation

¹ Groupe de Mécanique des Fluides et des structures, laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, B.P. 1014, Rabat.

* Auteur correspondant, e-mail : taibi@hotmail.com

INTRODUCTION

Une meilleure modélisation des écoulements sanguins, tenant compte d'hypothèses simplificatrices, conduit à des équations très complexes. L'origine d'une telle complexité est la loi de comportement du fluide et de son type d'écoulement (permanent, oscillatoire ou pulsé), d'une part, et de la nature de la paroi artérielle (rigide, élastique, isotrope ou anisotrope, poreuse ou imperméable) et de son déplacement axial, d'autre part.

De nombreuses études ont été effectuées sur le sang, liées à la recherche d'une loi rhéologique, représentant correctement la suspension sanguine, montrent que le comportement rhéologique de ce dernier obéit soit à la loi de Newton, soit à des lois non-newtoniennes (Ostwald, Bingham, Bingham généralisé, Quemada, Sisko, Casson ou Casson généralisé) (Baranger *et al.*, 1990 ; Bellet, 1973 ; Quemada, 1978 ; Rakotomalala, 1989).

La description des phénomènes hémodynamiques ne peut se faire d'une manière correcte qu'avec la prise en compte de la nature de la paroi artérielle (Amar *et al.*, 1998 ; Bahrar, 1986 ; Flaud, 1979 ; Kerroum, 1994). Par conséquent, l'étude de l'influence de l'élasticité de la paroi est d'un intérêt certain dans des cas pathologiques comme l'hypertension ou l'athérosclérose (Buthaud, 1977 ; Caro *et al.*, 1978). À côté de ses propriétés mécaniques d'élasticité et d'anisotropie, la paroi vasculaire présente des propriétés de filtration (Gueraoui *et al.*, 1998 ; Zeggwagh, 1988).

La présente étude concerne la modélisation d'écoulements du sang, qui est considéré comme un fluide à deux phases (fluide de Casson généralisé-fluide newtonien) au niveau de la microcirculation, en régime non permanent, à travers des conduites déformables, poreuses, élastiques et anisotropes. La déformation axiale de la paroi est prise en considération. L'approche du phénomène s'effectue par voie numérique, en utilisant la méthode des différences finies.

MODÈLE THÉORIQUE

1. Mise en équations de la conduite

La conduite étudiée est un tube axisymétrique souple, de longueur L à l'état déformé, à paroi mince, poreuse, d'axe de révolution $o\vec{z}$, de masse volumique ρ_p , d'épaisseur h , de rayon au repos R_0 et de rayon non permanent $R(z, t)$. Le déplacement

axial de la paroi est représenté par $A(z, t)$ et le déplacement radial par $B(z, t)$.

Le système d'équations décrivant la déformation de la paroi de la conduite, en l'absence d'efforts volumiques (effet d'inertie négligeable devant l'effet de viscosité (Patel *et al.*, 1969)), s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{\zeta\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\partial \sigma_{z\zeta}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\theta\theta}}{\zeta + R} = \rho_p \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{z\zeta}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_{z\zeta}}{\zeta + R} = \rho_p \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad (1)$$

où $\vec{\zeta} = B(z, t) \vec{e}_\zeta + A(z, t) \vec{e}_z$ est le vecteur déplacement de la conduite.

L'ensemble des relations rhéologiques modélisant le matériau anisotrope s'écrit :

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{1 - \nu_3} (E_z \varepsilon_{zz} + \nu_3 E_\theta \varepsilon_{\theta\theta} + (\nu_2 + \nu_1 \nu_3) \sigma_{\zeta\zeta})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{1 - \nu_3} (E_\theta \varepsilon_{\theta\theta} + \nu_3 E_z \varepsilon_{zz} + (\nu_1 + \nu_2 \nu_3) \sigma_{\zeta\zeta}) \quad (2)$$

$$\sigma_{\zeta z} = \frac{E_z}{1 + \nu_2} \frac{\partial B}{\partial z}$$

$$\sigma_{\zeta\zeta} = \frac{1}{1 - \nu_1^2 - \nu_2^2 - \nu_3^2 - 2\nu_1\nu_2\nu_3} ((\nu_1 + \nu_2\nu_3) E_\theta \varepsilon_{\theta\theta} + (\nu_2 + \nu_1\nu_3) E_z \varepsilon_{zz}) \quad (3)$$

En multipliant les deux équations du système (1)

par $1 + \frac{\zeta}{R}$ et en intégrant de $-\frac{h}{2}$ à $\frac{h}{2}$ on obtient :

$$\rho_p h \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \left[\frac{\zeta + R}{R} \sigma_{\zeta\zeta} \right]_{\zeta = -\frac{h}{2}}^{\zeta = \frac{h}{2}} + \frac{h E_z}{1 + \nu_2} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}$$

$$- \frac{h E_\theta}{1 - \nu_3} \frac{B}{R^2} \left(1 + \frac{h^2}{12 R^2} \right) - \frac{\nu_3 E_z h}{1 - \nu_3} \frac{\partial A}{R \partial z}$$

$$\rho_p h \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \left[\frac{\zeta}{R} \sigma_{z\zeta} \right]_{\zeta = -\frac{h}{2}}^{\zeta = \frac{h}{2}} + \frac{h E_z}{1 - \nu_3} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + \frac{h \nu_3 E_\theta}{1 - \nu_3} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B}{R} \right)$$

$$- \frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial z} \left(\frac{\nu_3 E_\theta}{1 - \nu_3} \frac{B h^3}{12 R^2} \right) \quad (4)$$

