

Procédure numérique pour la convection naturelle bidimensionnelle. Validation sur une géométrie rectangulaire

Kamal GUERAOUI¹, Abderrahim MRABTI¹, Mohammed TAIBI¹,
Adil ECHCHELH², Abdallah EL HAMMOUMI¹,
Mohamed Yehya HADDAD³ & Gamal ZEGGWAGH¹

(Reçu le 16/05/2003 ; Accepté le 02/04/2004)

الإجراءات العددية للحمل الطبيعي ذو بعدين تصحيح على شكل دو هندسة مستطيلة

يحتوي هذا البحث على أول نتيجة لمجموعة من التطبيقات العددية تهم تصحيح للإجراءات العددية التي تستعمل طريقة الفرق النهائي وذلك بالنسبة للحمل الطبيعي في وسط محصور (ذو شكل أسطواني). نعتبر أولاً شكل ذو هندسة مستطيلة مسخن من الأسفل، وثانياً ندرس تأثيرات كل من عدد رايلي وزاوية ميلان الشكل الجوفي بالنسبة للمستوى الأفقي. على الجريان (السيلان) من جهة، ثم الانتقال الحراري من جهة أخرى.

الكلمات المفتاحية : الحمل الطبيعي - الفرق النهائي - شكل مستطيلي - الانتقال الحراري - النموذج العددي

Procédure numérique pour la convection naturelle bidimensionnelle. Validation sur une géométrie rectangulaire

Cet article est le premier d'une série d'applications numériques consacrées à la validation d'une procédure numérique basée sur les différences finies et mise au point pour des problèmes bidimensionnels de convection naturelle en milieu confiné (principalement cylindrique). Dans un premier temps, on considère une géométrie rectangulaire et chauffée par le bas. On s'intéresse alors aux effets du nombre de Rayleigh et à l'influence de l'inclinaison de la cavité par rapport à l'horizontale sur la structure de l'écoulement et le transfert de chaleur.

Mots clés : Convection naturelle – Différences finies – Géométrie rectangulaire – Transfert de chaleur – Modélisation numérique

Numerical procedure for two-dimensions natural convection. Validation with a rectangular geometry

This paper is the first one of a serial of numerical applications dealing with the validation of a numerical procedure based on the finite differences and devised for the two-dimensions problems of the confined natural convection (essentially in cylindrical geometry). In a first time, we consider a rectangular cavity heated from below. We limit ourselves to the effects of the Rayleigh number, and the influence of cavity inclination on both flow structure and heat transfer.

Key Words : Natural convection – Finite differences – Rectangular cavity – Heat transfer – Numerical model

¹ Groupe de Mécanique des Fluides et des Structures, Laboratoire de mécanique, Faculté des Sciences, B. P. 1014, Rabat, Maroc.

² Département de Mathématique et Informatique, Université Hassan I^{er}, F.S.T Settat, B.P 577 route de Casablanca, Maroc.

³ Département de Génie Mécanique, Université d'Ottawa, Ottawa, Canada

□ Auteur correspondant; e-mail: kgueraoui@hotmail.com

INTRODUCTION

Charlson & Sani (1970) rapportent qu'en approximant une couche infinie par une couche finie de fluide confiné à l'intérieur de parois rectangulaires ou cylindriques, Koschmider avait observé uniquement des cellules de même forme géométrique que l'enceinte confinante. Depuis, la convection naturelle bidimensionnelle en milieu confiné n'a pas cessé de susciter l'intérêt des scientifiques et ce, pour au moins deux raisons.

La première est liée à la diversité des problèmes rencontrés fréquemment en technologie et où les phénomènes de convection naturelle sont des éléments moteurs ou perturbateurs des écoulements et des transferts de chaleur comme la coulée continue d'un métal, le moulage de pièces de fonderie, les réacteurs thermonucléaires, le stockage d'énergie par chaleur latente ou encore la croissance cristalline.

La deuxième raison a trait à la complexité (couplage, non-linéarité) des systèmes régissant de tels phénomènes de convection et qui, de fait, offrent un champ d'essais très apprécié pour le développement de nouvelles méthodes d'analyse aussi bien analytiques que numériques.

La convection naturelle en milieu confiné a été alors abordée par différentes approches analytiques, expérimentales et numériques. Ceci a donné lieu à une abondante littérature. Il semble, cependant, que concernant la géométrie rectangulaire, on rencontre relativement plus de travaux sur les problèmes de la convection conventionnelle (enceinte différentiellement chauffée) que sur ceux de l'instabilité convective (enceinte chauffée par le bas).

