証券市場の完備性の新しい定義について

塚　原　英　敦

故吉岡教授を偲んで

1　はじめに

証券市場の完備性 (market completeness) とは，市場で取引可能な証券を取引することによってすべての条件付請求権 (contingent claim) が複製できるということである．この意味で証券市場が完備であれば，背後にある Arrow-Debreu 均衡が達成される．そして，厚生経済学の第 1 定理によって，投資家の経済学的素性によらずに Pareto 効率的な配分が実現できる．これが，リスクの効率的配分という厚生的視点から見たときに完備な証券市場が望ましいものである理由である (Cox and Rubinstein [6], 第 8 章)．また，資産価格付け理論の第 2 基本定理 (second fundamental theorem of asset pricing) は証券市場の完備性と同値なマルチンゲール測度 (equivalent (local) martingale measure，以下 ELMM と略) の一意性の同等性を述べたものである．この価格付けという点から見ると，もし市場が完備であれば，任意の条件付請求権の価格が投資家の選好に依らずに一意的にその複製ポートフォリオの現在での価値と定まることになる．

ここで注意すべきことは，証券市場の完備性はその本質からいって，無裁定あるいは ELMM の存在の仮定とは独立に論じられるべきものであると

いうことである．この指摘は近年 Jarrow and Madan [17], Battig [2] (連続時間モデル), Battig and Jarrow [3] ([2] のダイジェスト版) や Jarrow, Jin and Madan [16] (単一期間モデル) でなされており，これらの論文では ELMM の存在を仮定しない証券市場の完備性の新しい定義が与えられている．また，Artzner and Heath [1] は，市場で取引される証券の数が無限の場合，ELMM が一意であることと市場の完備性は同値ではないことを例によって示した．これに対して，上で触れた完備性の新定義を採用すると，市場が完備であることと符号付き ELMM の一意性が同等となり，資産価格付け理論の第 2 基本定理が少し形を変えて再び成立することになる．

ここで，無限個の原始証券を考慮に入れる必要が本当にあるのだろうかという問いに我々は答えなければならない．Black-Scholes の論文以来，80 年代前半まで問題となっていたのは，状態数が無限であるのに，比較的少数の証券だけで市場が完備となるのはなぜかということであった．この問題に対して，Duffie and Huang [10] は明快な説明を与えた．すなわち，証券数が増大情報系のマルチンゲール重複度 +1 であれば，任意のマルチンゲールが積分表現をもち，従ってすべての請求権が複製可能となるのである．Black-Scholes モデルでは，1 次元ブラウン運動の生成する増大情報系が仮定されており，そのマルチンゲール重複度が 1 であるから，2 つの証券 (1 安全資産と 1 危険資産) のみで完備性が成立つ．これを逆に言えば，一般にマルチンゲール重複度が有限でない増大情報系をモデルとして考えた場合，完備な市場を達成するためには無限個の証券を考慮に入れなければならないということである．よって，理想的な状況である完備市場を分析することは理論的には必要であり，そのためには，原始証券数が無限の場合も考察する価値があろう．また，実際に無限個の原始証券を取り入れたモデルとしては，満期の異なる債券を考える HJM モデル (c.f. Jarrow and Madan [17]) や Björk, Di Masi, Kabanov and

Runggaldier [4], Björk, Kabanov and Runggaldier [5], さらに Ross の APT モデル (Ross [19], Huberman [15]) が挙げられる.

完備性の定義について，これまでの文献では，時間的に連続な取引戦略を最初から考えてしまうのが主流である．すなわち，原始証券の価格過程に関して可積分な可予測過程で，1 つ固定された EMM に対してその利潤過程がマルチンゲールになるものを許容的取引戦略のクラスと定義し，任意の請求権がある許容的取引戦略の終点での価値に確率 1 で等しくなるときに市場が完備であると呼ぶ (Harrison and Pliska [13, 14], その他多数)．これに対して，連続時間の取引は現実には不可能であり，また EMM を 1 つ固定することから無裁定を仮定してしまっており，その結果，完備性が選ばれた EMM に依存するという批判もある．ここで述べる完備性の定義は，取引戦略のクラスを単純なもの (例えば，有限個の停止時刻においてのみリバランスが許されるもの) に限定し，その取引戦略の終点での価値が張る空間が条件付請求権の空間において稠密であるというアプローチ (Harrison and Kreps [12], Artzner and Heath [1], Delbaen [7]) に基づいている.

2 単一期間モデル

2.1 有限確率空間モデル

まず，状態数及び原始証券数が有限の場合の完備性を再考する．時点は 0 と 1 の 2 時点のみとし，次のような設定を考える.

- 時点 1 において可能な状態の集合：$\Omega = \{1, 2, \ldots, K\}$
- N 個の原始証券は次の $K \times N$ 配当行列 $D = [D_{kn}]$ によって定義される．ただし，D_{kn} は状態 k において証券 n によって支払われ

るキャッシュ・フローである.

取引戦略を N 次元ベクトル $\theta \in \mathbb{R}^N$ で表すと，そのキャッシュ・フローは $D\theta \in \mathbb{R}^K$ となる.