À ce système, on adjoint les conditions aux limites correspondantes à la surface de séparation fluide-paroi (Flaud *et al.*, 1974).

$$\left[\frac{\zeta+R}{R} \sigma_{\zeta\zeta} \right]_{\zeta=-\frac{h}{2}}^{\zeta=\frac{h}{2}} = \left(P_t - 2\eta_p \frac{\partial U^p}{\partial r} \right)_{r=R}$$

$$\left[\frac{\zeta}{R} \sigma_{\zeta\zeta} \right]_{\zeta=-\frac{h}{2}}^{\zeta=\frac{h}{2}} = \left(-\eta_p \left(\frac{\partial W^p}{\partial r} + \frac{\partial U^p}{\partial z} \right) \right)_{r=R} \quad (5)$$

avec $P_t = P - P_{ext}$

P est la pression à l'intérieur du tube et P_{ext} (supposée constante) est la pression à l'extérieur du tube. η_p est la viscosité apparente du fluide représentant le manchon plastique. U^p et W^p sont respectivement les vitesses radiale et axiale dans le manchon plasmatique.

Le système des équations (4) s'écrit alors :

$$\rho_p h \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \left(P_t - 2\eta_p \frac{\partial U^p}{\partial r} \right)_{r=R}$$

$$+ \frac{hE_z}{1+\nu_2} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{h}{1-\nu_3^2} \left(\frac{\nu_3 E_z}{R} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{BE_\theta}{R^2} \left(1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) \right)$$

$$\rho_p h \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \left(-\eta_p \left(\frac{\partial W^p}{\partial r} + \frac{\partial U^p}{\partial z} \right) \right)_{r=R}$$

$$+ \frac{hE_z}{1-\nu_3^2} \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\nu_3}{12R^4} \frac{h^3 BE_\theta}{1-\nu_3^2} + \left(\frac{h\nu_3 E_\theta}{1-\nu_3^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{B}{R} \right) \right) \quad (6)$$

2. Adimensionnalisation du système de la paroi

Dans le système des équations (6), intervient un nombre important de paramètres : sous forme adimensionnelle, on introduit les simplifications nécessaires. Pour cela, on pose les changements de variable suivants :

$$\hat{r} = \frac{r}{R_0}; \quad \hat{z} = \frac{z}{L_0}; \quad \hat{t} = \frac{t}{T}; \quad \hat{W} = \frac{W}{W_0}; \quad \hat{U} = \frac{UL_0}{W_0 R_0};$$

$$\hat{\eta}_a = \frac{\eta_a}{\eta_p}; \quad \hat{B} = \frac{B}{h}; \quad \hat{P}_t = \frac{P_t R_0^2}{\eta_p W_0 L_0}; \quad \hat{A} = \frac{A}{L_0}; \quad (7)$$

$$\hat{R} = \frac{R}{R_0}; \quad \hat{\varepsilon} = \frac{R_0}{L_0}; \quad \hat{\alpha} = \frac{h}{R_0}; \quad \hat{E}_z = \frac{E_z}{E_0}; \quad \hat{E}_\theta = \frac{E_\theta}{E_0}$$

Le système de la paroi sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\alpha \varepsilon^3 X_3 \frac{\partial^2 \hat{B}}{\partial \hat{t}^2} = \frac{X_1 X_2}{X_4} \hat{P}_t + 2\varepsilon X_2^2 \left(\frac{-\alpha}{1-\nu_3^2} \hat{B} \hat{E}_\theta - \frac{-\nu_3 \hat{E}_z}{1-\nu_3^2} \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{z}} \right)$$

$$\varepsilon X_3 \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial \hat{t}^2} = -\frac{X_1 X_2}{X_4} \left(\frac{\partial \hat{W}^p}{\partial \hat{x}} \right)_{\hat{x}=1} + \frac{X_1 X_2 \hat{B} \alpha}{X_4} \left(\frac{\partial \hat{W}^p}{\partial \hat{x}} \right)_{\hat{x}=1}$$

$$+ \frac{2\varepsilon X_2^2}{1-\nu_3^2} \left(\alpha \nu_3 \hat{E}_\theta \frac{\partial \hat{B}}{\partial \hat{z}} + \hat{E}_z \frac{\partial^2 \hat{A}}{\partial \hat{z}^2} \right) \quad (8)$$

avec : $X_1 = \frac{T}{T_c}$ où $T_c = \frac{L_0}{W_0}$

le temps de convection dans la direction axiale

$X_2 = \frac{T}{T_e}$ où $T_e = \frac{L_0}{C_0}$

le temps caractéristique lié à l'élasticité de la paroi

$X_3 = \frac{\rho_p h}{\rho R_0}$

rapport des masses fluides - paroi

$X_4 = \frac{C_0}{C_v}$ où $C_0 = \sqrt{\frac{hE_0}{2\rho R_0}}$

représente la vitesse de Moens-Korteweg.

