Оценка динамики волатильности рынка в периоды системных нестабильностей[1]

Представлена новая методика оценки величины VaR при помощи модифицированной GARCH-модели, эффективно оценивающая риски как в «спокойные» периоды финансового рынка, так и во время системных нестабильностей. Для проверки эффективности методики оценки VaR используются известные статистики, вычисляемые как на всем исследуемом временном интервале, так и в скользящем окне. Результаты локального и глобального применения этих статистик хорошо согласуются друг с другом, при этом статистики, вычисленные в скользящем окне, дают информацию о равномерности эффективности вычисления VaR. В частности, эффективность оценки VaR практически не меняется в периоды значительного роста цен по сравнению со спокойными периодами.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:
Value at Risk (VaR), модель GARCH, системная нестабильность, финансовый рынок.

И.Е. ДЕНЕЖКИНА
Кандидат техн. наук, доцент, заведующая кафедрой «Теория вероятностей и математическая статистика» ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», специалист по математическому моделированию динамических процессов и системам управления. Область научных интересов: математическое моделирование в финансах и экономике.

E-mail: yned@mail.ru

Г.Н. МАРТИРОСЯН
Студент факультета «Прикладная математика и информационные технологии» ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации». Область научных интересов: математическое моделирование и анализ сложных систем.

E-mail: gregmartirosyan@gmail.com

В.Ю. ПОПОВ
Доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», специалист по математическому моделированию сложных процессов и систем. Область научных интересов: эконофизика, математическое моделирование развивающихся систем.

E-mail: masterlu@mail.ru

А.Б. ШАПОВАЛ
Доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная математика» ФГОБУ ВПО «Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации», старший научный сотрудник Института теории прогноза землетрясений РАН, специалист по математическому моделированию стохастических нелинейных процессов. Область научных интересов: математическое моделирование в финансах и экономике, сложные системы, прогноз экстремальных событий.

E-mail: shapoval@mccme.ru

Введение

Стандартный подход к оценке Value at Risk (VaR) [2] основан на предположениях:

- будущее значение цены финансового инструмента порождается детерминированным процессом и случайной составляющей, которая имеет нормальное распределение;
- свойства цены остаются неизменными в течение определенного интервала времени (экономисты формализуют это предположение в терминах стационарности цены).

На основе последнего предположения, наиболее уязвимого, оцениваются характеристики случайной составляющей цены. В течение промежутков низкой волатильности его естественно считать приемлемым, однако при возрастании волатильности в течение эпизодов системных нестабильностей это предположение по меньшей мере сомнительно.

В настоящем исследовании предполагается, что эволюция цен описывается GARCH-моделью[3]: следующее значение цены представляется в виде суммы линейной комбинации предыдущих цен и случайной ошибки, дисперсия которой, в свою очередь, зависит от прошлого. Настройка параметров процесса проводится при обработке очередного значения цены локально по времени на предшествующей выборке цен фиксированной длительности, составляющей несколько недель. Длительность для исследуемого временного ряда выбирается на основе разработанной количественной процедуры, согласующейся с известными статистическими критериями. После оценки параметров GARCH-модели выделяется случайная составляющая цены. VaR определяется стандартным образом как диапазон цен, вероятность выхода за пределы которого имеет заранее заданную вероятность (квантиль распределения). Указанный подход сохраняет преимущества принятых в рамках Базель-2 правил (Ба́зель 2 – документ Базельского комитета по банковскому надзору «Международная конвергенция измерения капитала и стандартов капитала: новые подходы», содержащий методические рекомендации в области банковского регулирования): ясность и прозрачность используемой процедуры и возможность применения в автоматическом режиме. При этом практически устраняется недостаток Базель-2 правил, связанных со стационарностью цен. Кроме того, предложенный подход оказывается эффективнее Базель-2 правил в промежутки сильной волатильности.

Постановка задачи

Ключевым показателем риска финансовых инструментов на сегодня является величина VaR, которая используется большинством, если не всеми участниками фондового рынка. Для адекватного применения VaR необходимо знать распределение стоимости активов или сделать адекватные предположения относительно параметров этого распределения. На практике в подавляющем большинстве случаев используется нормальное распределение [6], иногда – более редкие колоколообразные распределения [4]. Нормальное распределение, с одной стороны, соответствует так называемым требованиям Базель-2, а с другой – приводит к недооценке риска, что обычно выгодно финансовым управляющим (об оптимистичности в прогнозировании будущих цен см.: [11]).