定義 2.1 市場が**完備**(complete) であるとは，線形写像 $D\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ が全射であることである.

言い換えれば，市場が完備とは $\operatorname{rank} D = K$ が成立つことである．よって，$N \geq K$ は市場の完備性のための必要条件となる.

さらに，証券価格ベクトルを $q \in \mathbb{R}^N$ とすると，取引戦略 θ の市場価値は $\langle \theta, q \rangle = \sum_{n=1}^{N} \theta_n q_n$ と表される.

定義 2.2 取引戦略 $\theta \in \mathbb{R}^N$ が**裁定取引**(arbitrage) であるとは，次の 2 つの条件のうちどちらかが成立つことである.

(i) $\langle \theta, q \rangle \leq 0$ かつ $D\theta > 0$.

(ii) $\langle \theta, q \rangle < 0$ かつ $D\theta \geq 0$.

定義 2.3 (符号付き) 状態価格ベクトル((signed) state price vector) とは，K-次元ベクトル $\psi \in \mathbb{R}^K$ で，$q = D'\psi$ を満たすもののことである．特に，$\psi \in \mathbb{R}^K_{++}$(各要素が狭義に正) が成立つとき，$\psi$ を**正の**(positive) **状態価格ベクトル**と呼ぶ.

上の定義の下で，資産価格付け理論の基本定理は次のように述べられる.

定理 2.4 (資産価格付け理論の基本定理)

(i) **第 1 基本定理**：裁定取引が存在しないことと正の状態価格ベクトルが存在することは同値である.

(ii) **第 2 基本定理**：裁定取引が存在しないと仮定するとき，市場が完備であることと正の状態価格ベクトルが一意であることは同値である.

(i) の証明は Duffie [9], 1A に与えられている．また，(ii) は線形代数を用いて容易に示される (Duffie [9], Exercise 1.14)．しかし，第 1 節で述べたように，完備性は本来無裁定の仮定とは独立に論じ得るべきものである．実際，定義 2.1 での市場完備性は無裁定の仮定とは一切関わりがない．

そこで，次の双対性に着目する．証券価格ベクトル $q \in \mathbb{R}^N$ を取引戦略 θ の空間 $\mathbb{R}^N$ 上の線形汎関数とみなす．つまり，$q \in (\mathbb{R}^N)^*$($\mathbb{R}^N$ の代数的双対空間) であり，その双対性は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表される．また，$\mathbb{R}^K$ はキャッシュ・フローの空間であり，$D\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^K$ は取引戦略の空間からキャッシュ・フローの空間への線形写像である．すると，D の双対写像 $D'\colon (\mathbb{R}^K)^* \to (\mathbb{R}^N)^*$ は次の式で定義される線形写像である (転置行列に他ならない)：

$$\langle D\theta, \psi\rangle = \langle \theta, D'\psi\rangle, \quad \theta \in \mathbb{R}^N,\ \psi \in (\mathbb{R}^K)^*$$

いま，D が全射であることと D' が 1-1 であることが同値であるという線形代数での事実に注意すると (佐武 [20], V.1.3 節参照)，

$$\text{市場が完備である} \iff D' \text{ が 1-1}$$

という結果が得られる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{R}^K \arrow[r, leftrightarrow, "\langle\cdot,\cdot\rangle"] & \psi \in (\mathbb{R}^K)^* \arrow[d, "D'"] \\
\theta \in \mathbb{R}^N \arrow[u, "D"] \arrow[r, leftrightarrow, "\langle\cdot,\cdot\rangle"] & q \in (\mathbb{R}^N)^*
\end{tikzcd}$$

第2定理では，裁定取引の非存在，すなわち，正の状態価格ベクトルの存在が仮定されていた．それは特に，数学的には証券価格ベクトルが D' の値域に入っていることを意味する．上で導かれた市場の完備性と D' が 1-1 であることの同等性を考慮すれば，第2定理は容易に従うであろう．しかし，同じ議論に従えば，必ずしも正ではない状態価格ベクトルの存在を仮定しただけでも第2定理は成立つのである．すなわち，

命題 2.5 (一般化された第2基本定理) 状態価格ベクトルが存在すると仮定する．このとき，市場が完備であることと状態価格ベクトルが一意であることは同値である．

正の状態価格ベクトルが存在しないが，符号付き状態価格ベクトルが存在して，市場が完備となる簡単な例を挙げよう．

例 2.6 配当・価格の組を

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

で定義する．このとき，状態価格ベクトルは $\psi = (1, -1)'$ で一意的に与えられ，明らかに市場は完備である．

もちろん，状態価格ベクトルは存在しないが，市場が完備となる例も容易に作ることができる．

例 2.7 配当・価格の組が

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

で与えられたとすると，$q = D'\psi$ を満たす $\psi \in \mathbb{R}^2$ は存在しない．しかし，$\operatorname{rank} D = 2$ であるから市場は完備である．

2.2　一般の確率空間モデル

次に，状態数が無限である一般の確率空間を用いた1期間モデル (時点は0と1のみ) を考える．この場合，証券市場の完備性のためには，証券数は無限でなくてはならないことが容易に推察される．また，有限次元の場合には考慮する必要のなかった次のようないくつかの問題が現れる．

(i) キャッシュ・フロー (あるいは条件付請求権) を表す確率変数の空間とその上の位相を賢明に選択しなければならない．代表的なものは L^1-位相，L^2-位相や L^∞-位相である．

(ii) 無限個の証券に対する取引戦略の定義も問題である．各時点で取引できる証券数は無限個とするのか，それとも有限個のみか．また，取引戦略のクラスにどういった制限を課すのか．

(iii) 完備性の定義の選択 (第1節参照).