$C_v = \frac{\eta_p}{\rho R_0}$ est la vitesse de propagation du cisaillement.

E_0 , étant le module d'Young effectif, peut être estimé à partir d'un modèle entièrement simplifié conduisant à la formule de Moens-Korteweg. L_0 est la longueur de la conduite au repos. W_0 est une vitesse caractéristique dans la direction axiale (vitesse moyenne dans un écoulement de Poiseuille par exemple).

3. Mise en équation du mouvement du fluide

L'écoulement non permanent et pulsé, de vitesse axiale $W(r, z, t)$ et radiale $U(r, z, t)$ en chaque point $M(r, z)$, comprend :

- Un noyau central, de rayon R_1 riche en globules rouges et modélisé par un fluide, de viscosité

dynamique η_a , obéissant à la loi de Casson généralisée.

- Un manchon plasmatisque entourant le noyau, mais pauvre en globules rouges, et dont le comportement rhéologique est newtonien (Chien *et al.*, 1966) de viscosité dynamique η_p constante.

Les deux fluides sont supposés incompressibles et ont la même masse volumique ρ afin de négliger les effets de sédimentations gravitationnelles qui tendent à décentrer l'axe du noyau vers le bas (Bitoun, 1985).

Afin de définir des grandeurs caractéristiques qui soient significatives des grandeurs réelles, l'écoulement de référence choisi est l'écoulement permanent dans une conduite cylindrique de rayon

au repos R_0 sous une pression $\frac{\eta_p W_0 L_0}{R_0^2}$.

Les équations adimensionnelles traduisant la conservation de la quantité de mouvement et de masse s'écrivent :

$$R_e \varepsilon^3 \left(\frac{\beta^2}{R_e \varepsilon} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \hat{t}} + \dot{U} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \hat{r}} + \dot{W} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \hat{z}} \right) =$$

$$- \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial \hat{z} \partial \hat{r}} + \frac{2}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \hat{\eta}_a \frac{\partial \dot{U}}{\partial \hat{r}} \right) \right.$$

$$\left. - 2 \hat{\eta}_a \frac{\dot{U}}{\hat{r}^2} + \varepsilon^2 \left(\hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial \hat{z}^2} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \hat{z}} \right) \right)$$

$$R_e \varepsilon \left(\frac{\beta^2}{R_e \varepsilon} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{t}} + \dot{U} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{r}} + \dot{W} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{z}} \right) =$$

$$- \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{r}} + \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{r}} + \hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial \hat{r}^2}$$

$$+ \varepsilon^2 \left(\hat{\eta}_a \frac{\partial^2 \dot{U}}{\partial \hat{r} \partial \hat{z}} + \frac{\hat{\eta}_a}{\hat{r}} \frac{\partial \dot{U}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \dot{U}}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{\eta}_a}{\partial \hat{r}} + 2 \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\hat{\eta}_a \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{r}} \right) \right)$$

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \dot{U}) + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (9)$$

Par conséquent, on a les nombres sans dimensions suivants :

$$\beta = R_0 \sqrt{\frac{\rho \omega}{2\pi \eta_p}}, \quad R_e = \frac{\rho R_0 W_0}{\eta_p} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{R_0}{L_0}$$

Le premier est le nombre de Womersley généralisé mesurant l'importance relative des effets d'instationnarité par rapport aux effets de viscosité. Le second est le nombre de Reynolds généralisé de l'écoulement mesurant l'importance relative des effets d'inertie par rapport aux effets de viscosité. Le dernier est un petit paramètre géométrique.

Compte tenu des hypothèses simplificatrices en microcirculation (Buthaud, 1977), $\varepsilon^2 \ll 1$ et $R_e \varepsilon \ll 1$, le système d'équations (9) devient :

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} = 0$$

$$\beta^2 \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{t}} = - \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} \left(\hat{r} \hat{\eta}_a \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{r}} \right)$$

$$\frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial}{\partial \hat{r}} (\hat{r} \dot{U}) + \frac{\partial \dot{W}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (10)$$

Dans la première équation du système (10), la pression est constante dans une section droite à un instant donné. En omettant les (^.) par la suite et en attribuant l'exposant " n " au fluide qui occupe le noyau et l'exposant " p " pour le manchon plasmatisque, on obtient les systèmes d'équations locales relatifs aux deux phases fluides :

- Pour le noyau : $0 \leq r \leq R_1$

$$\beta^2 \frac{\partial W^n}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta_a \frac{\partial W^n}{\partial r} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U^n) + \frac{\partial W^n}{\partial z} = 0$$

- Pour le plasma : $R_1 \leq r \leq R$

$$\beta^2 \frac{\partial W^p}{\partial t} = - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W^p}{\partial r} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U^p) + \frac{\partial W^p}{\partial z} = 0$$

