

Régimes thermiques dans les écoulements plastiques de polymères fondus

Kamal GUERAOUI*, Abdallah HAMMOUMI*□ & Gamal ZEGGWAGH*

(Reçu le 28/07/1997 ; Accepté le 16/02/1998)

النظام الحراري داخل جريان غير نيوتوني بالنسبة لـ polymères fondus

الهدف من هذه المساهمة هو إيجاد نموذج تحليلي للنظام الحراري بالنسبة لجريان غير نيوتوني لـ (polymères fondus) . بتطبيق طريقة تحليلية تعتمد على مبدأ الفرق النهائي، نحدد توزيع الحرارة والسرعة بدلالة الزمان و الإحداثية الأفقية. النتائج المحصل عليها في هذا البحث، يمكنها أن تساهم بشكل فعال في فهم هذا النوع من الجريان.

الكلمات المفتاحية : جريان غير نيوتوني - نظام حراري - polymères fondus - سائل كاسون المعمم - قناة أسطوانية

Régimes thermiques dans les écoulements plastiques de polymères fondus

Le but de ce travail est la modélisation numérique du régime thermique dans les écoulements plastiques de polymères fondus. À l'aide d'une méthode numérique itérative aux différences finies, on détermine la vitesse axiale et la température pour chaque section et à chaque instant. Les résultats obtenus, dans cette étude, peuvent contribuer à une meilleure élaboration de ce type d'écoulement.

Mots clé : Écoulements plastiques - Régimes thermiques - Polymères fondus - Fluide de Casson généralisé - Paroi cylindrique

The purpose of this work is the numerical modelisation of the thermal rules in fondus plastic flows of molten polymers

An iterative difference method is used to solve the system of Stokes and energy equations, we determine the axial velocities and the temperature for all sections and at every time. The obtained results can contribute to elaborate more accurate studies on the thermal rules.

Key words : Plastic flows - Thermal rules - Molten polymers - Generalized Casson fluid - Cylindrical pipe

* Groupe de Mécanique des Fluides et des structures , Laboratoire de Mécanique, Faculté des Sciences, Avenue Ibn Batota, BP. 1014, Rabat, Maroc

□ Auteur correspondant

INTRODUCTION

Lors de l'écoulement du polymère fondu dans l'outillage de mise en forme, les phénomènes thermiques sont rendus très spécifiques par conjonction:

- d'une faible conductivité thermique qui nuit au transfert de chaleur de l'outillage vers le polymère,
- d'une forte thermodépendance de la viscosité qui rend sensible la répartition du débit à toute hétérogénéité thermique,
- d'une dégradation du polymère à une température souvent peu supérieure à la température de mise en œuvre.

Certains auteurs (Sudaram & Nath, 1979), résolvent séparément les équations de Stokes et du bilan thermique en cherchant la solution de bilan thermique sous la forme d'une série de fonctions. D'autres (Agur & Vlachopoulos, 1977 ; Agassant *et al.*, 1984), résolvent le système couplé des deux équations précédentes en appliquant la méthode des différences finies.

Dans cette application, on considère l'écoulement non permanent d'un fluide de Casson généralisé en conduite cylindrique pleine de rayon R_0 (en négligeant le poids), modélisant ainsi l'écoulement du polymère fondu.

METHODES

Modèle théorique

1. Mise en équations

Le phénomène étudié est régi par les équations suivantes:

1.1. Équation de conservation de quantité de mouvement

Du fait de la nature et de la géométrie de la conduite (conduite cylindrique rigide et imperméable), le champ des vitesses est choisi de la forme; $\bar{V}(0,0,w(r,t))$ et donc l'équation d'écoulement s'écrit:

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \eta(T) \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad [1]$$

À cette équation, on ajoute les conditions aux limites suivantes:

$$\frac{\partial w}{\partial r}(r=0) \quad w(r=R_0) \quad [2]$$

1.2. Équation de bilan thermique

Le bilan thermique s'écrit sous la forme suivante:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c w \frac{\partial T}{\partial z} = K_1 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{K_1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + K_1 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \eta(T) \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \quad [3]$$

où: ρc est la capacité calorifique volumique, K_1 la conductivité thermique et $\eta(T)$ la viscosité du polymère fondu.