Numériquement, la convection naturelle en milieu rectangulaire a été traitée par toutes les méthodes d'analyse connues: différences finies (Soong *et al.*, 1996), volumes de contrôle (Mukotmoni & Yang, 1995), éléments finis (Murty, 1986), méthodes spectrales (Howle, 1996), entre autres. Ceci est dû à la simplicité de cette configuration qui permet une mise en œuvre aisée de toutes ces méthodes.

La structure de l'écoulement change substantiellement avec le nombre de Rayleigh, le rapport d'aspect et les conditions aux limites thermiques à la paroi latérale. C'est donc l'effet de ces trois paramètres qui sera présenté dans le présent travail.

MÉTHODES

En vue de son utilisation pour une géométrie cylindrique, on présentera est une formulation mixte valable en géométrie cylindrique comme en géométrie rectangulaire.

Pour admettre un écoulement bidimensionnel, on suppose une symétrie axiale pour la géométrie cylindrique et une dimension infinie pour la géométrie rectangulaire.

On considère une cavité rectangulaire de longueur L et de hauteur H , chauffée par le bas à une température T_C uniforme et dont la surface supérieure est maintenue à la température T_F ($T_F < T_C$) constante. Les parois latérales sont supposées parfaitement adiabatiques. L'enceinte est inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle γ .

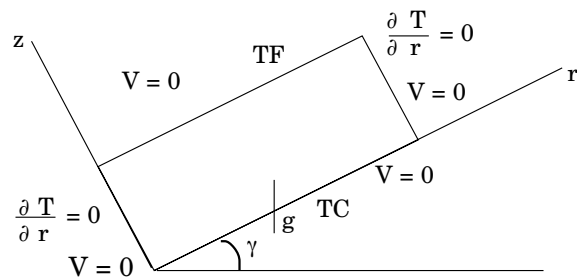


Figure 1. Configuration du problème

1. Équations

Les équations sont déduites des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, d'une part, et celle de l'énergie, d'autre part. Les propriétés physiques sont considérées constantes à l'exception de la densité supposée varier avec la température mais uniquement dans le terme des forces volumiques de pesanteur selon l'approximation de Boussinesq. Les équations sont alors:

$$\text{équation de continuité} \quad \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad [1]$$

équation du transport de la quantité de mouvement

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + [1 - \beta(T - T_0)] \mathbf{g} \quad [2]$$

équation du transport de l'énergie

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \nabla^2 T \quad [3]$$

Pour les écoulements bidimensionnels, il s'avère commode de remplacer les variables primitives, pression et vitesse, par la fonction de courant, ψ , et la composante non nulle, Ω , du vecteur rotationnel de la vitesse.

L'équation de continuité permet de définir la fonction de courant par:

$$U = \frac{1}{r^n} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad W = -\frac{1}{r^n} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad [4]$$

Les équations scalaires sont alors représentées par les relations [5], [6], [7].

n vaut zéro pour la géométrie rectangulaire et un pour la géométrie cylindrique.

Dans le cas d'une cavité ($\gamma=0$) horizontale, l'équation du transport de la vorticité met bien en évidence le rôle du gradient de la température horizontal, $\frac{\partial \Theta}{\partial r}$, dans l'activation du mécanisme de la convection naturelle. Ce gradient a pour effet d'initier l'écoulement en créant un déséquilibre mécanique dans la masse fluide initialement au repos.

2. Conditions aux limites

La condition de non glissement aux parois rigides se traduit pour la fonction de courant par:

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \quad \text{et } z = H \quad [8]$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \quad \text{et } r = L \quad [9]$$

Les conditions aux limites thermiques sont:

$$T=T_C \quad \text{pour } z = 0 \quad [10]$$

$$T=T_F \quad \text{pour } z = H \quad [11]$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \quad \text{et } r = L \quad [12]$$