Le noyau central est modélisé par un fluide de Casson généralisé. Sa viscosité adimensionnelle est donnée par la loi suivante (Hadjisadok *et al.*, 1993) :

$$\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial r} = -\tau_0 + \eta_\infty \frac{\partial W^n}{\partial r} + k \left| \frac{\partial W^n}{\partial r} \right|^{m-1} \frac{\partial W^n}{\partial r} \quad \text{pour} \quad \tau > \tau_0$$

$$\frac{\partial W^n}{\partial r} = 0 \quad \text{pour} \quad \tau \leq \tau_0$$

Cette loi est paramétrée par τ_0 , η_∞ , k , m et τ qui sont, dans l'ordre, la contrainte seuil, la viscosité

pour des taux de cisaillements très grands, la consistance, l'indice du comportement du fluide et la contrainte de cisaillement. Pour des valeurs particulières de τ_0 , η_∞ , k , m et τ , on peut obtenir différents modèles de fluides (Newton, Ostwald, Bingham généralisé ou Casson) (Ly *et al.*, 1978).

En vue de fixer les frontières du domaine de l'écoulement et de définir des pas constants, indépendants du temps, dans la direction radiale de la section S considérée, on effectue le changement de variable suivant :

$$x = \frac{r}{R(z,t)} \quad \text{où } 0 \leq x \leq 1 \quad (11)$$

Avec $(r=R, x=1)$ à la paroi, $(r=R_1, x=\alpha_0)$ à l'interface et $(r=0, x=0)$ sur l'axe.

Le système des équations locales s'écrit alors :

- Pour le noyau $0 \leq x \leq \alpha_0$:

$$\beta^2 \frac{\partial W^n}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{xR^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial x} \right) + \beta^2 \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial W^n}{\partial x}$$

$$\frac{1}{xR} \frac{\partial}{\partial x} (xU^n) - \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial W^n}{\partial x} + \frac{\partial W^n}{\partial z} = 0$$

- Pour le plasma $\alpha_0 \leq x \leq 1$:

$$\beta^2 \frac{\partial W^p}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{xR^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial W^p}{\partial x} \right) + \beta^2 \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial W^p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{xR} \frac{\partial}{\partial x} (xU^p) - \frac{x}{R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial W^p}{\partial x} + \frac{\partial W^p}{\partial z} = 0$$

- Pour la loi du fluide central :

$$\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial x} = -\tau_0 R + \eta_\infty \frac{\partial W^n}{\partial x} + k \left| \frac{\partial W^n}{\partial x} \right|^{m-1} \frac{\partial W^n}{\partial x} \quad \text{pour } \tau > \tau_0$$

$$\frac{\partial W^n}{\partial x} = 0 \quad \text{pour } \tau \leq \tau_0$$

4. Conditions aux limites

Les conditions aux limites traduisent l'adhérence des particules fluides à la paroi, l'axisymétrie de l'écoulement et la continuité des champs de vitesse et des contraintes à l'interface entre les deux fluides. En effet, l'axisymétrie de l'écoulement impose deux conditions homogènes sur l'axe ($x=0$) du conduit :

$$\frac{\partial W^n}{\partial x} = 0 \quad \text{et } U^n = 0 \quad (12)$$

L'adhérence à la paroi ($x=1$), dans le cas où $\varepsilon^2 \ll 1$ et pour une conduite à paroi mince, poreuse et anisotrope, s'écrit :

$$W^p = \frac{\beta^2}{R_e \varepsilon} \frac{\partial A}{\partial t} - L_p (P - P_{ext}) \frac{\partial R}{\partial z}$$

$$U^p = \frac{\beta^2 \alpha}{R_e \varepsilon} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{L_p}{\varepsilon^2} (P - P_{ext}) \quad (13)$$

où L_p est le coefficient de filtration.

La condition traduisant la continuité du champ de vitesses et des contraintes tangentielles en $x = \alpha_0$ s'écrit :

- Contraintes tangentielles :

$$\eta_a \frac{\partial W^n}{\partial x} = \frac{\partial W^p}{\partial x} \quad (14)$$

- Continuité du champ de vitesses :

$$W^n = W^p \quad \text{et } U^n = U^p \quad (15)$$

5. Système des équations intégrales

Le gradient de pression étant inconnu le long du conduit, le système des équations locales ne peut être résolu séparément, pour cela on lui adjoint le système des équations intégrales de l'écoulement. Un tel système est obtenu, en intégrant les équations locales, chacune sur son domaine correspondant. Le long d'une section, en utilisant les conditions aux limites et en sommant les équations de même nature, on obtient le système intégrale ci-dessous :

$$\beta^2 \frac{\partial Q}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{2\beta^2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} Q + \frac{2\tau_p}{R}$$

$$+ \frac{2\beta^4}{R_e \varepsilon R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{2\beta^2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R}{\partial z} L_p (P - P_{ext})$$

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{2\beta^2 \alpha}{R_e \varepsilon R} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial z} Q$$

$$- \frac{2\beta^2}{R_e \varepsilon R} \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{2L_p}{R \varepsilon^2} (P - P_{ext}) \quad (16)$$

où Q est le débit global instantané à travers la section du conduit considéré. $\tau_p = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial W^p}{\partial x} \right)_{x=1}$ est la contrainte de cisaillement pariétale.

