

MODELIZACIÓN EN EL AULA DE INGENIERÍA: UN ESTUDIO DE CASO EN EL MARCO DE UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Rubí López, Marta Molina y Enrique Castro

Presentamos un estudio de caso que se enmarca dentro de un experimento de enseñanza dirigido a analizar la implementación de la modelización matemática en un aula de ingeniería. Analizamos cómo una estudiante se apropia del proceso de modelización a lo largo de varias sesiones. Se detecta una concepción no unidireccional del proceso de modelización, con riqueza de interacción entre sus fases y omisión de acciones claves en la matematización y desmatematización del problema. Este estudio aporta información detallada de utilidad para la implementación de la modelización en el aula.

Términos clave: Estudio de caso; Experimentos de enseñanza; Ingeniería; Modelización matemática; Resolución de problemas

Modeling in an Engineering Classroom: A Case Study Within a Teaching Experiment

We describe a case study framed within a teaching experiment aimed to analyze the implementation of mathematical modeling in an engineering classroom. We analyze how a student implements the process of modeling along several sessions. We detect a non-unidirectional conception of the modeling process, with a rich interaction among its phases and lack of some key actions in the mathematization and des-mathematization of the problem. This study provides detailed information of use for the implementation of modeling in the classroom.

Keywords: Case study; Engineering; Mathematical modeling; Problem solving; Teaching experiments

La modelización matemática tiene una larga historia que conecta con el origen de las matemáticas, sin embargo, no es este el caso de su consideración en los planes de formación (White, 2000). Es a finales del siglo XX cuando comienza a

López, R., Molina, M. y Castro, E. (2017). Modelización en el aula de ingeniería: un estudio de caso en el marco de un experimento de enseñanza. *PNA*, 11(2), 75-96.

atenderse a este tipo de actividad creativa en la educación matemática siendo destacada por su potencial para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Blum y Niss, 1991; Haines y Crouch, 2010; Lesh y Doerr, 2003). Se señala su utilidad para promover la adquisición de conocimientos matemáticos, la comprensión profunda de los mismos y la habilidad de utilizar esos conocimientos para la resolución de problemas reales o cuasi-reales. Los citados autores también destacan su efecto motivador y de mejora en las actitudes de los estudiantes hacia las Matemáticas. Adicionalmente se le reconoce potencial como estrategia metodológica para romper con la atomización del currículo (Aravena, Caamaño y Giménez, 2008).

El actual interés por la incorporación de la modelización a la práctica escolar radica, principalmente, en el creciente reconocimiento de la importancia del uso de las Matemáticas en la ciencia, tecnología y en la vida cotidiana, junto con la percepción de falta de vinculación y de transferencia del conocimiento matemático adquirido en la escuela a situaciones profesionales o cotidianas susceptibles de su uso (Bosch, García, Gascón y Ruiz, 2006; Kaiser, 2010). Existe la percepción general de que la escuela proporciona a los estudiantes herramientas matemáticas, pero no los prepara de manera adecuada para el uso de las mismas fuera del ambiente del aula. Pese al alto grado de intersección entre las matemáticas aprendidas en el colegio y las que se utilizan en ambientes reales de resolución de problemas, al presentarse las matemáticas de una forma más compleja, situada y multidisciplinar los usuarios presentan dificultades para reconocer las relaciones existentes (Lesh y Zawojewski, 2007). Esta percepción, entre otras razones, ha conducido a destacar la capacidad de resolver problemas del mundo real a partir de su traducción al mundo matemático, como un objetivo último y prioritario de la educación matemática escolar a nivel internacional (Organization for Economic Co-operation and Development [OECD], 2003; Rico, 2007).

En el campo de la ingeniería, al ser esta una disciplina de matemáticas aplicadas, el proceso de modelización encaja perfectamente como estrategia de enseñanza-aprendizaje y, por ende, se convierte en un tópico de interés para la investigación educativa. En este contexto, nos planteamos analizar la puesta en práctica de la modelización, implementada con el apoyo de un software que ayuda a disminuir la carga cognitiva del trabajo de manipulación de las expresiones simbólicas implicadas y de representación gráfica. Con este objetivo, diseñamos e implementamos un experimento de enseñanza con un grupo de estudiantes de recién ingreso en titulaciones de diferentes especialidades de ingeniería, noveles en cuanto al uso de la modelización. Como primer acercamiento al problema de investigación planteado y ante la ingente cantidad de datos recogidos, realizamos el estudio de caso que aquí presentamos. Con este estudio de caso buscamos analizar como una estudiante se apropia del proceso de modelización, a lo largo de su implementación en varias sesiones, con el interés doble de identificar elementos clave que guíen el análisis retrospectivo de los datos en el experimento de

enseñanza y obtener información de utilidad práctica para facilitar la integración y puesta en práctica de esta metodología por los docentes.

Los antecedentes sobre la implementación de la modelización en el aula informan en particular sobre las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes que abordan por primera vez este tipo de actividad. Sintetizando estudios previos, Crouch y Haines (2007) señalan que los estudiantes novatos no dedican suficiente tiempo al análisis del problema o haciendo una representación adecuada de la situación del problema, a menudo no identifican qué aspectos del problema son relevantes para el modelo y tienden a utilizar procesos de modelización más lineales que circulares. Muestran dificultades reconociendo qué tipo de modelo necesitan y accediendo a los conceptos y procedimientos adecuados para encontrar la solución. Además, olvidan conectar la solución obtenida a partir del modelo, a la situación del mundo real. Doerr (2007), por su parte, indica la tendencia de los estudiantes a volver al problema real y a las suposiciones realizadas cuando trabajan en diferentes etapas del proceso de modelización, lo cual aumenta la demanda cognitiva de la tarea al requerir la consideración simultánea de la situación real y del modelo.

Partiendo de estos resultados de estudios previos nos cuestionamos sobre la evolución en el uso del proceso de modelización por parte de una estudiante de recién ingreso a la universidad, con buen rendimiento en el área de matemáticas, novel en cuanto al uso de la modelización. Analizamos esta evolución atendiendo a su seguimiento de las fases que constituyen el proceso de modelización, las acciones ejecutadas en cada fase y la distribución de tiempos. A continuación, antes de presentar el estudio de caso, concretamos nuestra forma de concebir la modelización matemática para implementarla en el aula y las características generales del experimento de enseñanza realizado.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

El término modelización matemática no tiene un significado único (Galbraith y Stillman, 2006), no obstante, la mayoría de los autores coinciden en identificarlo con un proceso que utiliza conceptos y técnicas, esencialmente matemáticas, para el análisis de situaciones reales (Castro y Castro, 1997; Galbraith y Stillman, 2006; García y Ortiz, 2007; Lesh y Doerr, 2003). Así mismo, reconocen como componentes esenciales la formulación, la solución, la interpretación y la evaluación de un modelo matemático. Un modelo es la representación de la estructura de un sistema dado; es un sistema conceptual que se expresa utilizando representaciones externas y que sirve para describir, explicar o predecir el comportamiento de otro sistema con algún propósito específico (Lesh y Doerr, 2003).