Comme il n'existe pas de condition aux limites pour le vecteur rotationnel des vitesses, les valeurs aux frontières de la vorticité sont déduites de celles de la fonction de courant par la méthode de Thom:

$$\Omega|_{x=x_p} = \frac{2}{\Delta x^2} \psi \Big|_{x=x_{ap}} \quad [13]$$

où x_p est le point à la frontière et x_{ap} le point intérieur adjacent à x_p

3. ADIMENSIONNALISATION

L'adimensionnalisation des équations est effectuée au moyen des grandeurs de référence R , K/R , ΔT_0 , ($=T_C-T_F$), R^2/K pour la longueur, la vitesse, la température et le temps, respectivement. En considérant dorénavant que les grandeurs adimensionnelles sont décrites par les mêmes symboles ayant déjà décrit les grandeurs dimensionnelles, les équations sans dimensions s'écrivent éq. [14], [15], [16] et [17]:

$$U = \frac{1}{r^n} \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad W = -\frac{1}{r^n} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad [14]$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial (r^n U \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial (W \Omega)}{\partial z} - n \frac{U}{r} \Omega = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - n \frac{\Omega}{r^2} \right) - g_0 \beta \left(\frac{\partial T}{\partial r} \cos \gamma - \frac{\partial T}{\partial z} \sin \gamma \right) \quad [5]$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial (r^n U T)}{\partial r} + \frac{\partial (W T)}{\partial z} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad [6]$$

$$\Omega = \frac{1}{r^n} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{n}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad [7]$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial (r^n U \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial (W \Omega)}{\partial z} - n \frac{U}{r} \Omega = \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - n \frac{\Omega}{r^2} \right) - \text{Ra Pr} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial r} \cos \gamma - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \sin \gamma \right) \quad [15]$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{r^n} \frac{\partial (r^n U \Theta)}{\partial r} + \frac{\partial (W \Theta)}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \quad [16]$$

$$\Omega = \frac{1}{r^n} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{n}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \quad [17]$$

Θ étant une température réduite définie par:

$$\Theta = \frac{T - T_F}{\Delta T_0} \text{ et est toujours comprise entre 0 et 1.}$$

3.1. Conditions aux limites adimensionnelles

- Condition de non glissement aux parois rigides

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } z = 0 \text{ et } z = 1 \quad [18]$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \text{ et } r = AF \quad [19]$$

- Conditions aux limites thermiques

$$\Theta = \Theta_C \quad \text{pour } z = 0 \quad [20]$$

$$\Theta = \Theta_F \quad \text{pour } z = 1 \quad [21]$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r = 0 \text{ et } r = AF \quad [22]$$

AF est le rapport d'aspect défini par: $AF = L/R$

4. MÉTHODE NUMÉRIQUE

La discrétisation spatiale des équations de transport de la vorticité et de l'énergie se fera à l'aide des différences centrées précises à l'ordre deux (aussi bien pour les termes convectifs que de diffusion). L'équation donnant la fonction de courant sera discrétisée à l'aide d'un schéma de Hirsh précis à l'ordre quatre et dont les relations sont Éq [23], [24] (Terhmina, 1992).

Dans le cas des conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann, le système n'est pas fermé. Une relation reliant la fonction de courant à ses dérivées est nécessaire. Padé propose la relation suivante Éq [25] (Terhmina, 1992).

Puisqu'ils présentent le plus de difficultés numériques, la vorticité aux frontières, qui est déterminante pour la structure de l'écoulement, et les termes d'advection doivent être évalués avec une bonne précision. L'utilisation du schéma de Hirsh a pour but d'aboutir à une meilleure précision dans le calcul de la fonction de courant et de ses dérivées premières qui interviennent, respectivement, dans le calcul des valeurs de la

vorticité aux frontières et dans les termes advectifs des équations de transport.

Ainsi, on peut compenser d'une part l'utilisation, pour la discrétisation des termes d'advection, d'un schéma centré qui ne tient pas compte du caractère asymétrique de la convection naturelle et, d'autre part, de réduire l'erreur due à l'emploi d'un schéma de Thom, précis à l'ordre un et choisi pour son effet stabilisateur, dans le calcul de la vorticité aux frontières.

Comme on s'intéressera uniquement au régime permanent, les termes d'instationnarité dans les deux équations de transport sont maintenus en vue de l'utilisation d'une méthode pseudo-transitoire pour la recherche des solutions permanentes. Des facteurs de relaxation seront alors utilisés pour accélérer l'atteinte de ces solutions. L'équation de la fonction de courant est 'parabolisée' par rapport au temps, en y introduisant un terme pseudo-transitoire. Elle sera traitée de la même manière que les équations de transport. Un schéma implicite à direction alternée est utilisé pour avancer dans le temps. Les équations algébriques écrites avec les variables de Samarskii-Andreyev seront résolues à l'aide de l'algorithme de Thomas.