À ce système, on adjoint les conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

- La pression à l'entrée de la conduite :

$$P(z=0, t) = P_1 + P_2 \cos(\omega t)$$

- La pression à la sortie de la conduite :

$$P(z=1, t) = P_3 + P_4 \cos(\omega t)$$

P_1 et P_3 sont les composantes permanentes de la pression. P_2 et P_4 sont les composantes oscillatoires de la pression et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ est la pulsation du phénomène.

PROCESSUS DE RÉOLUTION

Le système des équations de la paroi, des équations locales et des équations intégrales est résolu à l'aide d'une méthode numérique itérative aux différences finies de type implicite (Nougier, 1989). Les calculs sont amorcés avec la valeur de la contrainte pariétale issue du profil initial, qui peut être absolument quelconque pourvu qu'il satisfasse aux conditions aux limites. On adopte, pour cela, un profil correspondant à un écoulement permanent à deux phases (newtonien-newtonien) en conduites cylindriques poreuses. La résolution du système de la paroi permet la détermination des déplacements axial et radial de celle-ci. Ensuite, le système des équations intégrales permet, à chaque instant, le calcul de la pression, du gradient de pression et de débit. La résolution de ce système fournit les profils des vitesses à chaque instant et à partir desquelles, la grandeur τ_p est réestimée et sa valeur corrigée permet de réitérer et ce, jusqu'à convergence. Les critères de convergence et de périodicité portent sur la pression. Si m est le nombre de cycles de calcul, ε_1 et ε_2 deux quantités petites fixées à l'avance, on impose à la pression P , solutions du problème, de vérifier les deux tests suivants :

- Conditions de convergence :

$$\sup \left| \frac{P_m(z, t) - P_{m+1}(z, t)}{P_m(z, t)} \right| < \varepsilon_1$$

- Conditions de périodicité :

$$\sup \left| \frac{P_m(z, t) - P_m(z, t+T)}{P_m(z, t+T)} \right| < \varepsilon_2$$

DONNÉES DU PROGRAMME

Les données du programme prises dans la littérature sont celles qui sont relatives aux conditions hydrodynamiques et aux valeurs suivantes des paramètres rhéologiques du fluide et de la conduite. Elles sont exprimées dans le système C.G.S., qui est le plus approprié au réseau

cardio-vasculaire : la masse volumique de la paroi $\rho_p = 1,06 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, celle du fluide considéré $\rho = 1,06 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$, sa consistance $k = 0,047 \text{ C.G.S.}$, sa viscosité newtonienne pour des taux de cisaillements grands $\eta_\infty = 0,01 \text{ C.G.S.}$, son indice de comportement $m = 0,5$, la contrainte seuil $\tau_0 = 0,02 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$, la longueur de la conduite au repos $L_0 = 1 \text{ cm}$, son épaisseur $h = 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}$, le rayon au repos à l'entrée de la conduite $R_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$, la période du mouvement $T = 1 \text{ s}$, la composante permanente de la pression à l'entrée de la conduite $P_1 = 5320 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$ et celle à la sortie de la conduite $P_3 = 4320 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$, la composante oscillatoire de la pression à l'entrée de la conduite $P_2 = 532 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$ et celle à la sortie de la conduite $P_4 = 432 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$, la pression extérieure $P_{\text{ext}} = 3320 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$, le module d'Young de référence $E_0 = 10^5 \text{ dyne} \cdot \text{cm}^{-2}$.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Les résultats (pressions et débits) présentés dans cet article sont sous forme adimensionnelle.

Les figures 1 et 2 permettent de juger l'importance de la variation de l'indice de comportement m du fluide. Les autres paramètres restant égaux par ailleurs, le calcul est effectué pour deux valeurs de l'indice de comportement $m = 0,77$ et $m = 0,5$. Sur la figure 1, on constate que l'indice de comportement n'a aucune influence sur la pression. Ceci est sans doute dû à la donnée de la pression à l'entrée et à la sortie du conduit. On remarque, sur la figure 2, qu'une diminution de l'indice de comportement m , qui se traduit par une pseudoplasticité plus marquée, s'accompagne d'une diminution de la viscosité apparente entraînant donc une augmentation des valeurs de débit.

En comparant le cas de $\tau_0 = 0,02$ (fluide de Casson généralisé) au cas $\tau_0 = 0$ (fluide de Sisko), on remarque, sur la figure 3, une augmentation de la contrainte seuil entraînant une augmentation de la viscosité apparente. Ceci se traduit par une augmentation des valeurs de la pression. Ces résultats sont qualitativement semblables à ceux de Gueraoui *et al.* (1996 ; 1997).