以下では，Jarrow, Jin and Madan [16] に沿って議論を進める．用いる記号等は以下の通りである．

- $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$: 完備確率空間．$\mathbf{P}$ は統計的 (あるいは真の) 確率である．
- キャッシュ・フローの空間：

$$\mathbb{C} = L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}) = \{c(\omega)\colon \mathbf{P}\text{-本質的有界な実数値確率変数}\}$$

  可積分性など確率測度に強く依存する条件は避け，確率0の集合のみに基づく空間として $L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ を選択する．

- $(A, \mathscr{A}, \nu)$: 有限測度空間．A は取引可能な原始証券を表す添字集合であり，$\mathscr{A}$ は A 上の σ-集合体である．ν は参照ポートフォリオ (reference portfolio) を表す．
- 証券 $\alpha \in A$ の時点1でのキャッシュ・フロー：$c_\alpha(\omega)$ は $\mathscr{A} \otimes \mathscr{F}$ 可

測であり，

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \int_A |c_\alpha(\omega)|\, \nu(d\alpha) < \infty$$

を満たすと仮定する．

- 取引戦略の空間：

$$\mathbb{Y} = L^\infty(A, \mathscr{A}, \nu) = \{y \in \mathscr{A} : \nu\text{-本質的有界な実数値可測関数}\}$$

- 取引戦略 $y \in \mathbb{Y}$ のキャッシュ・フロー $\Phi(y)$ を

$$\Phi(y)(\omega) = \int_A y(\alpha) c_\alpha(\omega)\, \nu(d\alpha)$$

定義する．ただし，$\Phi\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ は線形作用素である．

- 価格汎関数：$\pi\colon A \to \mathbb{R}$．$\pi(\alpha)$ は証券 α の市場価格であり，$\mathscr{A}$ 可測，かつ

$$\int_A |\pi(\alpha)|\, \nu(\alpha) < \infty$$

を満たすとする．すなわち，$\pi \in L^1(A, \mathscr{A}, \nu)$ が成立つ．

上で定義したいくつかの空間において，次のように位相および双対空間を導入する．まず，$\pi(\alpha)$ はキャッシュ・フロー c_α の価格と考えると，$\mathbb{C}$ 上の線形汎関数ともみなせる．$\mathbb{C}$ 上にある局所凸位相 τ を導入したとき，$\mathbb{Q}$ を τ に関する $\mathbb{C}$ の位相的双対空間とする．

$\mathbb{Y}$ の位相は $\Phi\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ を連続にする最弱な位相 τ_Φ とする．これは局所凸位相であり (Hausdorff とは限らない)，Φ は連続な線形作用素となる．

τ としては，L^∞ ノルム位相よりも弱く，かつ τ_Φ に関する位相的双対空間 $\mathbb{X}$ が $L^1(A, \mathscr{A}, \nu)$ に含まれる (つまり，τ_Φ が適度に弱い) ような位相を考える．$L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ に L^∞ ノルム位相を入れたとき，その位相的双対空間は，全変動が有限であり，$\mathbf{P}$-絶対連続な $\mathscr{F}$ 上の有限加法的集合関数

全体 $ba(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ となる (Dunford and Schwartz [8], IV.8.16). 従って, $\mathbb{Q} \subset ba(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ が成立つ. (ν が有限測度であるから, $L^\infty(A, \mathscr{A}, \nu)$ についても同様に, L^∞ ノルム位相に関する位相的双対空間は $ba(A, \mathscr{A}, \nu)$ である). 以下では, τ として $\mathbb{Q} \subset L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ となる位相のみを考える (Radon-Nikodym の定理より, $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ は $\mathbf{P}$-絶対連続な $\mathscr{F}$ 上の有限な符号付き測度全体と同一視できる).

具体的な位相 τ の例をいくつか挙げよう.

(i) $q \geq 1$ に対して, τ をいわゆる弱位相 $\sigma(\mathbb{C}, L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}))$ とすれば, $\mathbb{Q} = L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ である (Schaefer [21], IV.1.2).

(ii) τ をノルム位相, すなわち $\mathbb{C}$ を $L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ の部分集合と見たときの相対位相ととることもできる. このとき, $\mathbb{Q} = L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ が成立つ (Hahn-Banach の定理による).

次に, 代数的完備性と位相的完備性という 2 つの概念を導入する.

定義 2.8

(i) 市場が**代数的完備**であるとは, すべての $c \in \mathbb{C}$ に対して, $y \in \mathbb{Y}$ が存在して, $\Phi(y) = c$ となること, すなわち, $\Phi\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{C}$ が全射となることである.