Afin de rendre compte de la nature plastique de l'écoulement du polymère fondu, on adopte la loi de Casson généralisée pour sa modélisation (Hadjasadok *et al.*, 1993 ; Guerraoui, 1995 ; Guerraoui *et al.*, 1996). Or la dépendance de la viscosité avec la température peut être négligée en première approximation (Agur & Vlachopoulos, 1977 ; Agassant *et al.*, 1984), ce qui conduit à:

$$\eta \frac{\partial w}{\partial r} = -\tau_0 + \eta_\alpha \frac{\partial w}{\partial r} + K \frac{\partial w}{\partial r} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^{n-1} \quad \text{pour } \tau < \tau_c$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } \tau \quad [4]$$

À l'équation [3], on ajoute les conditions aux limites ci-après:

$$T(r=R_0, z) = T_p$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(r=0, z=0) \quad [5]$$

où T_p est la température de la paroi.

Méthode de résolution

On adopte, pour la résolution des équations [1] et [2], une méthode numérique aux différences finies (Annexe1).

1. Profil initial

On adopte, comme profil initial, l'écoulement permanent d'un fluide newtonien en conduite cylindrique rigide en équilibre thermique.

* Détermination de la vitesse axiale

Dans ces conditions, l'équation [1] devient :

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \quad [6]$$

où $\frac{dP}{dz}$ est constant.

En intégrant l'équation [6] par rapport à la variable radiale r et en utilisant la condition à la limite

traduisant l'axisymétrie de l'écoulement : $\frac{\partial w}{\partial r} = 0$,

on obtient l'expression suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{r}{2\eta} \frac{\partial P}{\partial z} \quad [7]$$

Une deuxième intégration par rapport à r permet d'obtenir le profil des vitesses axiales w , moyennant la condition d'adhérence à la paroi, $w(R_0)=0$:

$$w(r) = -\frac{R_0^2}{4\eta} \frac{dP}{dz} \left(1 - \left(\frac{r}{R_0} \right)^2 \right) \quad [8]$$

*** Détermination de la température**

En équilibre thermique, $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ et $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$, et par

conséquent l'équation [3] devient :

$$K_1 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{K_1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{r^2}{4\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 = 0 \quad [9]$$

Une première intégration de l'équation [9] donne :

$$rK_1 \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{r^4}{16\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 + cte \quad [10]$$

or : $\frac{\partial T(r=0)}{\partial r} = 0$ donc $cte = 0$

Une deuxième intégration de l'équation [9], en tenant compte de la condition à la limite $T(r=R_0) = T_p$, conduit à :

$$T(r) = T_p + \frac{R_0^4}{64K_1\eta} \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \left(1 - \frac{r^4}{R_0^4} \right) \quad [11]$$

1.1. Test de convergence

Le critère de convergence de la solution porte sur la vitesse axiale. Si m est le nombre de cycles de calcul et ϵ_1 un petit paramètre fixé à l'avance, on impose :

$$1.2. \sup \left| \frac{w_m(r,t) - w_{m+1}(r,t)}{w_{m+1}(r,t)} \right| < \epsilon_1 \quad [12]$$

1.3.Processus de résolution

Les calculs sont amorcés avec la valeur de $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1}$ issue du profil initial. La résolution de l'équation de

conservation de la quantité de mouvement et du bilan thermique permettent d'avoir en toute section et à chaque instant la vitesse axiale et la température.

La grandeur $\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=1}$ est ensuite réestimée, sa valeur corrigée permet de réitérer et ce jusqu'à convergence de la solution.

RESULTATS

La figure de référence est à chaque fois obtenue pour un indice de comportement $n=0.5$, une consistance $K=2500$ Poise, une viscosité newtonienne $\eta_\alpha = 650$ Poise, une capacité calorifique $\rho c = 2 \cdot 10^6$ J/m³ °C, une conductivité thermique $K_1 = 0.2$ W/ m °C, et un rayon de la conduite $R_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ m. Cette analyse est faite en la section $z=L/2$ et à $t=T/2$.

On constate sur les figures 1 et 2, qu'une augmentation de l'indice de comportement, n , qui entraîne une augmentation de la viscosité apparente et donc une augmentation des frottements entre les différentes couches coaxiales, se traduit par une diminution des valeurs de la vitesse axiale et de la température.