RÉSULTATS ET INTERPRÉTATIONS

1. Effet de l'inclinaison γ

On considère une enceinte de rapport d'aspect AF égal à un et un fluide d'un nombre de Prandtl de 0.71. Le nombre de Rayleigh est 2.10^4 . Au départ les champs dynamiques et de température sont calculés dans une cavité horizontale $\gamma = 0^\circ$ (Figure 2).

Ces résultats sont alors utilisés comme condition initiale pour la résolution du cas suivant d'inclinaison et, ainsi de suite, jusqu'à $\gamma = 90^\circ$.

Le fluide près de la surface chaude inférieure est alors chauffé et tend à atteindre la surface supérieure froide. Malgré l'effet freinant de la

$$\frac{\Delta x}{3} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i+1} + 4 \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i-1} \right] = F_{i+1} - F_{i-1} \quad [23]$$

$$\frac{\Delta x^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{i+1} + 10 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_i + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{i-1} \right] = F_{i+1} - 2F_i + F_{i-1} \quad [24]$$

$$\frac{\Delta x^2}{12} \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_i - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right)_{i+1} \right] + \frac{\Delta x}{2} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_i - \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_{i+1} \right] + F_i - F_{i+1} = 0 \quad [25]$$

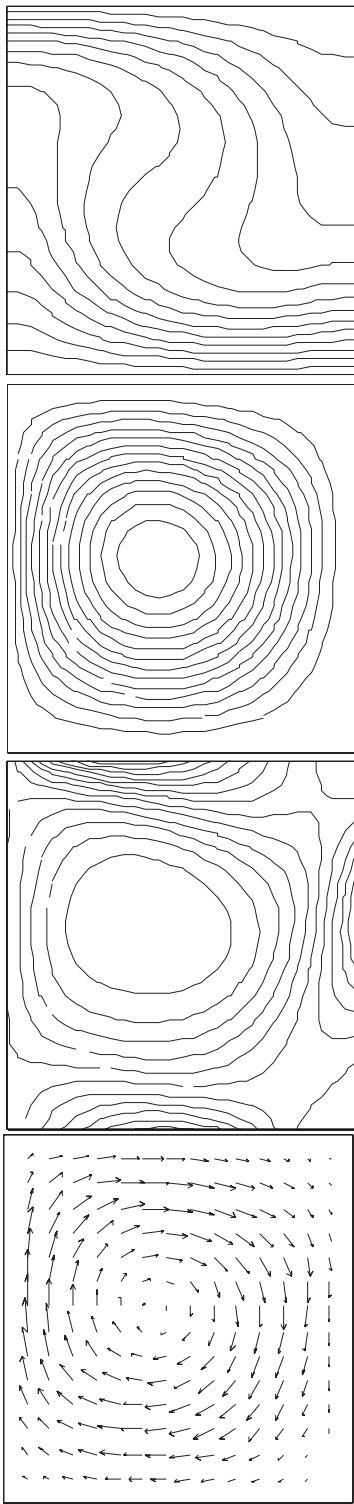


Figure 2. Isothermes, courbes de courant, isovortillons et champ des vitesses pour AF=1, Ra= 2.10⁴, Pr= 0.71, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison nulle

viscosité au voisinage de la paroi, c'est au voisinage de cette paroi que le mouvement ascendant est le plus intense (Figure 1). Jusqu'à un

angle d'inclinaison de 10° l'écoulement ne change pas de structure mais perd en intensité. À $\gamma = 15^\circ$, l'écoulement regagne en intensité sans changer de structure (Tableau 1). Aussi, le transfert de chaleur suit la même évolution (Figures 3 & 4).

Tableau 1. Maxima des vitesses (en valeur absolue) ainsi que le nombre de Nusselt global à la surface chaude AF= 1, Pr= 0.71, Ra= 2.10⁴

| γ | U_{max} | W_{max} | Nu |
|----------|-----------|-----------|-------|
| 0. | 27.756 | 33.726 | 5.519 |
| 5. | 26.247 | 31.845 | 5.274 |
| 10. | 24.059 | 29.261 | 4.912 |
| 15. | 30.879 | 37.428 | 4.975 |
| 30. | 32.036 | 38.638 | 5.227 |
| 45. | 31.470 | 37.850 | 5.333 |
| 50. | 30.950 | 37.163 | 5.338 |
| 60. | 29.470 | 35.153 | 5.303 |
| 70. | 27.630 | 32.356 | 5.202 |
| 80. | 25.376 | 28.884 | 5.024 |
| 90. | 23.325 | 24.945 | 4.755 |