(ii) 市場が $\mathbb{C}$ 上の位相 τ に関して**完備**であるとは, すべての $c \in \mathbb{C}$ に対して, 網 $(y_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, $y_\gamma \in \mathbb{Y}$ (Γ は有向集合) が存在して, τ に関して $\Phi(y_\gamma) \to c$ となること, すなわち, Φ の像 $\Phi(\mathbb{Y})$ が $\mathbb{C}$ において稠密となることである.

τ がノルム位相の場合には, (ii) の解釈は容易である. τ が弱位相, 例えば $\sigma(\mathbb{C}, L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}))$ であるときには, τ に関する完備性は次のように解釈できる. 上で述べたように, $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ は $\mathbf{P}$-絶対連続な $\mathscr{F}$ 上の有限な符号付き測度全体と同一視できるが, これを経済主体がもつ主観

的評価測度と解釈する．つまり，ある経済主体の主観的評価測度が μ であれば，その主体はキャッシュ・フロー $c(\omega)$ を時点 0 で $\int c\,d\mu$ と評価していることを意味する．すると，大雑把には，市場が τ に関して完備とは，任意のキャッシュ・フロー $c(\omega)$ に対して，時点 0 での評価がすべての主体により $c(\omega)$ に "近い" と判断される取引戦略が存在することである (ただし，$\sigma(\mathbb{C}, L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}))$ は各点収束位相であるから，主体によってその "近さ" はまちまちである).

また，定義 2.8(ii) において，請求権の近さを測る τ という位相とともに，許容される取引戦略の空間 $\mathbb{Y}$ の大きさにも重要性があることに注意しよう．

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}, \tau) \arrow[r, leftrightarrow, "\langle \cdot , \cdot \rangle"] & \big(\mathbb{Q}, \sigma(\mathbb{Q}, \mathbb{C})\big) \arrow[d, "\Phi^*"] \\
(\mathbb{Y}, \tau_\Phi) \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, leftrightarrow, "\langle \cdot , \cdot \rangle"] & \big(\mathbb{X}, \sigma(\mathbb{X}, \mathbb{Y})\big)
\end{tikzcd}
$$

定義 2.9 価格汎関数 π に対して，$\Pi \in \mathbb{X}$ を

$$\Pi(y) = \int y(\alpha)\pi(\alpha)\,\nu(d\alpha)$$

で定義し，Φ^* を Φ の共役作用素とする．このとき，$q \in \mathbb{Q}$ が**符号付き状態価格密度**であるとは，$\Pi = \Phi^*(q)$ となることである．もし，さらに $\mathbf{P}(q > 0) = 1$ であれば，q を**正の状態価格密度**と呼ぶ．

状態価格密度が $\mathbb{Q}$ において一意であるとは，当然 $\Pi = \Phi^*(q)$ となる $q \in \mathbb{Q}$ が一つしかないことであるが，これは後に示す Φ^* の形から，ν-ほとんどすべての $\alpha \in A$ について，$\pi(\alpha) = \int_\Omega q(\omega)c_\alpha(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega)$ が成立つような $q \in \mathbb{Q}$ が $\mathbf{P}$-a.s. の意味で 1 つしかないことと同じである．この一意性の定義の点で，Jarrow, Jin and Madan [16] は修正が必要である．

定義 2.10 $\mathbb{V} = \{v_\alpha = (\pi(\alpha), c_\alpha) \colon \alpha \in A\}$ と置き，$(1, \mathbf{1}) \in \mathbb{V}$ を仮定する．さらに，

$$\mathbb{C}_0 = \{v_1 \colon (0, v_1) \in \mathrm{sp}(\mathbb{V})\}$$

とおく．そして次の条件を導入する．

(i) **一物一価の法則 (law of one price)** : $\Phi(y) = \Phi(y') \implies \Pi(y) = \Pi(y')$.

(ii) **無償廃棄の弱裁定 (weak arbitrage with free disposal)** の非存在 : $\overline{\mathbb{C}_0 - L^\infty_+} \cap L^\infty_+ = \{0\}$.

ここで，閉包は $\sigma(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ に関してとるものとする．

定理 2.11

(i) 一物一価の法則が成立つ $\iff$ 状態価格密度が存在する

(ii) 無償廃棄の弱裁定機会が存在しない $\iff$ 正の状態価格密度が存在する

[証] (i) の $\Leftarrow$ は自明であろう．$\Rightarrow$ を示すには，まず一物一価の法則が $\Phi^{-1}(\{0\}) \subset \Phi^{-1}(\{0\})$，すなわち $\ker\Phi \subset \ker\Pi$ を意味することに注意する．$\mathbb{Q}$ の極集合 (polar set) を $\mathbb{Q}^\circ$ と書くと，極集合に関する基本的な事実から

$$\mathbb{Q}^\circ = \{c \in \mathbb{C} \colon |\langle c, q\rangle| = 0,\ q \in \mathbb{Q}\} = \{0\}$$