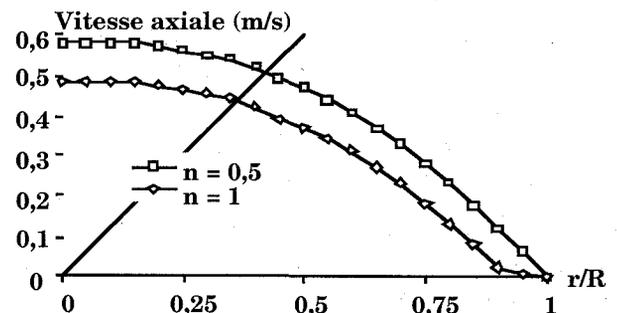


Figure 1. Évolution de la vitesse axiale à $t=T/2$ pour 2 valeurs de l'indice de comportement, n

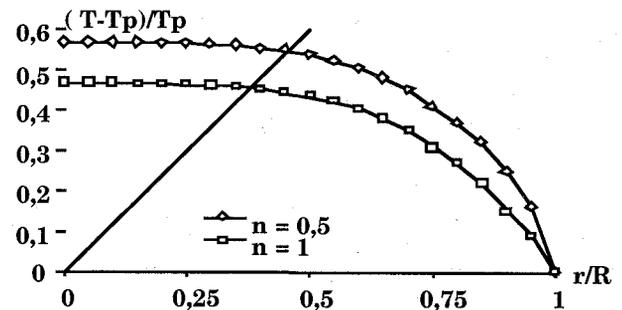


Figure 2. Évolution de la température à $t=T/2$ pour 2 valeurs de l'indice de comportement, n

Les figures 3 et 4 illustrent l'évolution des vitesses axiales et des températures pour deux valeurs de la contrainte seuil $\tau_0=2500$ Poise et $\tau_0=0$. On constate qu'une diminution de τ_0 , qui se traduit par une pseudoplasticité plus marquée, s'accompagne d'une diminution de la viscosité apparente et entraîne une augmentation des valeurs de la vitesse axiale et de la température.

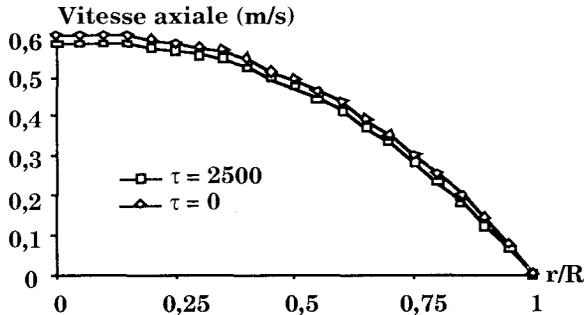


Figure 3. Évolution de la vitesse axiale à $t=T/2$ pour 2 valeurs de la contrainte seuil, τ_0

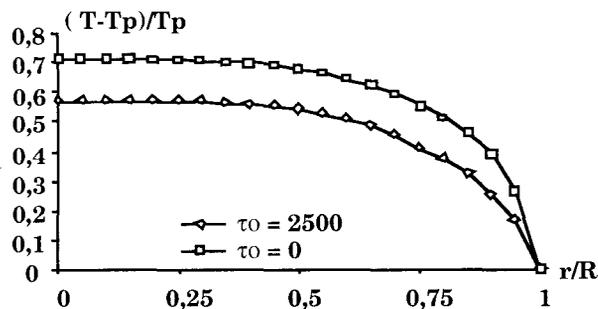


Figure 4. Évolution de la température à $t=T/2$ pour 2 valeurs de la contrainte seuil, τ_0

On remarque sur les figures 5 et 6 qu'une augmentation de la viscosité newtonienne η_α entraîne une augmentation de la vitesse axiale et de la température. Ces résultats sont qualitativement pareils à ceux obtenus par Guerraoui *et al.* (1997).