Сегодня существует большое количество моделей прогноза ожидаемой доходности и волатильности актива. Наиболее используемой сегодня моделью прогноза является GARCH [7].

В данной работе настройка алгоритмов для вычисления VaR проводится в скользящем временном окне достаточно малой протяженности. Полученные в нем значения стандартных характеристик используются при оценке адекватности алгоритмов. Построенный алгоритм основан на новой модификации GARCH-модели. Для обоснования его эффективности прогноз будущих значений наряду с GARCH-моделью проводился с помощью двух более простых моделей, экстраполирующих линейные тренды в будущее.

Исследуемые модели

Оценка VaR основана на неизвестном распределении будущего значения цены. В статье это распределение показано на трех моделях.

Модель 1. Без прогноза. Пусть r_t – доходность в момент времени t, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием μ и стандартным отклонением σ. Считается, что μ совпадает с известной доходностью в предыдущий момент времени. Значение σ вычисляется по некоторому количеству q предшествующих значений, которое будет определено позднее:

$r_t \sim N(\mu, \sigma)$;

$\mu = r_{t-1}$;

$\sigma = \delta(R)$,

где N – нормальное распределение со средним μ. Это наиболее простая модель оценки, в которой фактически не применяются эконометрические методы для прогноза: считается, что завтра доходность будет та же, что и сегодня, волатильность не меняется.

Модель 2. Тренд доходности

В отличие от предыдущей модели, математическое ожидание μ доходности r_t вычисляется как экстраполяция линейной аппроксимации доходности по предшествующим q значениям:

[1] Статья подготовлена по результатам исследований, выполненных за счет бюджетных средств по государственному заданию Финансового университета 2012 года. Работа поддержана грантом РФФИ 11-06-00278-а.

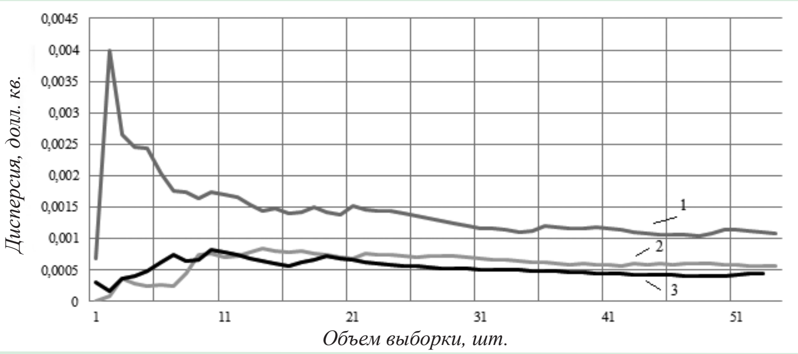
[2] Value at Risk (VaR) – стоимостная мера риска, выраженная в денежных единицах оценка величины, которую не превысят ожидаемые в течение данного периода времени потери с заданной вероятностью. Общепринятое во всем мире обозначение – VaR.

[3] GARCH-модель (Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic model) – обобщенная авторегрессионная модель гетероскедастичности, которая предполагает, что на текущую изменчивость дисперсии влияют как предыдущие изменения показателей, так и предыдущие оценки дисперсии (т.н. «старые новости»).

$r_t \sim N(\mu, \sigma)$.

«Тренд доходности» — более сложная модель, которую можно рассматривать как промежуточное звено между простой моделью 1 и сложной моделью 3. Прогноз доходности осуществляется по линейному тренду, оцененному на основе обучающей выборки. Волатильность прогнозируется как простая дисперсия.

Рис. 1. Зависимость прогнозируемой дисперсии от объема обучающей выборки для рассматриваемых моделей



1 – «Без прогноза»; 2 – тренд доходности; 3 – ARMA/GARCH

Модель 3. ARMA[4]/GARCH. Самая сложная из трех рассматриваемых моделей, которая является основной. Именно с ее помощью предлагается оценивать величину VaR. Для анализа и обоснования эффективности этой модели результаты оценки VaR, полученные в соответствии с ней, сравниваются с оценками VaR, построенными на основе моделей 1 и 2.