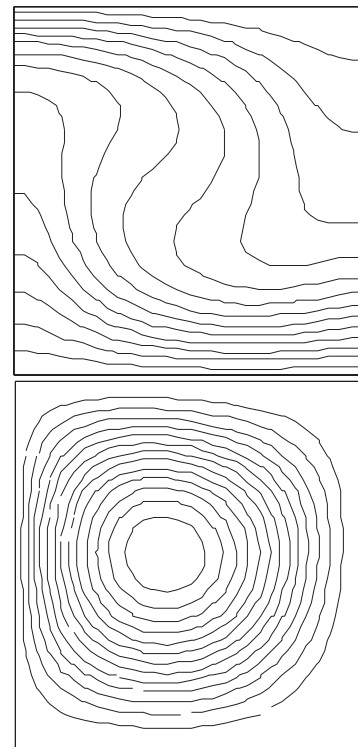


Figure 3. Isothermes et courbes de courant pour AF=1, Ra= 2.10⁴, Pr= 0.71, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison de 5°

Pour un angle d'inclinaison de 30°, le sens de rotation des cellules s'est inversé (Figure 5), mais le transfert de chaleur et les grandeurs dynamiques ont continué à croître (Figure 6).

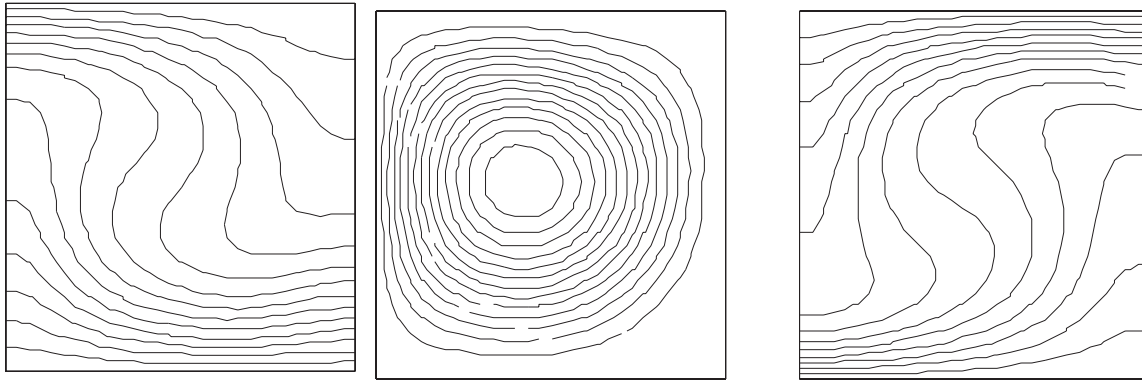


Figure 4. Isothermes et courbes de courant AF=1, Ra= 2.10⁴, Pr= 0.71, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison de 10°

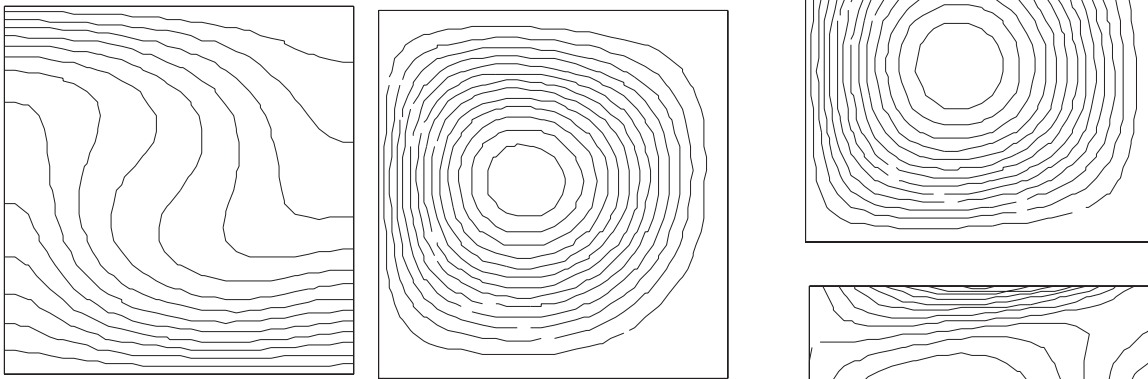


Figure 5. Isothermes et courbes de courant pour AF=1, Ra= 2.10⁴, Pr= 0.71, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison de 15°

À 45° les grandeurs dynamiques baissent mais le nombre de Nusselt continue à croître jusqu'à un angle de 60° (Figures 7 & 8). Au-delà, l'écoulement perd en intensité jusqu'à un angle de 90° (cas d'une cavité différentiellement chauffée).