En este trabajo asumimos la definición de modelización matemática dada por García y Ortiz (2007). Estos autores consideran que se trata de un proceso que se inicia con un problema del mundo real, que requiere de simplificación para, me-

diante la abstracción, elaborar un modelo matemático que permita plantear interrogantes sobre el problema y darles respuesta con herramientas matemáticas, Posteriormente se pasa al análisis de los resultados y su contrastación con el problema del mundo real.

Consideramos, por tanto, la modelización como un tipo de resolución de problemas en el que destacamos varias características: los problemas que se consideran son reales o cuasi-reales, por tanto, se requiere de cierta simplificación para poder abordar la resolución o búsqueda de respuestas y existen diferentes aproximaciones (y respuestas) al mismo. Según las restricciones impuestas para esta simplificación, las preguntas a resolver varían. Por este motivo, la modelización puede conducir a procesos cíclicos en los que, tras analizar los resultados obtenidos y contrastarlos con el problema del mundo real, se modifican las restricciones o asunciones impuestas, iniciándose un nuevo proceso de elaboración de un modelo matemático y búsqueda de nuevas respuestas.

LA MODELIZACIÓN EN EL AULA

En la actualidad, un número creciente de investigadores enfocan sus esfuerzos de investigación en la implementación de la modelización matemática a nivel escolar, considerándola bien como un vehículo para el aprendizaje de contenidos matemáticos (o científicos) o como un contenido curricular más. Esta doble visión de la modelización es análoga a la ya planteada para la resolución de problemas en 1989 por Stanic y Kilpatrick. En el primer caso la modelización se considera como una estrategia didáctica para abordar el aprendizaje de conceptos matemáticos particulares. En el segundo caso se destaca su potencialidad como proceso que permite describir, analizar y ampliar la comprensión de situaciones de la vida diaria por medio del uso de las matemáticas (Blomhoj, 2004). La modelización enriquece la comprensión de fenómenos extra matemáticos al proporcionar diversas representaciones de dichos fenómenos y darles sentido a las diferentes actividades matemáticas (Molyneux-Hodgson, Rojano, Sutherland y Ursini, 1999).

Blum y Borromeo-Ferri (2009), entre otros, afirman que, con una adecuada orientación y buenas bases, los estudiantes pueden aprender modelización matemática y, a través del proceso, aprender matemáticas y tomar mayor conciencia de la importancia de los temas de las matemáticas escolares.

Los diferentes enfoques de aula pueden ser muy diferentes en el objetivo y en la implementación. El uso de representaciones diagramáticas es frecuente para su descripción y guiar su puesta en práctica en el aula. Estas representaciones sirven de andamiaje al alumno para poder abordar la resolución de un problema que a priori puede no resultarle accesible en su planteamiento general. Reducen la carga cognitiva de la tarea al estructurar la resolución del problema y permitir al estudiante focalizar su atención, en cada fase, en parte de las acciones que

componen el proceso de modelización (Galbraith, 2012). Muchas de las diferentes representaciones que se encuentran en la literatura pueden ser reconocidas como descendientes del diagrama de siete fases de la Open University (Galbraith y Clatworthy, 1990) el cual recogemos en la figura 1. Este esquema ha sido testado por sus autores constatando su utilidad para el desarrollo de las habilidades de modelización de estudiantes con habilidades y niveles de rendimiento dispares.

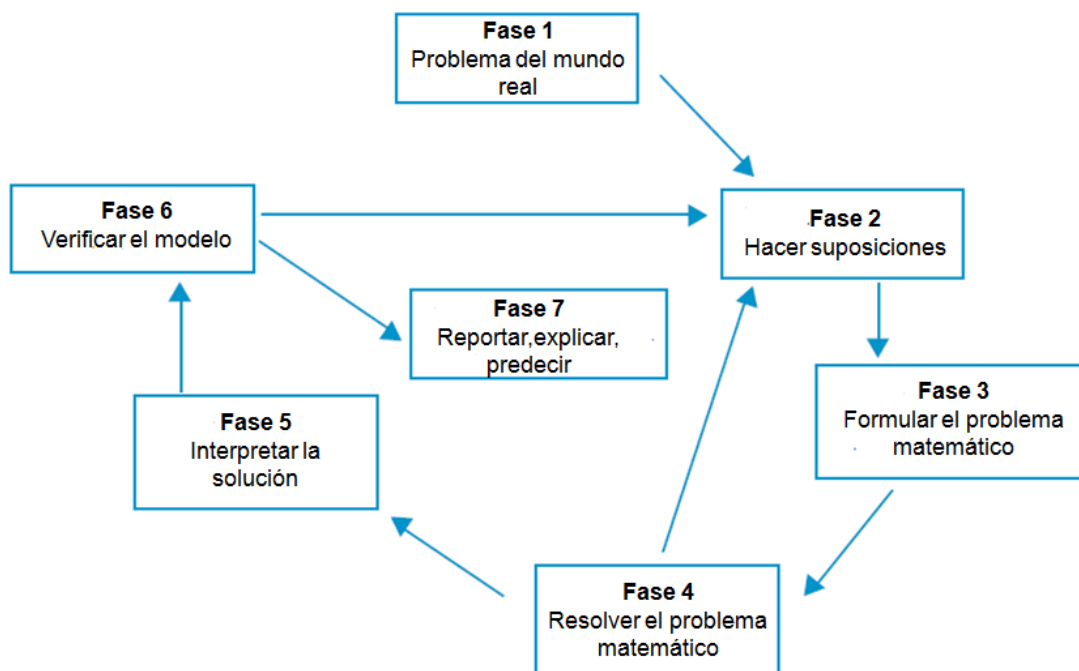


Figura 1. Proceso de modelización

Si bien existen otras representaciones diagramáticas del proceso de modelización (Perrenety y Zwaneveld, 2012), la mayoría tienen en común que ilustran etapas clave en un proceso, potencialmente iterativo, que inicia con un problema del mundo real y finaliza con el reporte de una solución satisfactoria, o bien con la decisión de revisar el modelo para lograr un mejor resultado (Galbraith y Stillman, 2006).