Рис. 2. Статистика Колмогорова – Смирнова для модели 3 ARMA/GARCH

1 – цена; 2 – статистика Колмогорова – Смирнова

$$r_t \sim N(\mu, \sigma);$$

$$\mu = \widehat{r_t} = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} b_i r_{t-1};$$

$$\sigma^2 = \widehat{\sigma^2}_t = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \varepsilon^2_{t-1} + \sum_{i=1}^{m} b_i \sigma^2_{t-1};$$

где a_i, b_i – параметры модели ARMA; α_i, β_i – параметры GARCH-модели; m – количество AR-членов; n – количество MA-членов; p – количество ARCH-членов; q – количество GARCH-членов; ε_t – разница между прогнозным и реальным r_t значением доходности в момент времени t (ошибка).

Процедура оценки эффективности моделей

Оценим качество перечисленных моделей на основе данных о ценах акций CISCO [13] при помощи следующего алгоритма.

Шаг 1. Определение оптимального объема обучающей выборки. Оптимальный объем обучающей выборки выбирался исходя из условия стабилизации прогнозируемой дисперсии. Поскольку зачастую оценить момент стабилизации легче визуально, чем с помощью какого-либо алгоритма, то на случайной выборке заданного объема (5% исходных данных) был построен прогноз дисперсии по предыдущим данным за период от 2 до 50 торговых дней. На рис. 1 показаны графики зависимости дисперсии от объема обучающей выборки для представленных выше моделей. Видно, что для данного временно́го ряда прогнозируемая дисперсия для всех рассматриваемых моделей стабилизируется начиная с объема обучающей выборки 30 торговых дней.

Шаг 2. Тест на соответствие нормальному распределению. Для проверки гипотезы о применимости нормального распределения при прогнозировании параметров с помощью модели ARMA/GARCH был построен следующий алгоритм. На каждый день на основе предыдущих 30 доходностей были спрогнозированы параметры распределения μ_t и σ_t. Далее каждое значение нормировалось относительно параметров, спрогнозированных на этот момент: $\hat{r}_t = (r_t - \mu_t)/\sigma_t$. Затем проводились проверка всех нормированных значений по критерию Пирсона и ряд проверок в скользящем 30-дневном окне по критерию Колмогорова – Смирнова [3].

Результаты обоих тестов не дали повода отвергнуть гипотезу о нормальности распределе-

[4] Модель авторегрессии – скользящего среднего (англ. autoregressive moving-average model, ARMA) – одна из математических моделей, использующихся для анализа и прогнозирования стационарных временных рядов в статистике.

ния параметров μ и σ на уровне значимости 0,99. Статистика критерия Колмогорова – Смирнова распределена достаточно равномерно во времени (рис. 2), так что, несмотря на непредсказуемое поведение цены, значения доходностей на всех исследуемых данных в равной степени нормальны.

Метод скользящего окна для проверки равномерности статистик был разработан для задач геофизики и гелиофизики [12, 10] и применен авторами для прогнозирования катастрофических событий на финансовых рынках [2, 9]. Традиционно равномерность проверяется с помощью статистических тестов (и это сделано в работе), однако визуальное изображение равномерности, на наш взгляд, является более информативным для анализа. Интересно, что тест Коломогорова – Смирнова (КС) показывает наилучшее согласие с гипотезой о нормальности на интервале [110, 120] и на правом конце (последние 10–15 точек), то есть на промежутках значительного роста. Однако на левом конце (<100) при слабом стабильном подъеме значение статистики КС устойчиво выше. В отношении рассматриваемых данных наша модификация модели GARCH по критерию КС является наилучшей при сильном росте цен.