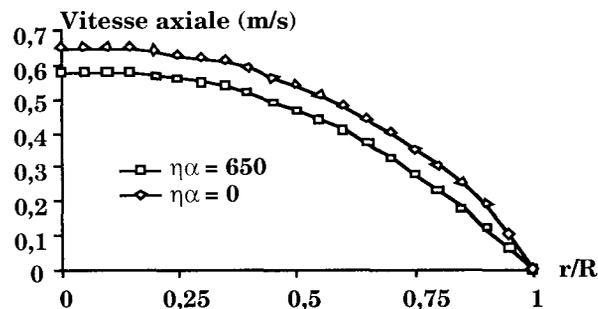


Figure 5. Évolution de la vitesse axiale à $t=T/2$ pour 2 valeurs de la viscosité newtonienne, η_α

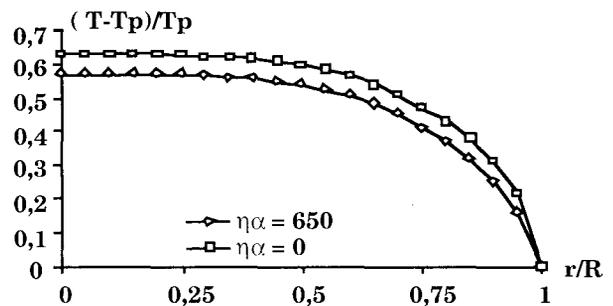


Figure 6. Évolution de la température à $t=T/2$ pour 2 valeurs de la viscosité newtonienne, η_α

CONCLUSION

Cette étude, dont les équations sont le siège de non linéarité due au modèle rhéologique de fluide adopté, a été abordée sous un aspect assez général et nous a permis d'analyser l'influence et l'évolution des phénomènes liés à l'indice de comportement, n , à la contrainte seuil, τ_0 , et à la viscosité newtonienne, η_α . Ces résultats montrent l'importance de la nature de fluide et devraient contribuer à une meilleure connaissance des processus intervenant dans les écoulements de polymères fondus et, par conséquent, à des applications industrielles.

RÉFÉRENCES CITÉES

- Hadjsadok A., Benhadid S., Wang X., Lucius M. & Soltz J. F. (1993) Viscosimètre de couette: détermination du taux de cisaillement à partir des modèles de Casson et de Casson généralisé, *1er Congrès de Mécanique, E.N.I.M. Rabat, Maroc, T2 :309-317*
- Gueraoui K., Hammoumi A., Kerroum M. & Zeggwagh G. (1997) Modélisation théorique d'écoulements de fluides inélastiques en conduites élastiques poreuses et isotropes, *Journal of Hydraulic Research (Netherlands)*, Vol. 35(3) :301-322
- Gueraoui K., Hammoumi A. & Zeggwagh G. (1996) Ecoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites déformables poreuses et anisotropes, *C.R.Acad. Sci. Paris*, t.323, Série Iib : 825-832
- Sudaram K.M. et Nath G. (1979) *Proc. Indian Acad. Sci.*, 83A, 50
- Agur E.E. et Vlachopoulos J. (1977) 35 th Antec., Montreal
- Agassant J. F., Saillard P. et Vernes B. (1984) Etude des régimes thermiques dans les écoulements de polymères fondus. Application aux filières d'extrusion de plaques, *Revue générale de thermique*, (272-273): 477-488

Nougier J. P. (1989) Méthodes de calcul numérique, Masson, 3ème édition, Paris

Guerraoui K. (1995) Ecoulements pulsés de fluides inélastiques en conduites déformables poreuses et anisotropes, Thèse de Doctorat de 3° cycle, Rabat.

Annex1: Méthode de résolution

1. Détermination de la vitesse axiale

La discrétisation de l'équation [1] conduit à l'équation algébrique suivante :

$$A w(i-1, k+1) + B w(i, k+1) + C w(i+1, k+1) = D \quad [A1]$$

où :

$$A = \frac{\Delta t}{\rho \Delta r} \left[\frac{1}{2r(i)} (\eta_\alpha + Kf(i, k+1)) - \frac{1}{\Delta r} (\eta_\alpha + nKf(i, k+1)) \right]$$

$$B = 1 + \frac{2\Delta t}{\rho \Delta r^2} (\eta_\alpha + nKf(i, k+1))$$

$$C = -\frac{\Delta t}{\rho \Delta r} \left[\frac{1}{2r(i)} (\eta_\alpha + Kf(i, k+1)) + \frac{1}{\Delta r} (\eta_\alpha + nKf(i, k+1)) \right]$$

$$D = w(i, k) - \frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\tau_0}{r(i)} \right]$$

$$f(i, k+1) = \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{i, k+1}^{n-1}$$

L'équation [A1] est résolue à l'aide de la méthode de double balayage de Choleski (Nougier, 1989).