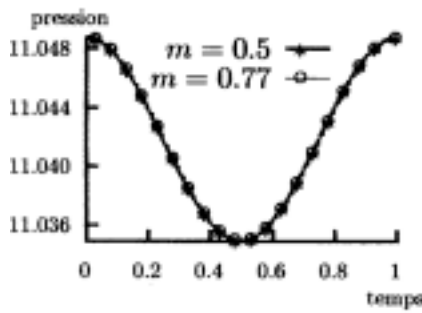


Figure 1. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en $z = l/2$ pour deux valeurs de l'indice de comportement m

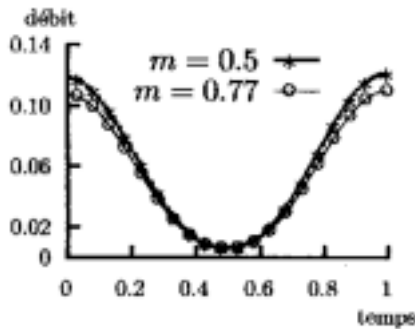


Figure 2. Évolution temporelle du débit au cours d'une période en $z = L/2$ pour deux valeurs de l'indice de comportement m

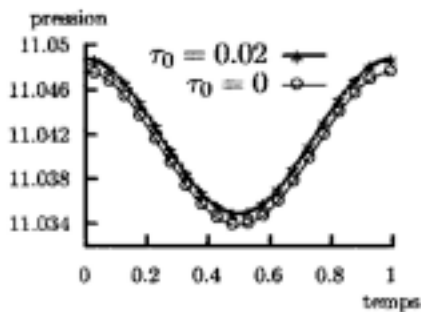


Figure 3. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en $z=L/2$ pour deux valeurs de la contrainte seuil τ_0

Par contre, sur la figure 4, une augmentation de la contrainte seuil entraîne une diminution des valeurs du débit au cours d'une période.

Le cas $\eta_\infty = 0,01$ correspondant à un fluide de Casson généralisé et le cas $\eta_\infty = 0$ correspondant à un fluide de Bingham généralisé ont été examinés.

Comme on pouvait s'y attendre, on observe une augmentation des valeurs de la pression (Figure 5) et une diminution des valeurs de débit (Figure 6).

Ceci peut s'expliquer par l'accroissement du frottement interne entre les diverses couches coaxiales du fluide. Les résultats obtenus sont semblables à ceux de Rockwell (1969) ; de Rakotomalala (1989) et de Chammami *et al.* (1998).

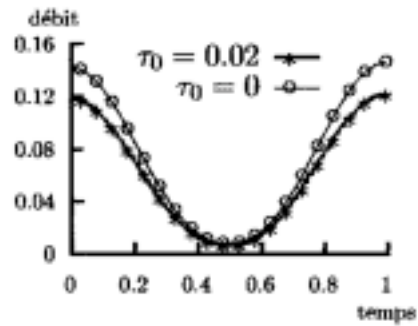


Figure 4. Évolution temporelle du débit au cours d'une période en $z=L/2$ pour deux valeurs de la contrainte seuil τ_0

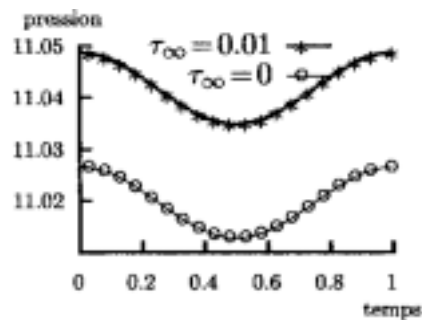


Figure 5. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en $z=L/2$ pour deux valeurs de η_∞

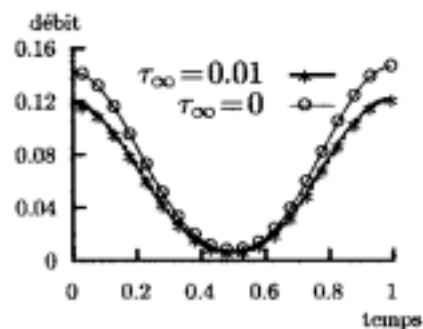


Figure 6. Évolution temporelle du débit au cours d'une période en $z=L/2$ pour deux valeurs de η_∞

L'anisotropie peut être prise en compte par la considération d'un module d'Young plus petit dans la direction azimutale que dans la direction axiale. Ceci se traduit, pour cette dernière, par une

diminution de l'élasticité, donc une faible déformabilité et, par conséquent, une augmentation des valeurs de la pression et de débit (Figures 7 & 8).

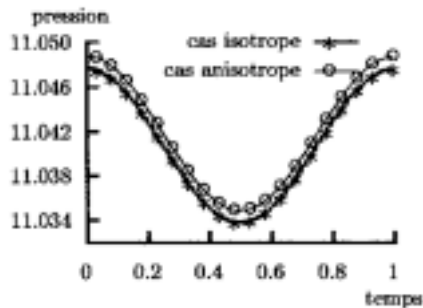


Figure 7. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en $z=L/2$ pour le cas isotrope et le cas anisotrope

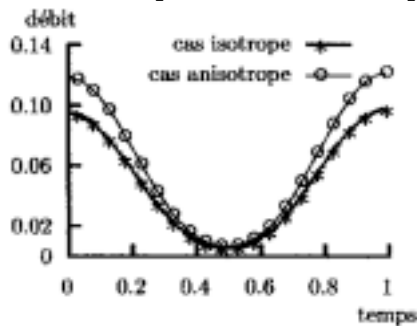


Figure 8. Évolution temporelle de débit au cours d'une période en $z=L/2$ pour le cas isotrope et anisotrope

L'évolution des profils de la pression et du débit est indiquée pour deux valeurs différentes du coefficient de filtration $L_p = 4,2 \cdot 10^{-3}$ et $L_p = 4,2 \cdot 10^{-4}$ (Figures 9 & 10). Une diminution de L_p provoque une augmentation des valeurs de la pression et de débit. Ces résultats sont similaires à ceux qui sont obtenus par d'autres auteurs (El Hammoumi, 1993, 1995 ; Gueraoui *et al.*, 1995 ; Zeggwagh, 1988).