Шаг 3. Получение распределения ошибок методов. Для каждой модели были оценены доверительные интервалы для прогнозируемых величин. Каждой доходности сопоставлялись квантили нормального распределения со спрогнозированными параметрами, далее строились векторы ошибок. Были рассчитаны квантили и ошибки VaR соответствующей надежности при α = 90, 95 или 99% как правого, так и левого хвостов нормального распределения (VaR сверху и снизу соответственно). Здесь под ошибкой VaR понимается выход наблюдаемой цены за пределы предсказанного промежутка.

$$\begin{cases} {}^{up}I_t^{\alpha} = 0, \text{ если } r_t < F^{-1}(\alpha, \mu_t, \sigma_t) \\ {}^{up}I_t^{\alpha} = 1, \text{ если } r_t > F^{-1}(\alpha, \mu_t, \sigma_t) \end{cases}$$

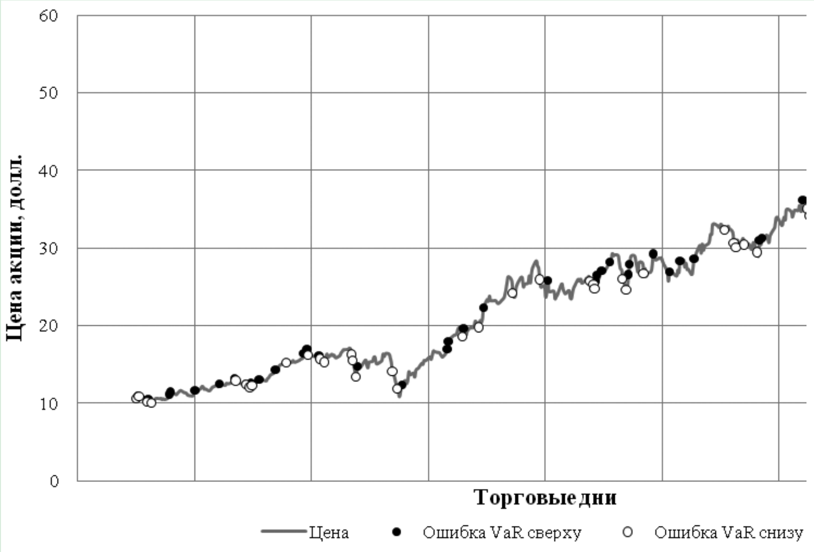
$$\begin{cases} {}^{dn}I_t^{\alpha} = 0, \text{ если } r_t < F^{-1}(1-\alpha, \mu_t, \sigma_t) \\ {}^{dn}I_t^{\alpha} = 1, \text{ если } r_t > F^{-1}(1-\alpha, \mu_t, \sigma_t) \end{cases}$$

где ${}^{up}I^{\alpha}_t$ – индикатор ошибки метода VaR сверху с доверительным уровнем α в момент времени t; ${}^{dn}I^{\alpha}_t$ – индикатор ошибки метода VaR снизу с доверительным уровнем α в момент времени t; F^{-1} – обратная функция Гаусса.

На рис. 3 показано распределение ошибок 95% VaR для модели 3 ARMA/GARCH.

[5] Тест отношения правдоподобия (англ. Likelihood ratio test, LR) – статистический тест, используемый для проверки ограничений на параметры статистических моделей, оцененных на основе выборочных данных.