を得る ($\langle\mathbb{C},\mathbb{Q}\rangle$ は分離された双対系 (separated dual system) である).
従って,

$$\Phi^{-1}(\{0\}) = \Phi^{-1}(\mathbb{Q}^{\circ}) = \Phi^{*}(\mathbb{Q})^{\circ}$$

となり, 双極定理 (bipolar theorem) から $\Phi^{*}(\mathbb{Q})^{\circ} \subset \Pi^{-1}(\{0\})$, したがって $\overline{\Phi^{*}(\mathbb{Q})} \supset \Pi^{-1}(\{0\})^{\circ}$ を得る (閉包は $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$ に関してとる). これから $\Pi \in \overline{\Phi^{*}(\mathbb{Q})}$ が直ちに従うので, あとは $\Phi^{*}(\mathbb{Q})$ が $\sigma(\mathbb{X},\mathbb{Y})$-閉であることを示せばよい. Grothendieck [11], Proposition 2.27 によれば, このことは Φ が弱準同型 (weak homomorphism) であることと同等だが, 同書物の Proposition 2.29 より, Φ が準同型 (homomorphism) であることを示せば十分である. これは τ_{Φ} の定義から容易に従う (G が $\mathbb{Y}$ の開集合とすると, G は $\Phi^{-1}(H)$, $H \in \tau$ の形をしていることから $\Phi(G)$ が $\Phi(\mathbb{Y})$ の開集合であることがわかる).

定理の (ii) の証明は Lakner [18] と同様にできる. ■

注意 2.12 Jarrow, Jin and Madan [16] の Lemma 1.1 では, 状態価格密度の存在と弱裁定 (weak arbitrage) 機会の非存在 : $\overline{\mathbb{C}_0} \cap L^{\infty}_{+} = \{0\}$ が同値であるとしているがこれは明らかに誤りである. 反例 : 上の例 2.6 において, $\theta = (3,-2)'$ という裁定取引が存在するのに, 状態価格密度は存在する.

定理 2.13 (一般化された資産価格付け理論の第 2 定理) 状態価格密度が存在すると仮定する. このとき, 市場が $\sigma(\mathbb{C},\mathbb{Q})$ に関して完備であることと状態価格密度が $\mathbb{Q}$ において一意であることは同等である.

[証] 線形作用素 $\Phi^{*}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{X}$ を

$$\Phi^{*}(q)(y) = \int q(\omega)\Phi(y)(\omega)\,\mathbf{P}(d\omega)$$

で定義すると，これは $\langle \Phi(y), q \rangle = \langle y, \Phi^*(q) \rangle$ を満たす．また，Φ は (弱) 連続だから，Φ^* は Φ の共役作用素である．Schaefer [21], IV.2.3 の系により，Φ^* が 1-1 であることと $\Phi(\mathbb{Y})$ が $\sigma(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ に関して稠密となることは同等である．

いま，Φ^* が 1-1 であるとし，$q \in \mathbb{Q}$ を状態価格密度とする．$\widetilde{q} \in \mathbb{Q}$ を別の状態価格密度とすると，Fubini の定理より，$\Phi^*(q) = \Phi^*(\widetilde{q})$ となる．よって，Φ^* が 1-1 であることから，$q = \widetilde{q}$, $\mathbf{P}$-a.s. が成立つ．

逆に，$q \in \mathbb{Q}$ が一意的な状態価格密度と仮定する．ここで，Φ^* が 1-1 でないとすると，$\Phi^*(q_0) = 0$ となる $q_0 \neq 0$ が存在する．$\widetilde{q} = q + q_0$ とおくと $\widetilde{q} \in \mathbb{Q}$ であり，$\Phi^*(q) = \Phi^*(\widetilde{q})$ より，すべての $y \in \mathbb{Y}$ に対して，

$$\int_A y(\alpha) \int_\Omega q(\omega) c_\alpha(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) \nu(d\alpha) = \int_A y(\alpha) \int_\Omega \widetilde{q}(\omega) c_\alpha(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) \nu(d\alpha).$$

よって，ν-ほとんどすべての $\alpha \in A$ について，

$$\pi(\alpha) = \int_\Omega q(\omega) c_\alpha(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega) = \int_\Omega \widetilde{q}(\omega) c_\alpha(\omega)\, \mathbf{P}(d\omega)$$

が成立つことになるが，これは q の一意性に反する． ■

系 2.14 Φ の共役作用素 Φ^* が 1-1 であることと，市場が $\sigma(\mathbb{C}, \mathbb{Q})$ に関して完備であることは同等である．

2.3 無裁定市場と正の状態価格密度の一意性

$\mathbb{M}$ を $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ の部分空間とし，$\mathbb{C}$ に $\sigma(\mathbb{C}, \mathbb{M})$ 位相を入れてできる双対組 $(\mathbb{C}, \mathbb{M})$ を考える．例としては，$\mathbb{M} = L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, $1 \leq q \leq \infty$ を主に念頭においている．このとき，市場が $\sigma(\mathbb{C}, \mathbb{M})$ に関して完備であ