METODOLOGÍA

El estudio de caso que presentamos se realiza en el marco de un experimento de enseñanza con características propias de la investigación de diseño, siendo este un paradigma metodológico de destacada relevancia en la investigación educativa que engloba metodologías sensibles a la complejidad de los contextos de enseñanza y aprendizaje (Van den Akker, Gravemeijer, McKenney y Nieveen, 2006). Este tipo de estudios persigue comprender y mejorar la realidad educativa a través del desarrollo y análisis paralelo de un diseño instruccional específico.

Al mismo tiempo que se estudia el proceso de aprendizaje, se analizan los modos mediante los cuales este se sustenta y se organiza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011), de este modo se obtiene información empíricamente fundamentada de utilidad para la práctica docente.

En estas investigaciones se genera una gran cantidad de información, lo que requiere posteriormente el esfuerzo de los investigadores para discriminar la información relevante de la irrelevante (Hjalmarson y Lesh, 2008). Es por ese motivo que, como primer acercamiento al problema de investigación, realizamos un estudio de caso.

El experimento de enseñanza realizado consta de cuatro ciclos de diseño/rediseño de la intervención en el aula, implementación en el aula y recogida de datos, y análisis de datos (ver figura 2). Estos ciclos se implementaron durante cinco sesiones de trabajo en el aula centradas en el uso del proceso de modelización con apoyo del software Maple para resolver problemas de optimización. Maple es un sistema de manipulación simbólica, también conocido como un *computer algebra system* (CAS), es decir, un software que ejecuta cálculo simbólico y permite definir, combinar, transformar, comparar, visualizar y manipular funciones en cualquiera de sus formas tradicionales de representación (Balacheff y Kaput, 1996). El CAS seleccionado para este trabajo muestra no solo el resultado sino también los desarrollos intermedios de las operaciones realizadas. Su uso persigue reducir la carga cognitiva de la tarea permitiendo al estudiante atender al proceso de modelización y, en particular, a la relación entre el modelo matemático y la situación problemática planteada.

Como es propio de los experimentos de enseñanza, el diseño a priori planificado para implementar en cada una de las sesiones, se refinó y adaptó en función de los datos recogidos en las sesiones previas y de los objetivos de investigación y de enseñanza definidos a priori¹. Dado el papel destacado de Maple en la experiencia de aula, dichas cinco sesiones estuvieron precedidas de una sesión dedicada al entrenamiento en el uso de este software.

¹ Ver Molina et al. (2011) para una descripción completa de esta metodología.

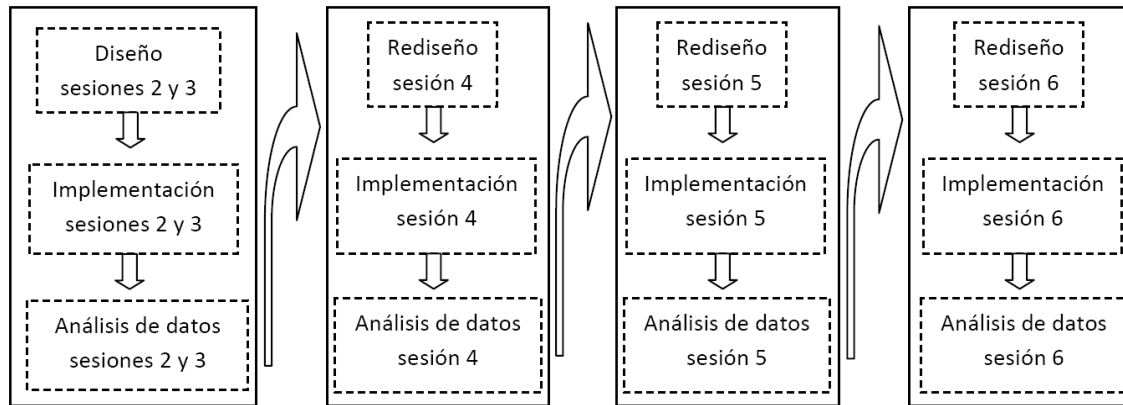


Figura 2. Esquema de los cuatro ciclos que componen el experimento de enseñanza

Los sujetos participantes fueron 30 estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Yucatán en Mérida (México). Esta muestra fue elegida de manera intencional por ser estudiantes de nuevo ingreso en titulaciones de ingeniería y por su disponibilidad a participar en la investigación. El grupo distribuido en cuatro especialidades: civil, física, mecatrónica y energías renovables, estaba inscrito en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I, en el marco de la cual se realizó este estudio. El desarrollo de las sesiones estuvo guiado por una de las investigadoras, en adelante investigadora-docente, contando con la asistencia del profesor de la asignatura, de un profesor observador y de otra persona encargada de grabar en video las sesiones en el aula. Las herramientas utilizadas para la recogida de datos fueron: cuadernos de trabajo de los estudiantes en formato electrónico y en formato impreso, grabaciones de vídeo de las sesiones de aula, grabaciones del trabajo de cada alumno en el ordenador, las hojas de observación del profesor observador, y notas de la investigadora-docente registradas al acabar las sesiones.

El proceso de modelización

Se plantearon a los estudiantes problemas resolubles mediante procesos de optimización, diseñados por el equipo investigador. Se eligió este tipo de problemas porque el estudio de situaciones que requieren optimizar la utilización de recursos (ej., costo, tiempo o cantidad de material) es frecuente en la actividad profesional de los ingenieros y porque los estudiantes disponían de los conocimientos matemáticos necesarios para abordar este tipo de tareas. Nuestro interés era focalizar la atención en el proceso de modelización.

Se trabajaron cuatro problemas planteados como problemas de la vida real próximos a la realidad de los estudiantes involucrados en la experiencia (por ejemplo, la problemática del abastecimiento de agua y el uso de cenotes para este fin) y a su futura actividad profesional. Uno de los problemas se trabajó en las dos primeras sesiones (sesiones 2 y 3) y los demás cada uno en una sesión. Los

dos primeros problemas involucraron el concepto de rutas y, los otros dos, los conceptos de área y volumen. Los problemas propuestos en las sesiones 2, 3 y 5 requerían optimizar una variable geométrica (longitudes y superficies). En las sesiones 4 y 6 aumentamos la dificultad de los problemas a resolver, respecto de la sesión previa, incluyendo el proceso de ponderación de variables. Se eligió el costo como variable de ponderación, por lo que la función que define el modelo a optimizar queda en términos geométricos y de costos.