Рис. 3. Распределение ошибок 95% VaR для модели 3 ARMA/GARCH

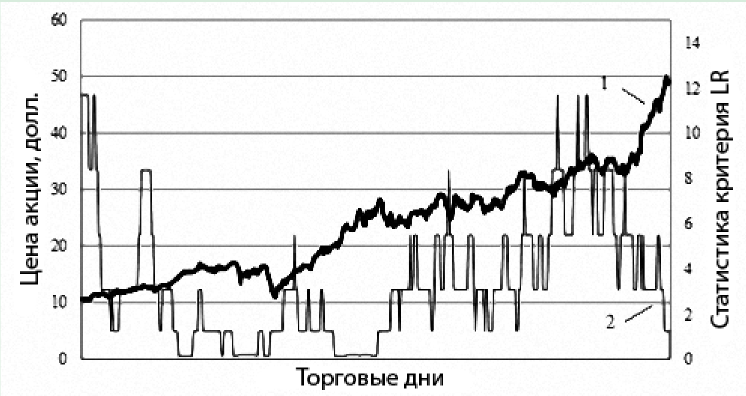


Результаты тестирования моделей

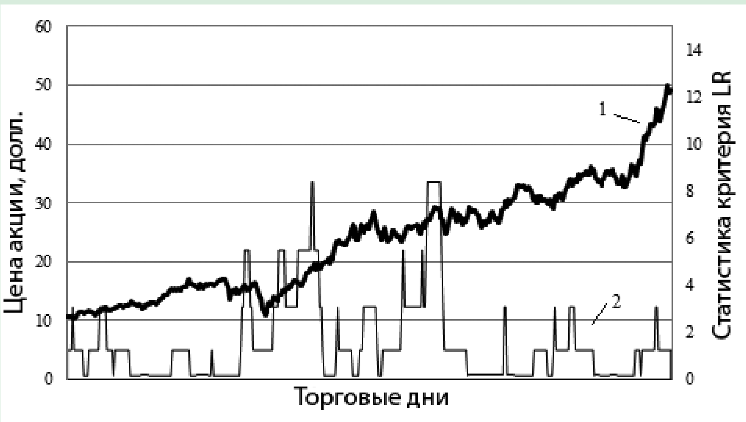
Показатель	VaR сверху			VaR снизу		
	Модель 1	Модель 2 (тренд)	Модель 3 (ARMA/GARCH)	Модель 1	Модель 2 (тренд)	Модель 3 (ARMA/GARCH)
Процент ошибок, %:						
90% VaR	18,4	12,5	14,0	19,2	15,0	15,4
95% VaR	12,9	8,0	8,5	13,7	9,3	10,4
99% VaR	6,3	3,0	4,2	5,1	4,0	3,2
Статистика LR:						
90% VaR	30,0	3,0	7,4	36,3	11,6	13,5
95% VaR	44,1	7,8	10,0	52,7	14,9	22,1
99% VaR	61,7	12,0	27,0	40,2	24,7	14,3
Абсолютные потери на 1 акцию:						
90% VaR	42,25	19,20	22,57	125,80	88,62	91,17
95% VaR	27,41	9,82	13,64	11,23	62,70	80,76
99% VaR	11,19	2,65	3,94	43,08	31,88	21,26

Рис. 4. Оценки 95%VaR сверху для моделей 1 (а), 2 (б), 3 (в)

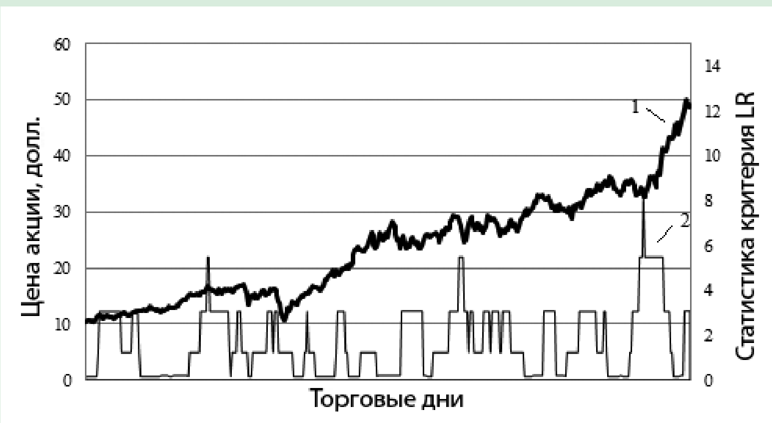
а



б



в



1 – цена; 2 – статистика критерия LR

Шаг 4. Тест отношения правдоподобия. Далее с помощью теста Likelihood ratio (LR)[5] [5] проверялось соответствие распределения ошибок VaR (α), построенных по α-квантилям, закону Бернулли с параметром p=1-α (гипотеза H_0) при альтернативной гипотезе о том, что параметр распределения p > 1-α.

Статистика теста выглядит следующим образом:

$$LR = -21n\left(\frac{L(\alpha)}{L(\hat{p})}\right) = -21n\left(\frac{\alpha^{N_0}\left(1-\alpha\right)^{N_1}}{\left(N_0/N\right)^{N_0}\left(N_1/N\right)^{N_1}}\right) \sim x^2(1)$$

где $L(\alpha)$ – функция правдоподобия для распределения Бернулли с параметром $p = 1 - \alpha$; L(p) – функция правдоподобия для распределения Бернулли с параметром N^1/N; N_0 – число случаев, когда метод VaR сработал корректно; N_1 – число ошибок метода VaR; N – общее число рассмотренных торговых дней; $N_0 = N - N_1$.