2. Effet du nombre de Rayleigh (Ra)

En comparant les isothermes de la figure 9 avec ceux de la figure 1, on remarque une distorsion plus marquée des isothermes de la zone centrale. Le fluide plus fortement chauffé tend à monter plus vite vers la surface froide tout en aspirant le fluide se trouvant du côté droit de la cavité et en l'empêchant de descendre le long de la paroi. Ceci se traduit par l'apparition de cette zone de décollement dans le coin inférieur droit de la cavité. En faisant croître davantage le nombre de Rayleigh (Figures 10 et 11) l'écoulement tend à se concentrer de plus en plus près des parois et la zone de non-écoulement, au centre, devient de plus en plus large.

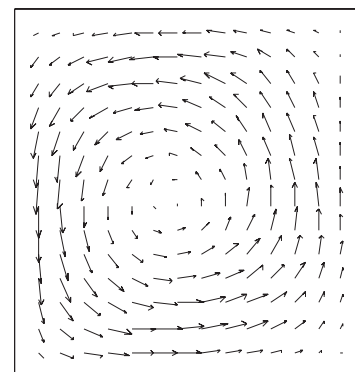
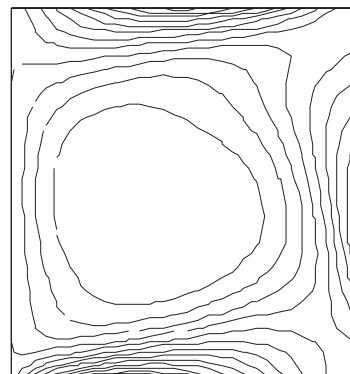
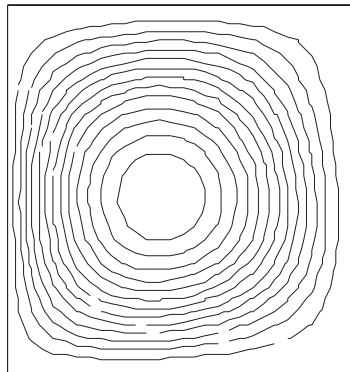


Figure 6. Isothermes, courbes de courant, iso-tourbillons et champ des vitesses pour AF=1, Ra= 2.10⁴, Pr= 0.71, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison de 30°

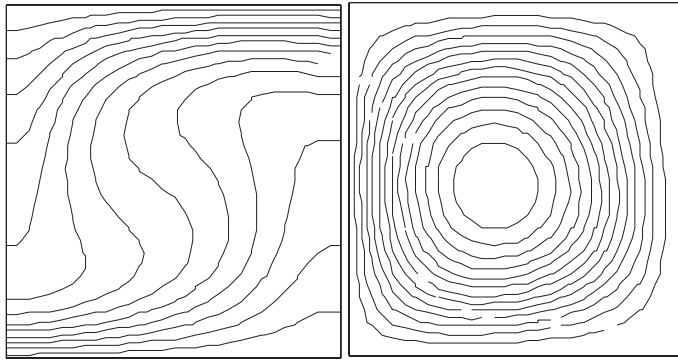


Figure 7. Isothermes et courbes de courant pour $AF=1, Ra=2.10^4, Pr=0.71$, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison de 45°

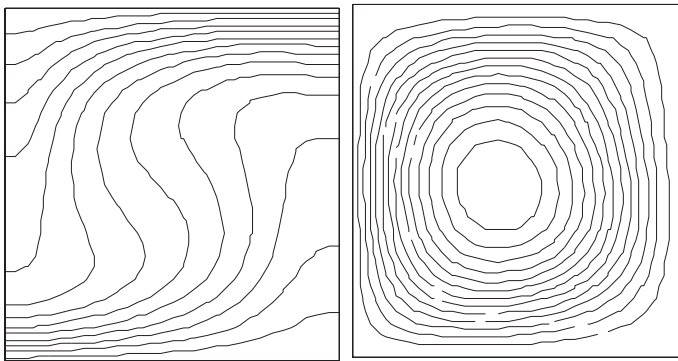


Figure 8. Isothermes et courbes de courant pour $AF=1, Ra=2.10^4, Pr=0.71$, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison de 60°