Para el diseño instruccional nos basamos en el proceso de modelización de Galbraith y Clatworthy (1990). Aplicamos este proceso siguiendo el enfoque estructurado definido por Galbraith (1989) lo que implica principalmente que el docente ejerce un control considerable sobre el modelo matemático elegido en la fase 3 y se implementan todas las fases del proceso de modelización. Para la puesta en práctica del proceso de modelización como metodología docente, dividimos cada fase en acciones concretas a realizar, las cuales presentamos en la tabla 1.

Tabla 1

Fases y acciones del proceso de modelización

Fase	Acciones
Fase 1. Problema del mundo real	Leer y comprender el problema Identificar las palabras clave Hacer un dibujo esquemático del problema Replantear el problema con palabras propias Identificar las unidades en las que debe expresarse la solución
Fase 2. Hacer suposiciones y definir las variables	Identificar y definir las variables Hacer las suposiciones necesarias para abordar el problema matemáticamente
Fase 3. Formular el problema matemático	Formular el modelo que permite dar respuesta al problema
Fase 4. Resolver el problema matemático	Calcular la derivada Determinar los números críticos Verificar los extremos Identificar los valores que resuelven el problema

Tabla 1

Fases y acciones del proceso de modelización

Fase	Acciones
Fase 5. Interpretar la solución	Representar e interpretar gráfica y analíticamente la solución obtenida
	Relacionar la solución gráfica y simbólica del problema
Fase 6. Verificar la solución	Verificar que la solución cumple las condiciones iniciales
	Identificar limitaciones del modelo o de la solución obtenida
Fase 7. Reportar y explicar la solución	Elaborar un informe de la solución encontrada

Diseño e implementación del experimento de enseñanza

Las sesiones se realizaron en el horario de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I que incluye en el temario la resolución de problemas de optimización. Durante cada sesión de resolución de problemas, de dos horas de duración, los estudiantes trabajaron de forma individual con un ordenador, utilizando el software Maple, y siguiendo el proceso de modelización para resolver el problema de optimización correspondiente a dicha sesión. Como guía disponían de un cuaderno de trabajo suministrado tanto en formato impreso como electrónico en el que se presentaba el problema a resolver y los pasos a seguir en el proceso de modelización. Estos pasos se corresponden con las acciones presentadas en la tabla 1, obviando las relativas a la resolución matemática del problema. La estructura de dichos cuadernos fue ligeramente modificada de unas sesiones a otras tras el análisis del trabajo realizado por los estudiantes, como detallamos más adelante.

Dado que los estudiantes se enfrentaban por vez primera al proceso de modelización como estrategia didáctica, la primera aplicación del proceso de modelización (iniciada en la sesión 2 y finalizada en la sesión 3) se desarrolló guiada de cerca por la investigadora-docente. El proceso seguido consistió en ir solicitando a los estudiantes la ejecución de las acciones de una en una, realizándose una puesta en común al final de cada acción con el objetivo de comparar la actividad realizada por los estudiantes, resolver las dudas planteadas y acordar una respuesta antes de pasar a la siguiente acción. En la sesión 2 se trabajaron las cinco primeras fases, continuándose con el proceso en la sesión 3. Por tanto, en la sesión 3 se distinguen dos partes: la retroalimentación del trabajo en la sesión previa y la continuación del mismo incluyendo una redefinición del problema considerando los ángulos reales entre las poblaciones referidas en el problema (en se-

sión previa por iniciativa de la investigadora-docente se habían considerado como ángulos rectos).

La intervención de la investigadora-docente fue disminuyendo de manera paulatina en las sucesivas sesiones. En la segunda parte de la sesión 3 y en la sesión 4 se realizaron puestas en común al finalizar cada una de las cuatro primeras fases. En la sesión 5 se atendieron en voz alta las consultas realizadas por los estudiantes las cuales provocaron la puesta en común de las siguientes acciones correspondientes a las tres primeras fases: replantear el problema (fase 1), identificar las unidades de la solución (fase 1), identificar y definir variables (fase 2) y formular el problema (fase 3). En la última sesión se pidió a los estudiantes que trabajaran de forma autónoma, limitándose la intervención de la investigadora-docente a la resolución de dudas de manera individual. En todas las sesiones se destacó la importancia de realizar el informe (fase 7) como un reporte profesional, indicándose que este sería tenido en cuenta en la evaluación de la asignatura. De este modo enfatizamos la necesidad de recoger por escrito las acciones y decisiones tomadas a lo largo del proceso de modelización.

Como es propio de la metodología utilizada, a la vista de lo ocurrido en la sesión previa realizamos modificaciones en el diseño inicial de cada sesión, buscando subsanar dificultades y dar respuesta a los objetivos de la investigación. Detallamos a continuación brevemente dichas modificaciones. Tras las sesiones 2 y 3, al analizar los informes producidos por los estudiantes en la fase 7 del proceso de modelización y observar una gran falta de detalle y estructura en los mismos, tomamos la decisión de especificar en los cuadernos de trabajo de las siguientes sesiones y oralmente en el aula, los elementos que debería incluir el informe: resumen descriptivo del procedimiento seguido desde la lectura del problema hasta su resolución, limitaciones, validez y significado de la solución encontrada, dificultades que surgieron en el proceso de resolución y cómo se abordaron. Los resultados de las sesiones 3 y 4 nos permitieron observar que los estudiantes elaboraban la gráfica del modelo matemático, pero no interpretaban gráficamente la solución. Por ese motivo para la sesión 5 decidimos especificar en el cuaderno la necesidad de describir el uso hecho de los gráficos y la interpretación de la solución gráfica.

EL CASO DE JULIA

En este artículo presentamos un estudio de caso, entendiendo este como un estudio de la particularidad y la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias concretas y según al objetivo fundamental que persigue (Stake, 1999). En términos de Stake, identificamos el estudio como instrumental debido a que se analiza el caso de un alumno para profundizar en un tema.

Dada la ingente cantidad de información que se genera en los experimentos de enseñanza, un estudio de caso resulta pertinente para poder extraer mayor detalle de la información recogida y cuestiones o incluso hipótesis que guíen el análisis global de los datos. Concretamente analizamos cómo el proceso de modelización con el uso de Maple es desarrollado por una estudiante a lo largo de las diferentes sesiones del experimento de enseñanza atendiendo a las acciones que realiza en cada fase, la secuenciación de las mismas y la distribución de tiempos en el proceso de modelización.