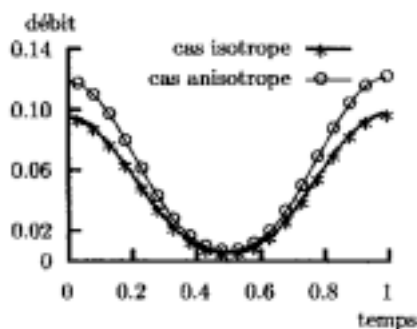


Figure 9. Évolution temporelle de la pression au cours d'une période en $z = L/2$ pour deux valeurs du coefficient de filtration L_p

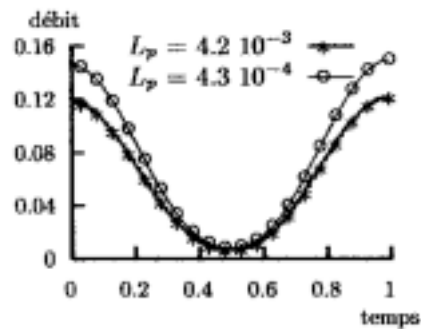


Figure 10. Évolution temporelle du débit au cours d'une période en $z=L/2$ pour deux valeurs du coefficient de filtration L_p

CONCLUSION

L'objectif essentiel de cette étude concerne les applications qui peuvent être faites en hémodynamique. En effet, le système artériel est constitué de vaisseaux déformables. De plus, suivant la taille des artères empruntées, le comportement rhéologique du sang est tantôt newtonien (dans les grosses artères), tantôt ostwaldien pseudoplastique (dans les artères de taille moyenne), tantôt plastique suivant un modèle de Casson généralisé (dans les artérioles).

Les résultats obtenus montrent l'importance qu'il y a à tenir compte de la nature de la paroi artérielle (rigide ou déformable, isotrope ou anisotrope, imperméable ou poreuse) et de la nature du fluide (fluide de Casson généralisé).

Cette étude devrait contribuer à une meilleure connaissance des processus intervenant dans la circulation sanguine et, par conséquent, trouver divers champs d'applications, notamment dans le domaine de l'hémodynamique.

Notations

- W : Composante axiale de la vitesse
- U : Composante radiale de la vitesse
- ρ : Masse volumique du fluide
- k : Consistance du fluide
- m : Indice de comportement du fluide
- η_∞ : Viscosité du fluide pour des taux de cisaillements infinies
- τ_0 : Seuil de plasticité
- τ_p : Contrainte de cisaillement pariétale
- A : Déplacement axial de la paroi
- B : Déplacement radial de la paroi
- R_0 : Rayon de la conduite au repos
- L : Longueur de la conduite

R : Rayon moyen de la conduite
 R_1 : Rayon moyen de noyau
 ρ_p : Masse volumique de la paroi
 h : Épaisseur de la paroi
 E_θ : Module d'Young dans la direction azimutale
 E_Z : Module d'Young dans la direction longitudinale
 ν : Coefficient de Poisson
 r : Variable radiale
 z : Variable axiale
 ω : Pulsation du mouvement
 t : Variable du temps
 W_0 : Vitesse de l'écoulement permanent dans la direction axiale
 P : Pression à l'intérieur de la conduite
 P_{ext} : Pression à l'extérieur de la conduite
 β : Nombre de Womersley
 Re : Nombre de Reynolds
 ε : Petits paramètres géométriques
 q : Vitesse de débit
 q_f : Débit de fuite latérale
 η_a : Viscosité apparente du fluide
 $\sigma_{\zeta\zeta}$: Composante radiale de la contrainte
 σ_{ZZ} : Composante axiale de la contrainte
 $\sigma_{\theta\theta}$: Composante azimutale de la contrainte
 $\sigma_{Z\zeta}$: Composante transversale de la contrainte
 $\vec{\zeta}$: Vecteur déplacement d'un élément de la paroi
 L_p : Coefficient de filtration
 d : Tenseur des taux de déformation
 α_0 : Rapport entre le rayon du noyau et le rayon de la conduite