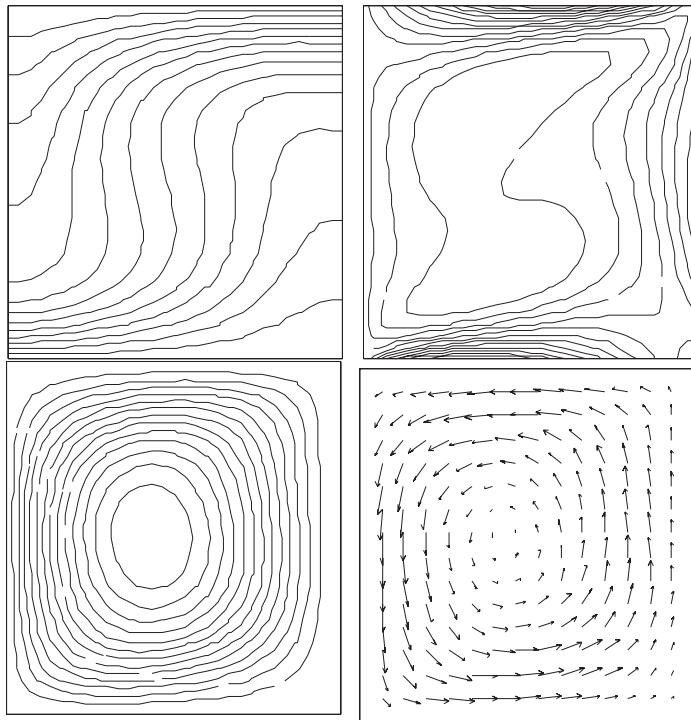


Figure 9. Isothermes, courbes de courant, iso-tourbillons et champ des vitesses pour $AF=1, Ra=2.10^4, Pr=0.71$, parois latérales parfaitement adiabatiques et une inclinaison de 90°

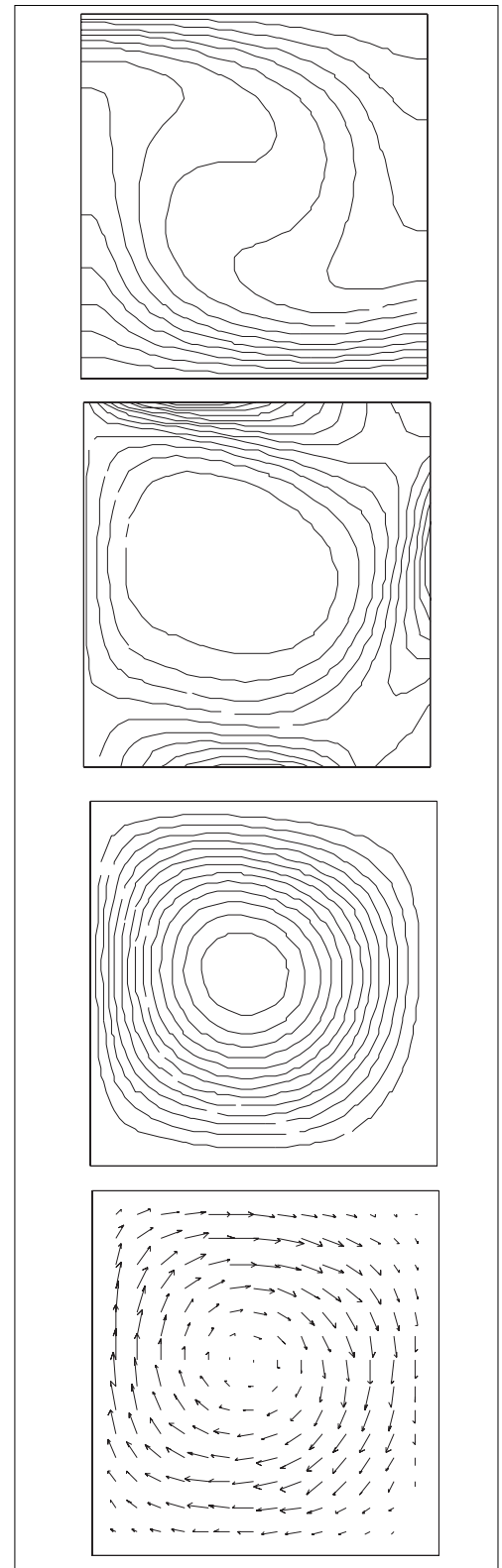


Figure 10. Isothermes, courbes de courants, iso-tourbillons et champ des vitesses pour $AF=1, Ra= 4.10^4, Pr= 0.71$, parois latérales parfaitement adiabatiques