При этом, если LR>x^2(1), гипотеза H_0 принимается.

Данный тест также был проведен как для всего объема данных сразу, так и для скользящих 30 дней. Также для каждой модели прогноза были рассчитаны абсолютные внеплановые потери на одну акцию – сумма отклонений в денежном выражении при выходе за пределы доверительного интервала. Результаты общего теста представлены в таблице, где видно, что модель 2 имеет такую же эффективность, как и модель 3.

При известном распределении цен можно определить α-квантиль и применять его для оценки VaR на следующем шаге. Тогда, видимо, доля ошибок будет близка к α, однако они будут крайне неравномерно распределены по времени. Эффективное вычисление квантиля должно приводить не только к малой доле ошибок, но и к их равномерности во времени, поэтому при оценке риска важен процент ошибок метода VaR и их близость друг к другу. В соответствии с этим анализ эффективности моделей проводился в том числе на основе результатов LR-теста скользящих 30 дней. На рис. 4 представлены результаты оценки 95% VaR сверху для рассматриваемых моделей.

Анализ рис. 4 позволяет сделать следующие выводы.

● LR на рис. 4а значительно больше, чем на рис. 4б, в;

● среднее значение LR незначительно меньше для модели 2, чем для модели 3;

● модель 3 обладает наиболее равномерным распределением статистики.

Выводы

В работе представлена новая методика оценки величины VaR при помощи модифицированной модели GARCH, эффективно оценивающая риски как в спокойные периоды финансового рынка, так и во время системных нестабильностей.

Для проверки эффективности методики оценки VaR используются известные статистики, вычисляемые как на всем исследуемом временном интервале, так и в скользящем окне. Результаты локального и глобального применения этих статистик хорошо согласуются друг с другом, при этом статистики, вычисленные в скользящем окне, дают информацию о равномерности эффективности вычисления VaR. В частности, эффективность оценки VaR практически не меняется в периоды значительного роста цен по сравнению со спокойными периодами.

Предложенная в работе новая методика оценки VaR сохраняет преимущества принятых в рамках Базель-2 правил [1]:

ясность и прозрачность используемой процедуры,

возможность их применения в автоматическом режиме;

практическое устранение недостатка Базель-2 правил, связанных со стационарностью цен;

бóльшая эффективнеость, чем у Базель-2 правил, в течение промежутков сильной волатильности.

Список литературы:

1. **Гамза В.А., Вяткин В.Н.** Управление банковскими рисками. Базель-2: революция идеи и эволюция действий. М.: Экономика, 2006. 207 с.
2. **Денежкина И.Е., Попов В.Ю., Рубцов Б.Б. и др.** «Пузыри» как предвестники крахов на финансовых рынках. М.: ИТКОР, 2012. 146 с.
3. **Кобзарь А.И.** Прикладная математическая статистика. М.: Физматлит, 2006. 816 с.
4. **Лобанов А.А., Чугунов А.В.** Энциклопедия финансового риск-менеджмента. Альпина Паблишер, 2009. 936 с.
5. **Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А.** Эконометрика. М.: Дело, 2004. 576 с.
6. **Меньшиков И.С., Шелагин Д.А.** Рыночные риски: модели и методы. М.: ВЦ РАН, 2010. 56 с.
7. **Росси Э.** Одномерные GARCH модели: обзор // Квантиль. 2010. №8. С. 1–69.
8. **Хейфец И.** Тестирование распределений // Квантиль. 2011. №9. С. 25–35.
9. **Шаповал А.Б., Попов В.Ю.** Численно-аналитический алгоритм оценки предсказуемости крахов // Математическое моделирование. 2011. №23. С. 65–74.
10. **Blanter E.M., Shnirman M.G., Le Mouel J.-L.** Solar variability: Evolution of correlation properties // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2005. Vol. 67. P. 521–534.
11. **Guedj O., Bouchaud J.-P.** Experts earning forecasts: bias, herding and gossamer information // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2005. Vol. 8. P. 933–946.
12. **Shnirman M., Shapoval A.** Variable predictability in deterministic dissipative sandpile // Nonlinear Processes in Geophysics. 2010. Vol. 17. P. 85–91.