2. Détermination de la température

On discrétise l'équation [3] à l'aide d'une méthode aux différences finies de type directions alternées, on aura alors :

pour le premier demi pas de temps

- pour $r = 0$

$$A_{21} T_{i-1, j, k + \frac{1}{2}} + B_{21} T_{i, j, k + \frac{1}{2}} + C_{21} T_{i+1, j, k + \frac{1}{2}} = H_{21} \quad [A2]$$

où :

$$A_{21} = \frac{\Delta t K_1}{2\rho c \Delta r} \left[\frac{1}{2r(i)} - \frac{1}{\Delta r} \right]$$

$$B_{21} = 1 + \frac{\Delta t K_1}{\rho c \Delta r^2}$$

$$C_{21} = -\frac{\Delta t K_1}{2\rho c \Delta r^2} \left[\frac{1}{2r(i)} - \frac{1}{\Delta r} \right]$$

$$H_{21} = T(i, j, k) + \frac{\Delta t}{2\rho c} \left[K_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right)_{i, j, k} - \rho c w_{i, k} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{i, j, k} + N(i, k) \right]$$

$$N(i, k) = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{i, k} \left[-\tau_0 + \eta_\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{i, k} + Kf_{i, k+1} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{i, k} \right]$$

pour $r=0$

$$T\left(1, j, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{1 - \frac{\Delta t k_1}{\rho c \Delta r^2}} \left\{ T(1, j, k) + \frac{\Delta t}{2\rho c} \left[k_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) (1, j, k) + \frac{2k_1}{\Delta r^2} \left(T\left(3, j, k + \frac{1}{2}\right) - 2T\left(2, j, k + \frac{1}{2}\right) \right) \right] \right. \\ \left. - \rho c w(1, k) \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) (1, j, k) \right\} \quad [A3]$$

L'équation [A2] est résolue à l'aide de la méthode de double balayage de Choleski (Nougier, 1989).

2.2. Pour le deuxième demi pas de temps

* pour $r = 0$

$$A_3 T_{i,j-1,k+1} + B_1 T_{i,j,k+1} + C_1 T_{i,j+1,k+1} = H_1 \quad [A4]$$

où :

$$A_1 = -\frac{\Delta t w(i, k+1)}{4\Delta z} - \frac{\Delta t K_1}{2\rho c \Delta z^2}$$

$$B_1 = 1 + \frac{\Delta t K_1}{\rho c \Delta z^2}$$

$$C_1 = -\frac{\Delta t w(i, k+1)}{4\Delta z} - \frac{\Delta t K_1}{2\rho c \Delta z^2}$$

$$H_1 = T\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2\rho c} \left[K_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \frac{K_1}{r(i)} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{i,j,k+\frac{1}{2}} + \left(\frac{M(i, k) + M(i, k+1)}{2} \right) \right]$$

$$M(i, k) = \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{i,k} \left[-\tau_0 + \eta_\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{i,k} + K f_{i,k} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)_{i,k} \right]$$

* pour $r = 0$

$$A_3 T_{1,j-1,k+1} + B_3 T_{1,j,k+1} + C_3 T_{1,j+1,k+1} = H_3 \quad [A5]$$

où :

$$A_3 = -\frac{\Delta t w(1, k+1)}{4\Delta z} - \frac{\Delta t K_1}{2\rho c \Delta z^2}$$

$$B_3 = 1 + \frac{\Delta t K_1}{\rho c \Delta z^2}$$

$$C_3 = -\frac{\Delta t w(1, k+1)}{4\Delta z} - \frac{\Delta t K_1}{2\rho c \Delta z^2}$$

$$H_3 = T\left(1, j, k + \frac{1}{2}\right) + \frac{\Delta t}{2\rho c} K_1 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right)_{1,j,k+\frac{1}{2}}$$

Les équations [A4] et [A5] sont résolues à l'aide de la méthode de double balayage de Choleski (Nougier, 1989). Aux équations [A2], [A3], [A4] et [A5], on ajoute la condition d'entrée :

$$T(i, 1, k+1) = T_0 \quad [A6]$$

et la condition à la paroi :

$$T(i_{\max}, j, k+1) = T_p \quad [A7]$$

où T_0 est la température initiale et T_p la température de la paroi.