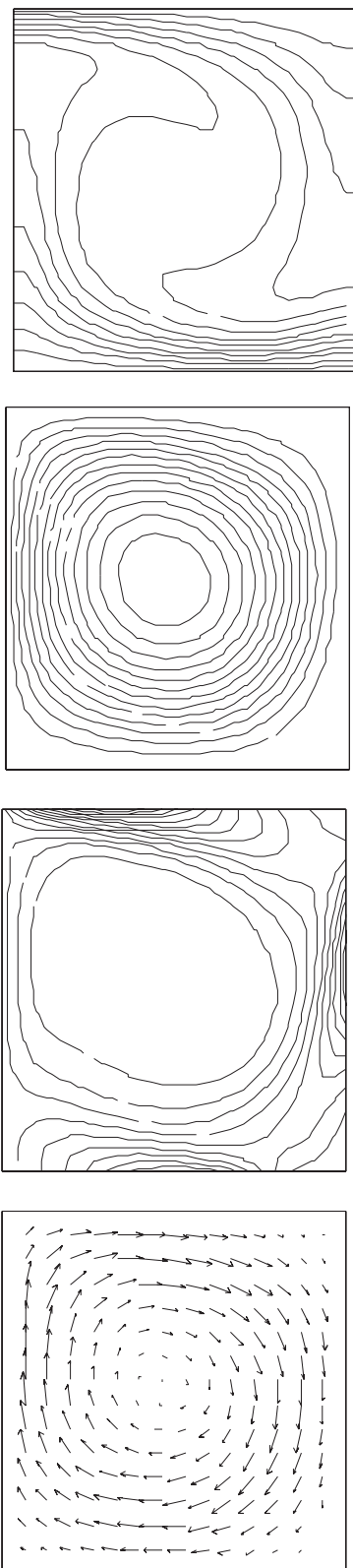


Figure 11. Isothermes, courbes de courants, iso-tourbillons et champ des vitesses pour $AF=1$, $Ra= 10^5$, $Pr= 0.71$, parois latérales parfaitement adiabatiques

CONCLUSION

En conclusion, cette étude a permis la validation d'un code basé sur les différences finies et consacré à la convection naturelle en milieu confiné. Cette validation, faite dans un premier temps sur une géométrie rectangulaire, a montré une bonne concordance avec des résultats publiés par d'autres auteurs (Murty, 1986).

Les effets considérés concernent ceux de l'inclinaison par rapport à l'horizontale et du nombre de Rayleigh. On remarquera en particulier que le nombre de Nusselt diminue avec l'augmentation de l'inclinaison de 0° à 10° puis ce nombre augmente avec l'augmentation de l'angle d'inclinaison jusqu'à $\gamma = 50^\circ$ où il atteint le maximum absolu. Au-delà le nombre de Nusselt diminue jusqu'à atteindre son minimum à $\gamma = 90^\circ$.

RÉFÉRENCES CITÉES

- Charlson G S & Sani R L (1970) Thermoconvective instability in a bounded cylindrical fluid layer, *Int J Heat Mass Transfert* 13: 1479-1496
- Soong CY, Tzeng PY, Chiang DC & Sheu TS (1996) Numerical study on mode-transition of natural convection in differentially heated inclined enclosures, *Int J Heat Mass Transfer* 39 (14): 1869-1882
- Mukotmoni D & Yang KT (1995) Thermal convection in small enclosures: an atypical bifurcation sequence, *Int J Heat Mass Transfer* 38 (1): 113-126
- Murty VD (1986) A numerical investigation of Bénard convection using finite elements, *Comp Fluids* 14: 379-391
- Howle LE (1996) A comparison of the reduced galerkin and pseudo-spectral methods for simulation of steady rayleigh-bénard convection, *Int J Heat Mass Transfer* 39 (11): 2401-2407
- Terhmina O, Mojtabi A & Roux B (1992) A numerical procedure for three-dimensional mixed convection developing flows in an axisymmetric geometry, *Eur J Mech, B/Fluids* 11(1): 21-38