Con el objetivo de centrar la atención en el proceso de modelización seleccionamos una estudiante, a la que denominamos con el seudónimo de Julia, de rendimiento alto en matemáticas en sus estudios pre-universitarios y en la asignatura en la que se enmarca la recogida de datos de esta investigación, que contaba con conocimientos previos del tema de resolución de problemas de optimización y con alguna experiencia previa en el uso de CAS.

ANÁLISIS DE LOS DATOS Y RESULTADOS

Presentamos el análisis de la actuación de Julia a lo largo de las sesiones y los resultados del mismo en tres apartados: seguimiento del proceso de modelización, acciones ejecutadas en cada fase y distribución de tiempos. Previamente es pertinente mencionar que Julia trabajó en todo momento con Maple. En la fase 1 lo utiliza para elaborar sus dibujos esquemáticos, en la fase 3 para la formulación de su modelo matemático, en la fase 4 para el cálculo de derivadas, resolución de ecuaciones y evaluación de funciones, y en la fase 5 para generar la gráfica del modelo matemático. En el resto de fases su uso se limita al de procesador de textos. El programa le permite utilizar, de forma combinada varios tipos de representaciones: dibujos esquemáticos, expresiones simbólicas y gráficas y lenguaje verbal.

Seguimiento del proceso de modelización

En la figura 4 presentamos cuatro esquemas que permiten hacer un primer análisis del seguimiento del proceso de modelización por parte de Julia en las diferentes sesiones. Se observa que en estas cuatro sesiones Julia ejecuta acciones de las diferentes fases que componen el proceso de modelización, con la excepción de la fase 6 que corresponde a la verificación del modelo. En las sesiones 2 y 5 por limitaciones de tiempo, Julia pasa directamente de la fase 5 a la 7, en otras palabras, pasa a la elaboración del reporte después de la interpretación de la solución, sin verificar la misma. Al continuarse en la sesión 3 el proceso de modelización iniciado en la sesión 2, entonces sí realiza la fase 6 y avanza en el informe ya iniciado. Por falta de tiempo, Julia llevó a cabo la reformulación del problema exclusivamente en la sesión 3.

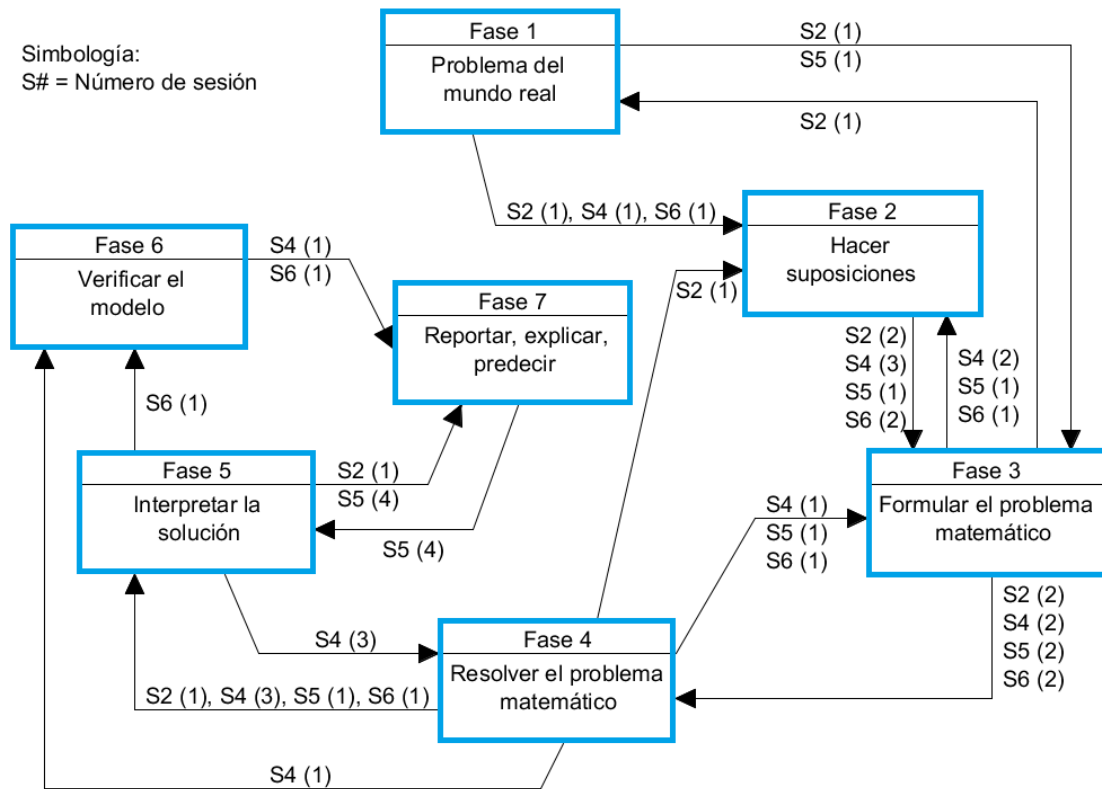


Figura 3. Procesos de modelización seguidos por Julia²

Respecto al proceso de modelización realizado por Julia en la segunda parte de la sesión 3, no representado en la figura 4, cabe mencionar que no considera necesario definir de nuevo sus variables, pero sí hacer la representación de su dibujo esquemático. Inicia con la primera fase y pasa directamente a formular el problema matemático (fase 3), resolverlo (fase 4) e interpretar la solución (fase 5). La no realización de la fase 2 en la sesión 3 estaría justificada debido a que el problema resuelto es una extensión del problema de la sesión anterior (¿qué pasaría si se consideran ángulos reales entre las poblaciones?). Julia no realiza las dos últimas fases por falta de tiempo; emplea el tiempo final de la sesión en intentar representar gráficamente, sin conseguirlo.

En la figura 3 se observa que Julia no implementa el proceso de modelización siguiendo secuencialmente las fases del mismo, sino que avanza en el proceso retomando con frecuencia alguna de las fases previas, incluso en varias ocasiones. Esta interacción suele producirse entre fases correlativas y resulta más frecuente en las sesiones 4 y 5. En especial cabe destacar las interacciones entre las fases 2 y 3, las cuales se producen en tres de las cuatro sesiones. En la segunda parte de la sesión 3 solo ocurre este tipo de interacción entre las fases 3 y 4

² Los números entre paréntesis indican el número de veces que Julia realiza dicho cambio de fase.

(una vez). A continuación, explicamos a qué fue debida cada una de estas interacciones:

- ◆ En la sesión 2 se observa cierto retroceso a la fase 1 cuando Julia se encuentra formulando el problema, con el objetivo de completar su dibujo esquemático situando las variables. En las siguientes sesiones no se produce esta interacción: en las sesiones 3 y 4 sitúa las variables en el dibujo esquemático antes de avanzar a las siguientes fases y en las sesiones 5 y 6 no realiza dibujo esquemático.
- ◆ Entre la fase 2 y la fase 3 (sesiones 4, 5 y 6). Este retorno es consecuencia de no haber definido todas las variables implicadas antes de proceder al establecimiento del modelo matemático. En la sesión 5, Julia incluso intenta formular su modelo matemático (fase 3) y resolver el problema matemático planteado (fase 4) sin pasar por la fase 2, volviendo a esta fase ante la necesidad de identificar y definir variables. Este es el único caso en que Julia omite alguna fase en su avance en el proceso de modelización.
- ◆ Entre la fase 2 y la 4 (sesión 2). La vuelta a la fase 2 desde la fase 4, en la sesión 2, está motivada por un problema técnico con el ordenador que obligó a Julia a repetir su trabajo de las fases previas.
- ◆ Entre la fase 3 y la fase 4 (sesión 3, 4, 5 y 6). En algunos casos, durante la formulación inicial, Julia no especifica la variable independiente de la que depende una función, situación requerida por Maple para posteriormente utilizar de manera eficaz y eficiente los comandos para diferenciar, resolver ecuaciones, realizar gráficos, etc. Esto ocasiona interacción entre las fases de formulación (fase 3) y resolución (fase 4) durante las sesiones 4 y 5; lo que no ocurre en la última sesión. En la sesión 3 (parte II) la interacción es debida a que Julia corrige el valor de los ángulos a la unidad de medida considerada por el software. La interacción entre las fases 3 y 4 durante la sesión 6 se debió a la corrección de un error de sintaxis en la definición de las ecuaciones que le sirvieron a Julia para definir el modelo: Julia incluyó las unidades de medición, m^3 , en la fórmula del volumen del tanque, lo que ocasionó que al resolver el problema el resultado viniera expresado en términos de la variable m . Ante esta respuesta Julia regresó a la fase de formulación (fase 3) para eliminar dichas unidades, definir de nuevo su modelo matemático y resolver de nuevo el problema (fase 4).
- ◆ Entre la fase 4 y la fase 5 (sesión 4). En la sesión 4, Julia retorna por primera vez a la fase 4 para registrar por escrito los valores que resuelven el problema escribiendo “entonces el costo total es de 0,7812484939 millones de dólares”. La segunda vez que retorna a la fase de resolución es para borrar lo escrito al detectar que lo que ha de averiguar no es el costo mínimo sino la localización del punto de enlace para el tendido de fibra óptica entre dos poblaciones, que minimice el costo. La tercera vez retorna a

la fase de resolución para verificar los extremos, actividad de esta fase que había omitido inicialmente.

- ◆ Entre la fase 5 y la fase 7 (sesión 5). En la sesión 5 al estar redactando el informe (fase 7), Julia intenta en repetidas ocasiones mejorar la visualización de la gráfica y, en particular, del punto crítico retomando para ello acciones de la fase 5.

Acciones ejecutadas en cada fase

En términos de las acciones que componen cada fase del proceso de modelización, mostramos en la tabla 2 las acciones realizadas por Julia en cada una de las sesiones. Las acciones prioritarias para ella son: (a) leer y comprender el problema (fase 1), (b) identificar y definir variables (fase 2), (c) formular las fórmulas matemáticas (fase 3), (d) calcular la derivada (fase 4), (e) determinar los números críticos (fase 4), (f) identificar los valores que resuelven el problema (fase 4), (g) representar e interpretar la solución de forma gráfica (fase 5), (h) identificar limitaciones de la solución (fase 6) y (i) elaborar un informe (fase 7). Así mismo, se observa que tiende a no hacer suposiciones (solo lo hace en la sesión 2), ni a interpretar la solución analítica (solo lo hace en la última sesión). Es posible inferir que para esta estudiante la identificación de las palabras clave, el replanteamiento del problema y la identificación de unidades para la solución, no son acciones necesarias para la formulación del modelo, ya que desde la resolución del segundo problema (sesión 4) no las realiza. Tampoco el dibujo esquemático se muestra necesario para la resolución de los dos últimos problemas.

En tres de las cinco sesiones de resolución de problemas (3, 4 y 6) Julia asume la solución sin verificar si realmente en el número crítico obtenido se localiza la solución. Tampoco confirma si la solución cumple las condiciones iniciales (fase 6) ni relaciona las soluciones analítica y gráfica (fase 5).

Tabla 2

Acciones realizadas por Julia durante las sesiones

Fase	Acciones	Sesiones					
		2	3(I)	3(II)	4	5	6
1	Leer y comprender el problema	✓		✓	✓	✓	✓
	Identificar las palabras clave	✓			✓		
	Hacer un dibujo esquemático	✓		✓	✓		
	Replantear el problema	✓			✓		

Tabla 2
Acciones realizadas por Julia durante las sesiones

Fase	Acciones	Sesiones					
		2	3(I)	3(II)	4	5	6
	Identificar unidades de la solución	✓			✓		
2	Identificar y definir variables	✓			✓	✓	✓
	Hacer suposiciones	✓					
3	Formular el modelo matemático	✓		✓	✓	✓	✓
4	Calcular la derivada	✓		✓	✓	✓	✓
	Determinar los números críticos	✓		✓	✓	✓	✓
	Verificar los extremos	✓			✓		
	Identificar los valores que resuelven el problema	✓		✓	✓		✓
5	Representar e interpretar la solución	✓			✓	✓	✓
	Representación gráfica				✓	✓	✓
	Interpretación de la solución gráfica					✓	✓
	Interpretación de la solución analítica						✓
	Relacionar la solución gráfica y simbólica	✓					✓

Tabla 2

Acciones realizadas por Julia durante las sesiones

Fase	Acciones	Sesiones					
		2	3(I)	3(II)	4	5	6
6	Verificar que la solución cumple las condiciones iniciales		✓		✓		
	Identificar limitaciones de la solución		✓		✓	✓	✓
7	Elaborar un informe	✓	✓		✓	✓	✓
8	Redefinir el problema		✓				

Distribución de tiempos

A continuación, atendemos a la distribución del tiempo invertido por Julia en cada fase del proceso de modelización (ver figura 4). Aquellas fases que le requieren más tiempo, en general, son las fases 1, 3 y 4 (en promedio 21%, 21% y 19% del tiempo, respectivamente) siendo el tiempo dedicado a cada una de las otras fases casi siempre igual o inferior al 15% (en media inferior al 10%). Dentro de cada proceso de modelización, resultan variables como son las fases que requieren más tiempo, detectándose un aumento en el tiempo dedicado a las fases 4, 5 y 7, conforme se avanza en el experimento de enseñanza. En aquellas sesiones en las que la estudiante dedica menos tiempo a la fase 1 o 2, el tiempo necesario para formular el problema matemático (fase 3) incrementa. Se percibe un descenso en el tiempo necesario para la fase 1, de las primeras sesiones a las dos últimas, así como en la sesión 3 en cuyo caso la estudiante ya conocía el problema del proceso de modelización previo realizado.