れば，$\mathbb{M}$ に属する正の状態価格密度は存在しても高々1つであることが定理 2.13 からすぐわかる．

しかし，逆は必ずしも正しくない．つまり，$\mathbb{M}$ に属する正の状態価格密度が一意に存在しても，市場が $\sigma(\mathbb{C},\mathbb{M})$ に関して完備となるとは限らない．それは，他に符号付き状態価格密度が存在するかもしれないからである (そのような例が Jarrow, Jin and Madan [16] の 5.1 節に与えられている)．これを排除するために，次の仮定が必要となる．

仮定 A $m \in \mathbb{M}^+$ に対して，$\lambda \in (0,1)$ と $m', m'' \in L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})^+$ が存在して $m = \lambda m' + (1-\lambda)m''$ と書けるならば，$m', m'' \in \mathbb{M}^+$ である．

仮定 B $\mathbf{1}_\Omega \in \Phi(\mathbb{Y})$．さらに，$v \in \Phi(\mathbb{Y})$ ならは，すべての $K \in \mathbb{R}$ に対して，

$$(v - K) \vee 0 \in \Phi(\mathbb{Y})$$

が成立つ．

仮定 A は純粋に技術的な仮定である．一方，仮定 B は無リスクな取引戦略の存在を保証し，さらに市場で取引可能なキャッシュ・フローについては，その上に書かれたコールオプションも取引可能であるということを要求している．

以下の 2 つの定理は Jarrow, Jin and Madan [16] の Theorem 3.2 と Theorem 4.2 であるが，その証明は不正確であるように思われる．

定理 2.15 正の状態価格密度 $m_0 \in \mathbb{M}^+$ が一意に存在し，$\mathbb{M}^+$ が仮定 A を満たすとする．このとき，仮定 B が成立てば，市場は $\sigma(\mathbb{C},\mathbb{M})$ に関して完備となる．

次に，$\mathbb{C}$ にノルム位相 $L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$，$1 \leq q < \infty$ を入れた場合を考える．もし，市場が $L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 位相に関して完備であれば，当然 $\sigma(\mathbb{C}, L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}))$ 位相 $(p = q/(q-1))$ に関しても完備となる．よって，弱位相の場合と同様に，$L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ に属する正の状態価格密度は存在しても高々1つであることになる．この逆は次の定理で与えられる．

定理 2.16 正の状態価格密度が $L^p(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, $1 < p \leq \infty$ で一意に存在し，仮定 B が成立つと仮定する．このとき，市場は $L^q(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 位相に関して完備となる．ただし，$q = p/(p-1)$.

2.4 例

例 2.17 (Artzner and Heath [1]) この論文では，伝統的な意味で完備であるにもかかわらず，同値なマルチンゲール測度が無数に存在する市場の例が与えられている．これまで導入した記号を用いてその例を説明しよう．

- $\Omega = \mathbb{Z} \backslash \{0\} = \{\ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots\}$，$\mathscr{F} = 2^{\Omega}$.
- $0 < p < q < 1$ に対して，$(\Omega, \mathscr{F})$ 上の 2 つの確率 $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ を次のように定義する：

$$\mathbf{P}_0(i) = \begin{cases} \kappa p^i, & i > 0; \\ \kappa q^{-i}, & i < 0; \end{cases} \qquad \mathbf{P}_1(i) = \mathbf{P}_0(-i),\ i \in \Omega.$$

  ここで $\kappa > 0$ は基準化定数である．明らかに $\mathbf{P}_0$ と $\mathbf{P}_1$ は同値である．

以下では，$\mathbf{P}_0$ が統計的 (真の) 確率であるとする．

- 原始証券は $c_{00}=\mathbf{1}_\Omega$ と次の式で定義される $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ である：

$$c_0(\omega)=\begin{cases}(\kappa p+\kappa q)^{-1}, & \omega=1,-1\text{ のとき};\\ 0, & \text{その他}.\end{cases}$$

$i\geq 1$ に対して

$$c_i(\omega)=\begin{cases}(q^{i+1}-p^{i+1})/[\kappa p^i q^i(q-p)], & \omega=i\text{ のとき};\\ (p^i-q^i)/[\kappa p^i q^i(q-p)], & \omega=i+1\text{ のとき};\\ 0, & \text{その他};\end{cases}$$

と定義し，$i\leq -1$ に対しては $c_i(\omega)=c_{-i}(-\omega)$ とする.

- 証券の添字集合は $A=\mathbb{Z}\cup\{00\}$, $\mathscr{A}=2^A$ であり，参照ポートフォリオは $\nu(\{00\})=1$, $\nu(\{i\})=\phi^{|i|}$, $i\in\mathbb{Z}$ とする．ただし，$0<\phi<p$ である.

- $\mathbb{C}$ の位相的双対空間 $\mathbb{Q}$ は,

$$L^1(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P}_0)=\{q(\omega)=\frac{\mathbf{Q}(\omega)}{\mathbf{P}_0(\omega)}\colon \sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{Q}(\omega)<\infty\}$$

の部分空間となる．その双対性は

$$\langle c,q\rangle\triangleq\sum_{\omega\in\Omega}c(\omega)q(\omega)\mathbf{P}_0(\omega)=\sum_{\omega\in\Omega}c(\omega)\mathbf{Q}(\omega)$$

で与えられる．$\mathbb{Q}$ の詳しい特定化は後に行う.