RÉFÉRENCES CITÉES

- Amar H., Kerroum M. & Zeggwagh G. (1998) Modélisation de la contrainte pariétale pour un écoulement pulsé de fluide diphasique en conduite déformable de faible diamètre. *C. R. Acad. Sci. T.* 326, série II, Paris, pp. 197-204
- Bahrar B. (1986) Influence sur les écoulements transitoires en conduite, des termes d'inertie de la paroi ainsi que des déformations de flexion et de cisaillement. Thèse de Doctorat de 3^{ème} cycle, I.N.S.A., Lyon
- Baranger J. & Najib K. (1990) Analyse numérique des écoulements quasi-newtonien dont la viscosité obéit à la loi de puissance ou la loi de Carreau. *Num. Math.* 58 : 34-49
- Bellet D. (1973) Relation entre comportements rhéologiques pseudoplastiques et échanges thermiques. Thèse de Doctorat ès-Sciences, U.P.S. Toulouse.
- Bitoun J.P. (1985) Études théoriques et expérimentales de la microcirculation sanguine au passage d'une sténose. Thèse de Doctorat de l' I.N.P., Toulouse
- Buthaud H. (1977) Analyse non linéaire et bidimensionnelle de l'écoulement sanguin dans un modèle de l'aorte. Thèse de Docteur-Ingénieur, Poitiers
- Caro C.G., Pedley T.J., Schraoter R.C. & Seed W.A. (1978) The mechanics of circulation. Oxford University Press
- Chammami R., Kerroum M., Hammoumi A., Gueraoui K. & Zeggwagh G. (1998) Écoulementz pulsés à deux phases fluide de Bingham généralisé -fluide newtonien en conduites déformables à parois élastiques. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc)* 18(3) : 191-201
- Chien S., Usami S., Taylor H., Lundberg J.L. & Gregersen M.I. (1966) Effects of hematocrit and plasma proteins on human blood rheology at low shear rates. *J. App. Physiol.* 21 : 81-87
- El Hammoumi A. (1995) Résolution numérique d'écoulements pulsés de fluides non-newtoniens en conduites déformables poreuses. Thèse de Doctorat ès-Sciences, Rabat
- Flaud P. (1979) Influence des propriétés non linéaires sur la dynamique des écoulements dans un tuyau déformable. Thèse de Doctorat ès-Sciences, Paris VII
- Flaud P., Geiger D., Oddou C. & Quemada D. (1974) Écoulements pulsés dans les tuyaux viscoélastiques. Application à l'étude de la circulation sanguine. *J. Physique Appliquée*, Tome 35 : 869-882
- Gueraoui K., Hammoumi A., Kerroum M., Zeggwagh G. & Mrabti A. (1995) Écoulements non permanents de fluides plastiques en conduites élastiques poreuses. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc)* 15(2) : 39-49
- Gueraoui K., Hammoumi A., Hami M., Mrabti A., Kerroum M. & Zeggwagh G. (1996) Modélisation numérique d'écoulements pulsés de fluides plastiques en conduites déformables à parois élastiques et isotropes. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc)* 16 (3) : 49-60
- Gueraoui K., Kerroum M., El Hammoumi A. & Zeggwagh G. (1997) Modélisation théorique d'écoulements de fluides inélastiques en conduites élastiques poreuses et isotropes. *Journal of Hydraulic Research (Netherlands)* 35 (3) : 301-322

- Gueraoui K., El Hammoumi A. & Zeggwagh G. (1998) Écoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites déformables, poreuses et anisotropes. *C.R. Acad. Sci. Paris T 323, Série II* : 825-832
- Hadjsadok A., Benhadid S., Wang X., Lucius M. & Soltz J.F. (1993) Viscosimètre de Couette : détermination du taux de cisaillement à partir des modèles de Casson et Casson généralisé. *1^{er} Congrès de mécanique, E.N.I.M., Rabat (Maroc) T2* : 309-317
- Hammoumi A., Kerroum M., Gueraoui K. & Zeggwagh G. (1993) Modélisation théorique d'écoulements non permanents de fluides non newtoniens en conduites déformables poreuses. Application à la microcirculation sanguine. *Actes Inst. Agron. Vet. (Maroc) 13 (2)* : 41-50
- Kerroum M. (1994) Écoulements pulsés de fluides diphasiques en conduites déformables de faibles diamètres. Modélisation de la microcirculation sanguine. Thèse de Doctorat ès-Sciences, Rabat, Maroc
- Ly D.P., Bellet D., Fajeanu Y. & Bousquet A. (1978) A model of blood flow studies. *S. Afr. Mech. Eng.* 28 : 153-157
- Nougier J.P. (1989) Méthodes de calcul numérique. Masson, 3^{ème} édition, Paris
- Patel D.J. & Fry D.L. (1969) The elastic symmetry of arterial segments in dogs. *Circulation Research* 21 : 1-8
- Quemada D. (1978) Rheology of concentrated disperse system, 3, General features of the proposed non newtonian model. Comparison with experimental data. *Rheol. Acta* 17 : 643-653
- Rakotomalala A. R. (1989) Écoulements non-newtoniens en conduites rigides et déformables. Thèse de Doctorat ès-Sciences, I.N.P. Toulouse
- Rockwell R.L. (1969) Non linear analysis of pressure and shock waves in blood vessels. Ph D Dissertation, Stanford University
- Zeggwagh G. (1988) Modélisation théorique et expérimentale de l'hémodynamique en microcirculation. Thèse de Doctorat ès-Sciences, I.N.P. Toulouse