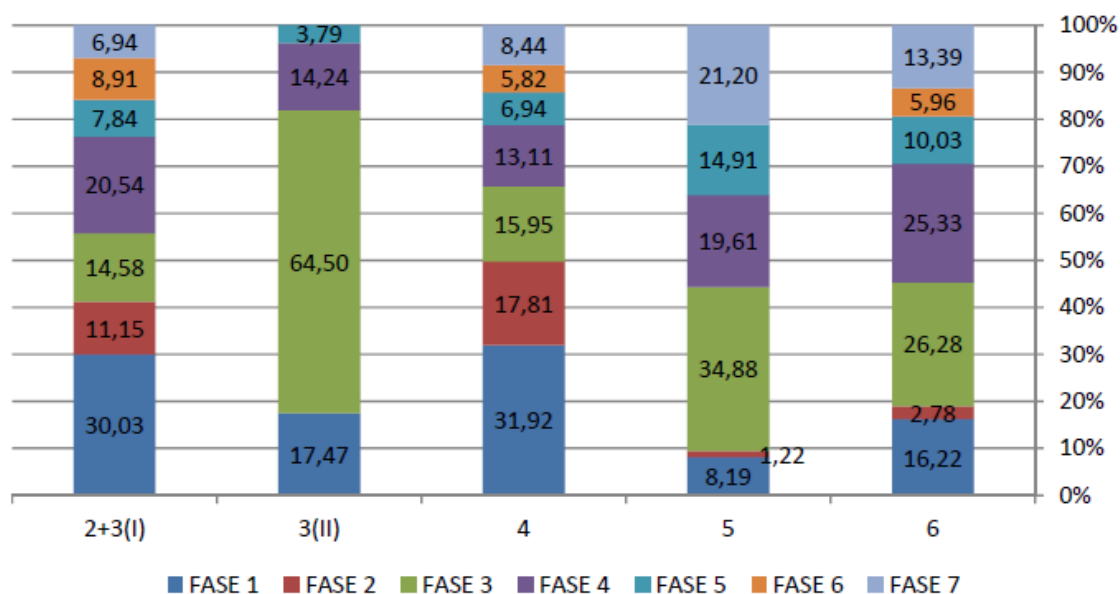


Figura 4. Distribución porcentual de tiempos de cada sesión por fase

DISCUSIÓN

El análisis de datos realizado atiende a cómo una estudiante se apropia del proceso de modelización a lo largo de varias sesiones. Hemos estudiado el seguimiento que hace Julia de las fases que conforman el proceso de modelización y en particular de las acciones que las constituyen, así como la distribución por fase, del tiempo empleado en la resolución de cada problema. A partir de este análisis, es interesante observar cómo en la puesta en práctica del proceso de modelización se produce interacción entre las fases haciendo que el proceso no sea unidireccional, como sugiere el diagrama teórico, incluso cuando en el cuaderno de trabajo se le indicaban cada una de las fases de forma secuencial. Esta interacción es más frecuente cuando existe menos guía por parte de la investigadora-docente. Algunas de las interacciones son motivadas por falta de experiencia por parte de la estudiante en el uso de Maple (p. ej., por no definir las funciones en términos de la variable independiente); otras son naturales del proceso de resolución de problemas al ir avanzando en la matematización de la situación en estudio y reconocer formas de abordar la resolución del problema (p. ej., la necesidad de definir otras variables o de registrarlas en el dibujo esquemático, mejorar la visualización de la solución en la gráfica) o al producirse errores típicos en la resolución de problemas como la omisión de la verificación de la solución. Cabe señalar que no se detecta en el caso de Julia tendencia a volver al problema real durante el desarrollo del proceso de modelización, hecho que se ha identificado como un obstáculo en algunos estudios previos (Doerr, 2007). Tampoco retorna al problema real de partida al resolver el modelo en cuyo caso es necesario para dar

significado a la solución y para verificar si cumple las condiciones iniciales, ambos pasos clave en un proceso de modelización.

En las primeras sesiones en la actuación de Julia se observa como elemento clave para la formulación del problema, la construcción detallada de un dibujo esquemático en el que todas las variables del modelo aparecen identificadas, a diferencia de lo observado por Crouch y Haines (2007). Sin embargo, no ocurre así en las dos últimas sesiones, tal vez con motivo de que en este caso el dibujo esquemático requería representar en el plano figuras tridimensionales o por influencia de su experiencia previa con la resolución de los otros problemas. La experiencia previa parece incidir en la distribución del tiempo a lo largo del experimento, reduciéndose ligeramente el tiempo necesario para las primeras tres fases del proceso, lo que no repercute negativamente en su resolución de los problemas, llegando en todos los casos a una solución posible.

En este estudio, a diferencia de los estudios previos sintetizados por Crouch y Haines (2007), no detectamos en la actuación de Julia dificultades para reconocer el modelo que necesita o para acceder a los conocimientos previos necesarios. Probablemente esto es debido a que la alumna contaba con experiencia en problemas de optimización y presentaba un rendimiento alto en matemáticas. Recordamos que nuestro enfoque hacia la implementación de la modelización en el aula, como en estudios recogidos en Camarena (2000), asume el proceso de modelización matemática como un método de resolución de problemas contextualizados y no como un proceso para el desarrollo y construcción de conceptos matemáticos (Tanner y Jones, 1994; Villa-Ochoa, 2007). De este modo, a través del aprendizaje del modelado matemático se persigue que los alumnos aprendan a cuestionar e investigar situaciones de la realidad (Barbosa, 2006).

Al atender a las acciones concretas que realiza Julia en cada fase y sesión, es de destacar que, si bien detecta varias limitaciones en la solución obtenida tras la identificación de la misma, previamente a la formulación del modelo no da importancia a explicitar las suposiciones en las que se basa. Esto concuerda con la tendencia puesta de manifiesto por esta estudiante, a lo largo de las diferentes sesiones, a proceder con presteza a formular matemáticamente el problema (fase 3) sin precisar todas las variables involucradas o incluso obviando la fase 2. Estudios previos coinciden con estas observaciones al reportar la dedicación de un tiempo escaso a las primeras fases de la modelización (Crouch y Haines, 2007).

En este estudio de caso también se ha identificado que Julia no parece necesitar reformular el problema, ni identificar las palabras clave antes de proceder a su formulación matemática o a plantear suposiciones. Este comportamiento le conduce a requerir más tiempo para formular el modelo. Además, la estudiante tiende a omitir la verificación de los extremos en forma simbólica. No queda claro si se auxilia de la representación gráfica para verificar los extremos, debido a que omite la relación explícita entre las dos soluciones (simbólica y gráfica). Sin embargo, utiliza la representación e interpretación de la solución gráfica como apoyo para la solución simbólica del problema. Las limitaciones detectadas en la

implementación del proceso de modelización por la estudiante concuerdan con su falta de experiencia en dicho proceso.

CONCLUSIONES

La experiencia realizada nos permite extraer algunas conclusiones de utilidad para llevar la modelización al aula. Los procesos de modelización son a menudo descritos de forma idealizada como un ciclo. Sin embargo, en la práctica, según observamos en el caso aquí presentado, el proceso puede ser bastante más desordenado. Muestra de ello son las diversas interacciones entre las fases que percibimos en el trabajo de Julia, incluso en este caso en que las acciones a realizar en cada fase estaban detalladas en el cuaderno de trabajo disponible a la estudiante. Consideramos que este hecho es resultado, en gran medida, de su proceso personal de significación y del proceso natural y gradual de toma de conciencia del proceso de resolución del problema y, por tanto, debe dársele cabida cuando se realice la puesta en práctica de esta metodología en el aula.

Algunas interacciones son en cambio consecuencia de su falta de experiencia con el software o con el proceso de modelización, no siendo de destacada importancia. No obstante, cabe señalar una importante limitación en la ejecución y concepción del proceso de modelización por parte de Julia que puede ser consecuencia de su falta de experiencia con esta metodología: Julia no explicita las suposiciones que su modelo implica ni el modo en que reformula el problema de partida para poder abordarlo de forma matemática. En los casos en que realiza un dibujo esquemático pueden entenderse ambas informaciones recogidas (implícitamente) dentro de este, pero cuando no realiza dicha representación (sesiones 5 y 6) no queda constancia de si Julia reconoce su matematización del problema como una de entre varias posibles o susceptible de ser reformulada para una mejor adaptación a la situación real.

Julia es capaz de formular matemáticamente el problema y hallar una solución para el mismo; los elementos más débiles de su actuación se detectan en la conexión inicial y final del modelo y la solución matemática con el problema real planteado. Estos elementos son los que confieren a la modelización el carácter cíclico que se le atribuye y entendemos que, en el caso de estudiantes no habituados a esta metodología, requieren una atención más intensa y continuada a la hora de su implementación, para poder aprovechar todo el potencial de esta estrategia metodológica.

REFERENCIAS

- Aravena, M., Caamaño, C. y Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Relime*, 11(1), 49-92.
- Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). Computer-based environments in mathematics. En A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematical education* (pp. 469-501). Londres, Reino Unido: Kluwer Academic Publishers.
- Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modeling en classroom: A critical and discursive perspective. *ZDM*, 38(3), 293-301.
- Blomhoj, M. (2004). Mathematical modeling—A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, ... K. Walby (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp. 145-159). Gotenburgo, Suecia: National Center for Mathematics Education.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37-68.
- Bosch, M., García, F., Gascón, J. y Ruiz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74.
- Camarena, P. (2000). *Informe del proyecto de investigación titulado: "Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería"*. Distrito Federal, México: ESIME-IPN.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.
- Crouch, R. y Haines, C. (2007). Exemplar models: Expert-novice student behaviours. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics* (pp. 90-100). Chichester, Reino Unido: Horwood publishing.
- Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modeling? En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss (Eds.), *Modeling and applications in mathematics education* (pp. 69-78). Nueva York, NY: Springer.
- Galbraith, P. (1989). From applications to modelling. En D. Blane y M. Evans (Eds.), *Mathematical modelling for the senior years* (pp. 78-86). Parkville, VI: The Mathematical Association of Victoria.

- Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3-16.
- Galbraith, P. y Clatworthy, N. (1990). Beyond standar models—Meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics*, 21(2), 137-163.
- Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student block-ages during transitions in the modeling process. *ZDM*, 38(2), 143-162.
- García, R. y Ortiz, J. (2007). Representaciones y modelización matemática en la resolución de problemas. En E. Castro y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 283-302). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.
- Haines, C. y Crouch R. (2010). Remarks on a modeling cycle and interpreting behaviours. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 145-154). Nueva York, NY: Springer.
- Hjalmarson M. A. y Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 520-534). Londres, Reino Unido: Routledge.
- Kaiser, G. (2010). Introduction: ICTMA and the teaching of modeling and applications. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 1-2). Nueva York, NY: Springer.
- Lesh, R. y Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: A models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning and teaching*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lesh, R. y Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 763-804). Greenwich, CT: Information Age Publishing.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- Molyneux-Hodgson, S., Rojano, T., Sutherland, R. y Ursini, S. (1999). Mathematical modelling: The interaction of culture and practice. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1), 167-183.
- Organization for Economic Co-operation and Development (2003). The PISA 2003 assessment framework. Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills. París, Francia: OECD.
- Perrenet, J. y Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.
- Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata.

- Stanic, G. y Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En R. Charles y E. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.
- Tanner, H. y Jones, S. (1994). Using peer and self-assessment to develop modeling skills with students aged to 16: A socio-constructive view. *Educational Studies in Mathematics*, 27(4), 413-431.
- Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. y Nieveen, N. (2006). Introduction to educational design research. En J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney y N. Nieveen (Eds.), *Educational design research* (pp. 3-7). Londres, Reino Unido: Routledge.
- White, A. (2000). Mathematical modelling and the general mathematics syllabus. *Curriculum Support for Teaching in Mathematics*, 5(3), 7-12.
- Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 19, 51-81.

Rubí López
Universidad Autónoma de Yucatán
rlopez@correo.uady.mx

Marta Molina
Universidad de Granada
martamg@ugr.es

Enrique Castro
Universidad de Granada
ecastro@ugr.es

Recibido: Marzo de 2016. Aceptado: Mayo de 2016.
Handle: <http://hdl.handle.net/10481/44147>