- 取引戦略 $y\in\mathbb{Y}$ に対して,

$$\Phi(y)=y(00)+\sum_{i=-\infty}^{\infty}y(i)c_i\phi^{|i|}$$

と定義すると，共役作用素 Φ^* は

$$\Phi^*(q)(y)=y(00)\sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{Q}(\omega)+\sum_{i\in\mathbb{Z}}y(i)\phi^{|i|}\sum_{\omega\in\Omega}c_i(\omega)\mathbf{Q}(\omega)$$

となる．ただし，$q(\omega)=\frac{\mathbf{Q}(\omega)}{\mathbf{P}_0(\omega)}$ である.

- 価格汎関数 π は $\pi(\alpha)=1,\ \forall\alpha\in A$ とする．すなわち，すべての原始証券の時点 0 での価格は 1 であるとすると，付随する $\mathbb{Y}$ 上の汎関数 $\Pi\in\mathbb{X}$ は

$$\Pi(y)=y(00)+\sum_{i\in\mathbb{Z}}y(i)\phi^{|i|}$$

となることがわかる．よって，$q(\omega)=\frac{\mathbf{Q}(\omega)}{\mathbf{P}_0(\omega)}\in\mathbb{Q}$ が状態価格密度であるためには

$$\sum_{\omega\in\Omega}\mathbf{Q}(\omega)=1,\qquad \sum_{\omega\in\Omega}c_i(\omega)\mathbf{Q}(\omega)=1,\ i\in\mathbb{Z}$$

の 2 つが成立つことが必要十分である．2 番目の式はすべての原始証券のキャッシュ・フローの $\mathbf{Q}$ の下での積分が時点 0 での価格となっていることを要求していることに注意しよう (マルチンゲール測度!)．

実は，(c_i) は上で与えられた $\mathbf{P}_0$ と $\mathbf{P}_1$ に対する方程式

$$\mathbf{P}_0(i)c_i(i)+\mathbf{P}_0(i+1)c_i(i+1)=1,\quad i\geq 1$$
$$\mathbf{P}_1(i)c_i(i)+\mathbf{P}_1(i+1)c_i(i+1)=1,\quad i\geq 1$$

の一意的な解である．よって，1 と $\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{P}_0}$ は $\mathbb{Q}$ に属するならば，ともに正の状態価格密度となる．

一方，上の $(c_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ を与えられたものとして，方程式

$$\mathbf{Q}(i)c_i(i)+\mathbf{Q}(i+1)c_i(i+1)=1,\quad i\geq 1$$

を考えると，この解は必ず $\mathbf{P}_\lambda=\lambda\mathbf{P}_0+(1-\lambda)\mathbf{P}_1,\ \lambda\in\mathbb{R}$ の形になる．故に，状態価格全体は

$$\left\{\frac{\mathbf{P}_\lambda}{\mathbf{P}_0}:\lambda\in\mathbb{R}\right\}\cap\mathbb{Q}$$

となることがわかる．よって，EMM あるいは状態価格密度は無数にあり得る．しかしながら，Artzner and Heath [1] は $\mathbf{1}_{\{i\}}, i \in \Omega$ が c_i 達の一次結合の L^1-極限として得られること，したがって従来の意味での完備性が成立つことを証明した．今までの議論に照らし合わせてみると，この結果は定理 2.13 とは矛盾しないことが次のようにしてわかる．

(i) $\tau = \sigma(\mathbb{C}, L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_0))$ の場合，$\mathbb{Q} = L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_0)$ となり，状態価格密度全体は $\left\{\frac{\mathbf{P}_\lambda}{\mathbf{P}_0} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ となる．すなわち，この場合には状態価格密度の $\mathbb{Q}$ での一意性は成立たない．この場合，$\Phi^* : \mathbb{Q} \to \mathbb{X}$ が 1-1 でないことは自明であるから，市場は τ に関して完備ではない．

(ii) τ が $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_0)$ ノルム位相の場合，$\mathbb{Q} = L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_0)$ となるので，状態価格密度全体は

$$\left\{p_\lambda = \frac{\mathbf{P}_\lambda}{\mathbf{P}_0} : \exists K \text{ s.t. } |p_\lambda(\omega)| \leq K,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

である．ここで，p_λ のうち有界なものは $p_0 = 1$ しかないことに注意すると，一意的な状態価格密度が 1 で与えられることがわかる．そして，Artzner and Heath [1] が示したように，位相 τ に関する完備性が成立つ．これは定理 2.13 と整合的である．

結論としては，伝統的な完備性は $\mathbb{C}$ に $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_0)$ ノルムを入れた完備性であるから，上記の結果によれば，正の状態価格密度の一意性は $L^\infty(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_0)$ でしか成立たない．一方，同値なマルチンゲール測度の一意性は状態価格密度で考えると $L^1(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_0)$ での一意性となるから，これが Artzner and Heath の例で成立たないのは当然のことである．この例のような矛盾を引き起こした原因は課すべき双対性を無視したことである．

3 おわりに

以上述べてきたことをまとめると次のようになる：

- 資産価格付け理論の第 2 定理によれば，原始証券数が有限の場合，完備性と EMM(ELMM) の一意性は同値である．よって，完備性の下では，すべての冗長な証券は一意的な無裁定価格をもつ．Artzner and Heath [1] によって示されたように，原始証券数が無限の場合この第 2 定理は成り立たないが，完備性の概念を適切に変更することにより，原始証券数が無限であっても (一般化された) 第 2 定理が成立つ．
- 証券市場の完備性は，証券市場での取引によって任意のキャッシュ・フローを複製することができる，あるいは，任意の消費計画を達成できるということを意味する．その本質からいって，完備性は，無裁定の仮定，あるいは同値なマルチンゲール測度の存在とは独立に論じなければならない．キャッシュ・フローの空間に位相を考え，それに対する完備性という形で定義を拡張すると，完備性と無裁定が分離される．

ここからさらに先に進んでいくためには，以下のような問題を解決しなければならないと考えられる．

(i) 序論で述べたように，伝統的経済学において完備性から従う重要な結論は，均衡配分のパレート効率性であり，これは均衡が存在しなければ意味のないことである．無裁定がある意味で，経済学的均衡モデルとしての存立可能性 (viability) の必要条件となることから，完備性を議論する際に，無裁定を仮定することは自然であると考えることもできる．しかし，この新しい定義を用いたときの完備性の含意については今後注意深く吟味することが必要であろう．

(ii) 取引戦略の空間 $\mathbb{Y}$ の選択が Bättig [2], Bättig and Jarrow [3] と Jarrow, Jin and Madan [16], Jarrow and Madan [17] では本質的に異なるが，どちらが良いのか．有限個の証券しか取引できないような戦略を考える方が自然に思われる．

(iii) より技術的になるだけかもしれないが，1 時点でのキャッシュ・フローの複製ではなく，キャッシュ・フロー過程，あるいは消費過程の複製をもって完備性を定義することも考えられる．

(iv) 主体の主観的評価測度の空間 $\mathbb{Q}$ をもっと具体的に考える．あるいは，$\mathbb{Q}$ 上の別の位相を考えて，主体間の類似性を表現することは可能か．

参考文献

[1] Artzner, P. and Heath, D. (1995). Approximate completeness with multiple martingale measures, *Math. Finance*, **5**, 1–11.

[2] Bättig, R. J. (1999). Completeness of securities market models — An operator point of view, *Ann. Appl. Probab.*, **9**, 529–566.

[3] Bättig, R. J. and Jarrow, R. A. (1999). The second fundamental theorem of asset pricing: a new approach, *Rev. Fin. Stud.*, **12**, 1219–1235.

[4] Björk, T., Di Masi, G., Kabanov, Y. and Runggaldier, W. (1997). Towards a general theory of bond markets, *Finance Stochast.*, **1**, 141–174.

[5] Björk, T., Kabanov, Y. and Runggaldier, W. (1997). Bond market structure in the presence of marked point processes, *Math. Finance*, **7**, 211–239.

[6] Cox, J. C. and Rubinstein, M. (1985). *Options Markets*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[7] Delbaen, F. (1992). Representing martingale measures when asset prices are continuous and bounded, *Math. Finance*, **2**, 107–130.

[8] Dunford, N. and Schwartz, J. T. (1958). *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley and Sons, New York.

[9] Duffie, D. (1996). *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2nd ed., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.

[10] Duffie, D. and Huang, C. (1985). Implementing Arrow-Debreu equilibria by continuous trading of few long-lived securities, *Econometrica*, **53**, 1337–1356.

[11] Grothendieck, A. (1973). *Topological Vector Spaces*, Gordon and Breach, New York.

[12] Harrison, J. M. and Kreps, D. M. (1979). Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *J. Econ. Theory*, **20**, 381–408.

[13] Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981). Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes Appl.*, **11**, 215–260.

[14] Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1983). A stochastic calculus model of continuous trading: complete markets, *Stochastic Processes Appl.*, **15**, 313–316.

[15] Huberman, G. (1982). A simple approach to arbitrage pricing theory, *J. Econ. Theory*, **28**, 183–191.

[16] Jarrow, R. A., Jin, X. and Madan, D. B. (1999). The second fundamental theorem of asset pricing, *Math. Finance*, **9**, 255–273.

[17] Jarrow, R. and Madan, D. B. (1999). Hedging contingent claims on semimartingales, *Finance Stochast.*, **3**, 111–134.

[18] Lakner, P. (1993). Martingale measures for a class of right-continuous processes, *Math. Finance*, **3**, 43–53.

[19] Ross, S. A. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing, *J. Econ. Theory*, **13**, 341–360.

[20] 佐武 一郎 (1974). 線型代数学, 裳華房.

[21] Schaefer, H. H. (with M. P. Wolff) (1999). *Topological Vector Spaces*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin.