

УДК 621.31

doi: 10.20998/2074-272X.2016.3.10

Ю.А. Сиротин

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ТРЕХФАЗНОГО ТОКА ПРИ АССИМЕТРИЧНОЙ АКТИВНО-РЕАКТИВНОЙ НАГРУЗКЕ В ЧЕТЫРЕХПРОВОДНОЙ ЦЕПИ

Для 3-фазной схемы электропитания рассмотрено синусоидальный несимметричный режим. При асимметричной нагрузке и асимметричному активно-реактивному навантаженню для 4-проводной сети получено ортогональное разложение трехфазного тока. Четыре составляющие разложения классифицированы активностью/реактивностью та симметрией/асимметрией навантаження та мають однозначний електроенергетичний зміст. Для 4-проводной цепи с несимметричной нагрузкой при несимметричном напряжении полученное уравнение мощности развивает теорию токовых физических составляющих (Currents' Physical Components – CPC). Библ. 8, рис. 1.

Ключові слова: трифазне коло, активна і реактивна потужність, потужність зсуву, рівняння потужності, незбалансований струм та режим, активно-реактивне несимметричне навантаження, Currents' Physical Components (CPC).

Для 3-фазной схемы электропитания рассмотрен синусоидальный несимметричный режим. При несимметричном напряжении и асимметричной активно-реактивной нагрузке для 4-проводной сети получено ортогональное разложение трехфазного тока. Четыре составляющие разложения классифицированы активностью/реактивностью и симметрией/асимметрией нагрузки и имеют однозначный электроэнергетический смысл. Для 4-проводной цепи с несимметричной нагрузкой при несимметричном напряжении полученное уравнение мощности развивает теорию токовых физических составляющих (Currents' Physical Components – CPC). Библ. 8, рис. 1.

Ключевые слова: трехфазная цепь, активная и реактивная мощность, мощность сдвига, уравнение мощности, несбалансированный ток и режим, активно-реактивная несимметричная нагрузка, несимметричное напряжение, Currents' Physical Components (CPC).

Введение. Активно-реактивная несимметричная нагрузка потребляет не только электроэнергию (ЭЭ) активной мощности, но и ЭЭ неактивных составляющих полной мощности (ПМ), что приводит к дополнительным потерям. Эффективным решением задачи сокращения потерь и повышения точности учета ЭЭ является совместное применение компенсирующих устройств и дифференцированных средств учета потребляемой ЭЭ. Однако, даже в синусоидальном режиме, существующие средства учета измеряют ЭЭ, обусловленную только симметрией активных и реактивных элементов нагрузки (активную мощность и реактивную мощность сдвига). В реальных условиях асимметрии напряжения составляющие ПМ, обусловленные асимметрией активно-реактивных элементов нагрузки, приводят к дополнительным потерям, однако не измеряются, не учитываются и не компенсируются.

Постановка проблемы. Компенсация, измерение и учет составляющих ПМ – связанные, дополняющие друг друга задачи эффективного потребления ЭЭ. Эти задачи с единых позиций должны решаться в рамках общей теории мощности, используя ортогональное разложение 3-фазного тока [1-6]. Взаимная ортогональность компонент разложения позволяет однозначно оценить потери независимо ими обусловленные. Широко применяемая теория мощности Currents' Physical Components (CPC) [2, 4-6] использует методологию ортогонального разложения. В синусоидальном несбалансированном режиме 3-фазный ток содержит две ортогональные компоненты: сбалансированную и несбалансированную. Сбалансированная компонента (обусловлена симметрией активно-реактивных элементов нагрузки) ортогонально содержит активный и реактивный ток как для трех, так и для 4-проводной цепи. Асимметрия активно-реактивных элементов нагрузки, как при симметричном, так и при асимметричном напряжении приводит к возникновению тока небаланса.

К сожалению, даже в синусоидальном режиме CPC теория разработана либо для 3-проводных схем, либо для 4-проводных схем при симметричном на-

пряжении [2, 4-6]. Так, для 3-проводной схемы при несимметричном напряжении в CPC теории мощности ток небаланса раскладывается на две компоненты, используя метод симметричных компонент [6], что не разделяет асимметрию активных и реактивных элементов нагрузки в явном виде.

Цель работы – для несбалансированного режима при несимметричном напряжении в 3-фазной 4-проводной схеме получить ортогональное 4-компонентное разложение 3-фазного тока, классифицируемое симметрией/асимметрией отдельно активных и отдельно реактивных элементов нагрузки.

Периодические энергетические процессы. При рассмотрении 3-фазной 4-проводной цепи полагаем, что напряжения в фазах измеряются относительно нейтрали (рис. 1).

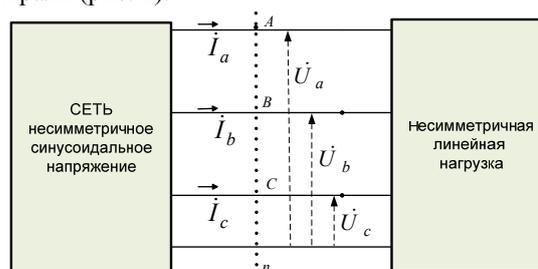


Рис. 1. 3-фазная 4-проводная схема электропитания с несимметричной нагрузкой - синусоидальный режим

В каждый момент времени мгновенные значения (м.з.) напряжений (относительно «нейтрального» проводника) и м.з. токов в фазах рассматриваются как 3-мерные вектора (матрицы столбцы) арифметического 3-мерного пространства $R^{(3)}$

$$\mathbf{u}(t) = [u_a(t) \ u_b(t) \ u_c(t)]^T, \quad \mathbf{i}(t) = [i_a(t) \ i_b(t) \ i_c(t)]^T, \quad (1)$$
здесь и дальше τ – знак транспонирования.

Установившийся энергетический режим в 3-фазном сечении $\langle A, B, C \rangle$ определен 3-мерными T -периодическими кривыми тока и напряжения:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t+T), \quad \mathbf{i}(t) = \mathbf{i}(t+T)$$

© Ю.А. Сиротин

Множество 3-мерных (3-фазных) T -периодических векторных кривых

$$\mathbf{x}(t) = [x_a(t) \ x_b(t) \ x_c(t)]^T, \quad t \in (v, v+T) \quad (2)$$

с конечным действующим значением (д.з.) – root mean square (rms)

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\frac{1}{T} \int_v^{v+T} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{x}(t) dt} < \infty \quad (3)$$

образуют гильбертово пространство

$$L_2^{(3)}(T) = \{\mathbf{x}(t), \quad t \in (v, v+T) : \|\mathbf{x}\| < \infty\}. \quad (4)$$

Для векторных кривых $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t) \in L_2^{(3)}(T)$ определено скалярное произведение (СП)

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \frac{1}{T} \int_v^{v+T} \mathbf{x}(t)^T \mathbf{y}(t) dt = \frac{1}{T} \int_v^{v+T} (\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) dt \quad (5)$$

как интегральное среднее скалярных произведений м.з. в 3-мерном пространстве $R^{(3)}$.

В частности, для активной мощности

$$\langle \mathbf{i}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{T} \int_v^{v+T} \underbrace{\mathbf{i}(t)^T \mathbf{u}(t)}_{p(t)} dt = \frac{1}{T} \int_v^{v+T} (\mathbf{i}(t), \mathbf{u}(t)) dt = P. \quad (6)$$

Мгновенная мощность

$$p(t) = \mathbf{i}^T \mathbf{u} = i_a(t)u_a(t) + i_b(t)u_b(t) + i_c(t)u_c(t) \quad (7)$$

равна скорости передачи электроэнергии через сечение $\langle A, B, C \rangle$. В пространстве (4) справедливо неравенство Коши-Шварца

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|. \quad (8)$$

В частности, активная мощность не превосходит кажущуюся (полную) мощность

$$P = \langle \mathbf{i}, \mathbf{u} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{i}\|.$$

Синусоидальный режим и 3-комплексы.

3-мерные кривые м.з. синусоидальных процессов напряжения и тока

$$\mathbf{u}(t) = \sqrt{2} \Re e [U e^{j\omega t}], \quad \mathbf{i}(t) = \sqrt{2} \Re e [I e^{j\omega t}]. \quad (9)$$

T -периодичны ($T\omega = 2\pi$) и полностью определены 3-комплексами напряжения и тока

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a e^{j\psi_a} \\ U_b e^{j\psi_b} \\ U_c e^{j\psi_c} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} \dot{I}_a \\ \dot{I}_b \\ \dot{I}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a e^{j\varphi_a} \\ I_b e^{j\varphi_b} \\ I_c e^{j\varphi_c} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

– векторами комплексных д.з. (complex rms) напряжения и тока.

3-комплексы (10) вычисляются по 3-мерным кривым м.з. синусоидальных процессов напряжения и тока

$$\mathbf{U} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_v^{v+T} \mathbf{u}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \mathbf{I} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_v^{v+T} \mathbf{i}(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (11)$$

Множество 3-комплексов образует 3-мерное комплексное пространство $C^{(3)}$ с комплексным СП

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \mathbf{X}^T \mathbf{Z}^* = \dot{X}_a \dot{Z}_a^* + \dot{X}_b \dot{Z}_b^* + \dot{X}_c \dot{Z}_c^*. \quad (12)$$

Здесь и дальше * – знак комплексного сопряжения. При этом для rms справедливо

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \mathbf{X}^T \mathbf{X}^* = \sum_m \dot{X}_m \dot{X}_m^* = \sum_m X_m^2 = |\mathbf{X}|^2 = X^2.$$

В частности,

$$\|\mathbf{u}\| = |\mathbf{U}| = U, \quad \|\mathbf{i}\| = |\mathbf{I}| = I. \quad (13)$$

Для пары синусоидальных процессов $\mathbf{x}(t),$

$\mathbf{z}(t) \in L_2^{(3)}(T)$ справедливо равенство

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle = \Re e [\mathbf{X}^T \mathbf{Z}^*] = \Re e [\mathbf{Z}^T \mathbf{X}^*]. \quad (14)$$

Тем самым, если 3-комплексы ортогональны, то ортогональны и соответствующие 3- мерные кривые. Обратное утверждение не верно.

Из (14) следует, что в синусоидальном режиме активная мощность адекватно представляется в терминах 3-комплексов напряжения и тока

$$P = \langle \mathbf{i}, \mathbf{u} \rangle = \Re e [\mathbf{I}^T \mathbf{U}^*] = \Re e [\mathbf{U}^T \mathbf{I}^*]. \quad (15)$$

Временной сдвиг 3-мерной кривой м.з. синусоидального напряжения $\mathbf{u}_\perp(t) = \mathbf{u}(t - T/4)$ равносильен повороту 3-комплекса напряжения в пространстве $C^{(3)}$ на 90°

$$\mathbf{u}_\perp(t) = \sqrt{2} \Re e [U_\perp e^{j\omega t}] = \sqrt{2} \Re e [-jU e^{j\omega t}]. \quad (16)$$

При этом $\|\mathbf{u}_\perp\| = \|\mathbf{u}\|$. Так как

$$\langle \mathbf{u}_\perp, \mathbf{u} \rangle = \Re e [-jU^T U^*] = \Re e [-j|U|^2] = 0,$$

то 3-мерные кривые напряжения ортогональны ($\mathbf{u} \perp \mathbf{u}_\perp$).

Интегральное определение реактивной мощности (известное как мощность сдвига) представляется в терминах 3-комплексов напряжения и тока

$$Q = \langle \mathbf{i}, \mathbf{u}_\perp \rangle = \Re e [-jU^T I^*] = \text{Im} [U^T I^*]. \quad (17)$$

Мощности (15) и (17) связаны комплексной мощностью – СП 3-комплексов напряжения и тока

$$\dot{S} = U^T I^* = \Re e [U^T I^*] + j \text{Im} [U^T I^*] = P + jQ. \quad (18)$$

В синусоидальном режиме при симметричной нагрузке справедливо уравнение мощностей

$$P^2 + Q^2 = \|\mathbf{i}\| \cdot \|\mathbf{u}\|. \quad (19)$$

Эквивалентные проводимости тока нагрузки.

В синусоидальном режиме 3-комплексы тока и напряжения позволяют определить эквивалентные проводимости тока в сечении $\langle A, B, C \rangle$

$$\dot{Y}_m = G_m - jB_m = \frac{\dot{I}_m}{U_m}, \quad m \in \{a, b, c\} \quad (20)$$

и представить 3-комплекс 3-фазного тока в матричном виде

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \dot{U}_a \dot{Y}_a \\ \dot{U}_b \dot{Y}_b \\ \dot{U}_c \dot{Y}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_a & 0 & 0 \\ 0 & \dot{Y}_b & 0 \\ 0 & 0 & \dot{Y}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{U}_c \end{bmatrix} = \hat{Y} \mathbf{U} \quad (21)$$

с помощью диагональной матрицы

$$\hat{Y} = \text{diag} \{ \dot{Y}_a, \dot{Y}_b, \dot{Y}_c \}. \quad (22)$$

Для 4-проводной цепи с нагрузкой типа звезда эквивалентные проводимости (20) тока в сечении $\langle A, B, C \rangle$ равны проводимостям фаз нагрузки.

Активная мощность и мощность сдвига адекватно представляются квадратичными формами 3-комплекса напряжения

$$P = \Re e [U^T \hat{Y}^* U^*], \quad Q = \text{Im} [U^T \hat{Y}^* U^*]. \quad (23)$$

Активная мощность (мощность сдвига) зависит только от проводимостей активных (реактивных) элементов нагрузки

$$P = \sum_m G_m |\dot{U}_m|^2, \quad Q = \sum_m B_m |\dot{U}_m|^2. \quad (24)$$

Потери полного 3-фазного тока на один Ом

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \Re e [\mathbf{I}^T \mathbf{I}^*] = \sum_m (G_m^2 + B_m^2) |\dot{U}_m|^2. \quad (25)$$

Активный и реактивный ток. Для 3-мерной кривой синусоидального тока (9) справедливо

$$\mathbf{i}(t) = \sqrt{2} \Re e [\hat{Y} U e^{j\omega t}], \quad \mathbf{I} = \hat{Y} \mathbf{U}. \quad (26)$$

Алгебраическая форма комплексных эквивалентных проводимостей (20) позволяет разложить диагональную матрицу (22)

$$\hat{Y} = \hat{G} - j\hat{B}, \quad (27)$$

$$\hat{G} = \text{diag}\{G_a, G_b, G_c\}, \quad \hat{B} = \text{diag}\{B_a, B_b, B_c\} \quad (28)$$

и разделить 3-комплекс тока на две составляющие, ассоциированные с активными и реактивными элементами нагрузки

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_A + \mathbf{I}_R, \quad \mathbf{I}_A = \hat{G}\mathbf{U}, \quad \mathbf{I}_R = -j\hat{B}\mathbf{U} = \hat{B}\mathbf{U}_\perp. \quad (29)$$

Разложение 3-мерной кривой тока (26)

$$\mathbf{i}(t) = \mathbf{i}_A(t) + \mathbf{i}_R(t) \quad (30)$$

на активный ток и реактивный ток

$$\mathbf{i}_A(t) = \sqrt{2}\Re e[\hat{G}\mathbf{U}e^{j\omega t}], \quad \mathbf{i}_R(t) = \sqrt{2}\Re e[\hat{B}\mathbf{U}_\perp e^{j\omega t}] \quad (31)$$

ортогонально в пространстве 3-мерных кривых (4).

Так как величина

$$\mathbf{I}_A^T \mathbf{I}_R^* = (\hat{G}\mathbf{U})^T (-j\hat{B}\mathbf{U})^* = j \sum_m U_m^2 G_m B_m \quad (32)$$

чисто мнимая, то 3-мерные кривые (31) ортогональны $\langle \mathbf{i}_A, \mathbf{i}_R \rangle = \Re e[\mathbf{I}_A^T \mathbf{I}_R^*] = 0 \Rightarrow \mathbf{i}_A \perp \mathbf{i}_R$. (33)

В силу ортогональности разложения (29) для потерь на один Ом справедливо равенство Пифагора

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_A\|^2 + \|\mathbf{i}_R\|^2. \quad (34)$$

Потери активного и реактивного тока

$$\|\mathbf{i}_A\|^2 = \Re e[\mathbf{I}_A^T \mathbf{I}_A^*] = \sum_m G_m^2 |\dot{U}_m|^2, \quad (35)$$

$$\|\mathbf{i}_R\|^2 = \Re e[\mathbf{I}_R^T \mathbf{I}_R^*] = \sum_m B_m^2 |\dot{U}_m|^2 \quad (36)$$

определяют потери полного тока (25). При этом

$$\|\mathbf{i}_A\|^2 \leq \|\mathbf{i}\|^2, \quad \|\mathbf{i}_R\|^2 \leq \|\mathbf{i}\|^2.$$

Активный ток обеспечивает поставку ЭЭ с активной мощностью полного тока (24)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{i}_A \rangle &= \Re e[\mathbf{U}^T \mathbf{I}_A^*] = \Re e[\mathbf{U}^T \hat{G}\mathbf{U}^*] = \\ &= \sum_m G_m |\dot{U}_m|^2 = \langle \mathbf{i}, \mathbf{u} \rangle = P. \end{aligned} \quad (37)$$

Реактивный ток обеспечивает передачу ЭЭ мощности сдвига полного тока (24)

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{i}_R, \mathbf{u}_\perp \rangle &= \Re e[-j\mathbf{U}^T \mathbf{I}_R^*] = \text{Im}[\mathbf{U}^T \hat{B}\mathbf{U}^*] = \\ &= \sum_m B_m |\dot{U}_m|^2 = \langle \mathbf{i}, \mathbf{u}_\perp \rangle = Q. \end{aligned} \quad (38)$$

В разложении (30) активный (реактивный) ток обусловлен суммарно симметрией и асимметрией активных (реактивных) элементов нагрузки.

Сбалансированная компонента тока. Синусоидальный режим *сбалансирован*, если 3-комплексы тока и напряжения (10) коллинеарны (параллельны $\mathbf{I} \parallel \mathbf{U}$) [7, 8]

$$\mathbf{I} \parallel \mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{I} = \beta \mathbf{U} \quad (\beta = \beta' + j\beta'', \quad \beta \neq 0). \quad (39)$$

Режим *реально* сбалансирован [7, 8], если $\text{Im}[\beta] = \beta'' = 0$. Если нагрузка симметрична, то режим сбалансирован при любом несимметричном напряжении.

Для несбалансированного режима 3-комплекс компонентов тока, сбалансированного с 3-фазным напряжением, равен проекции 3-комплекса тока на 3-комплекс напряжения в пространстве $C^{(3)}$

$$\mathbf{I}_S = (\mathbf{I}^T \mathbf{v}^*) \mathbf{v} = \frac{(\mathbf{I}^T \mathbf{U}^*) \mathbf{U}}{|\mathbf{U}|^2}. \quad (40)$$

Здесь и дальше:

$$\mathbf{v} = [\dot{v}_a \quad \dot{v}_b \quad \dot{v}_c]^T, \quad |\mathbf{v}|^2 = v_a^2 + v_b^2 + v_c^2 = 1 \quad (41)$$

– орт 3-комплекса напряжения

$$\mathbf{U} = |\mathbf{U}| \mathbf{v}, \quad \dot{U}_m = U \dot{v}_m \quad (m \in \{a, b, c\}). \quad (42)$$

В терминах проводимостей 3-комплекс тока баланса (40)

$$\mathbf{I}_S = \frac{(\mathbf{I}^T \mathbf{U}^*) \mathbf{U}}{|\mathbf{U}|^2} = \underbrace{(\mathbf{S}^* / U^2)}_{\dot{y}_s} \cdot \mathbf{U} = \dot{y}_s \mathbf{U}. \quad (43)$$

Здесь и дальше:

$$\dot{y}_s = \mathbf{S}^* / U^2 = \dot{Y}_a v_a^2 + \dot{Y}_b v_b^2 + \dot{Y}_c v_c^2 \quad (44)$$

– эквивалентная комплексная проводимость сбалансированной компоненты тока;

$$\mathbf{S}^* = (\mathbf{U}^T \mathbf{I}^*)^* = \mathbf{I}^T \mathbf{U}^* = \mathbf{U}^T \hat{Y} \mathbf{U}^*$$

– комплексно-сопряженная комплексная мощность.

В терминах орта 3-комплекса напряжения (42) активная и реактивная мощность имеют эквивалентные формы представления:

$$P = \Re e[\dot{S}] = \mathbf{U}^T \hat{G} \mathbf{U}^* = U^2 \sum_m G_m v_m^2; \quad (45)$$

$$Q = \text{Im}[\dot{S}] = \mathbf{U}^T \hat{B} \mathbf{U}^* = U^2 \sum_m B_m v_m^2. \quad (46)$$

Эквивалентная комплексная проводимость (44) 3-кривой тока баланса

$$\mathbf{i}_s(t) = \sqrt{2}\Re e[\dot{y}_s \mathbf{U} e^{j\omega t}], \quad \mathbf{I}_s = \dot{y}_s \mathbf{U} \quad (47)$$

во всех фазах одинакова и равна средневзвешенной сумме эквивалентных комплексных проводимостей фаз (20). Весовые множители определены ортом 3-комплекса напряжения (42).

Если напряжение симметрично прямой последовательности (III), то

$$\mathbf{v} = (1/\sqrt{3})[1 \quad \alpha^* \quad \alpha]^T, \quad v_a^2 = v_b^2 = v_c^2 = 1/3, \quad (48)$$

где $\alpha = e^{j120^\circ} = -1/2 + j\sqrt{3}/2$.

Если нагрузка асимметрична

$$\dot{y}_s \neq \dot{Y}_a, \quad \dot{y}_s \neq \dot{Y}_b, \quad \dot{y}_s \neq \dot{Y}_c, \quad (49)$$

то режим несбалансирован при любом напряжении.

Комплексная проводимость тока баланса (47)

$$\dot{y}_s = \mathbf{g}_s - j\mathbf{b}_s, \quad (50)$$

определяет проводимости, ассоциированные с симметрией активных и реактивных элементов нагрузки

$$\mathbf{g}_s = G_a v_a^2 + G_b v_b^2 + G_c v_c^2; \quad (51)$$

$$\mathbf{b}_s = B_a v_a^2 + B_b v_b^2 + B_c v_c^2. \quad (52)$$

Эти проводимости равны средневзвешенным суммам проводимостей фаз. Если нагрузка асимметрична, то

$$\mathbf{g}_s \neq G_a, \quad \mathbf{g}_s \neq G_b, \quad \mathbf{g}_s \neq G_c; \quad (53)$$

$$\mathbf{b}_s \neq B_a, \quad \mathbf{b}_s \neq B_b, \quad \mathbf{b}_s \neq B_c. \quad (54)$$

Проводимости (51, 52) характеризуют симметрию активных и реактивных элементов нагрузки по фазам для 3-фазного напряжения.

3-комплекс (43) сбалансированной компоненты имеет две составляющие: активную и реактивную

$$\mathbf{I}_{sA} = \mathbf{g}_s \mathbf{U}, \quad \mathbf{I}_{sR} = -j\mathbf{b}_s \mathbf{U} = \mathbf{b}_s \mathbf{U}_\perp \quad (56)$$

и обеспечивает разложение сбалансированного тока

$$\mathbf{i}_s(t) = \mathbf{i}_{sA}(t) + \mathbf{i}_{sR}(t) \quad (57)$$

на составляющие, ассоциированные с активными и реактивными элементами нагрузки:

$$\mathbf{i}_{sA}(t) = \sqrt{2}\Re e[\mathbf{I}_{sA} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\Re e[\mathbf{g}_s \mathbf{U} e^{j\omega t}], \quad (58)$$

$$\mathbf{i}_{sR}(t) = \sqrt{2}\Re e[\mathbf{I}_{sR} e^{j\omega t}] = \sqrt{2}\Re e[\mathbf{b}_s \mathbf{U}_\perp e^{j\omega t}]. \quad (59)$$

3-кривые (58) и (59) ортогональны, так как

$$\langle \mathbf{i}_{sA}, \mathbf{i}_{sR} \rangle = \Re e[j \sum_m U_m^2 \mathbf{g}_m \mathbf{b}_m] = 0. \quad (60)$$

В силу ортогональности разложению (57) для компонент тока справедливо равенство Пифагора

$$\mathbf{i}_{sA}(t) \perp \mathbf{i}_{sR}(t) \Rightarrow I_{sA}^2 + I_{sR}^2 = I_s^2; \quad (61)$$

$$I_{sA}^2 = \mathbf{g}_s^2 U^2, \quad I_{sR}^2 = \mathbf{b}_s^2 U^2.$$

Из (58) следует

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{i}_{sA} \rangle = \operatorname{Re}[\mathbf{U}^T \mathbf{I}_{sA}^*] = \operatorname{Re}[\mathbf{U}^T \mathbf{g}_s \mathbf{U}^*] = P. \quad (62)$$

Так как сбалансированный активный ток *реально* параллелен напряжению ($\mathbf{I}_{sA} \parallel \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{I}_{sA} = \mathbf{g}_s \mathbf{U}$), то он обеспечивает поставку электроэнергии активной мощности (62) с минимальными потерями [7]

$$\|\mathbf{i}_{sA}\| \leq \|\mathbf{i}_A\| \leq \|\mathbf{i}\|. \quad (63)$$

При этом $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{i}_{sA} \rangle = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{i}_{sA}\|$.

Сбалансированный реактивный ток обеспечивает поставку ЭЭ мощности сдвига

$$\langle \mathbf{u}_\perp, \mathbf{i}_{sR} \rangle = \operatorname{Re}[-j \mathbf{U}^T \mathbf{I}_{sR}^*] = \langle \mathbf{u}_\perp, \mathbf{i} \rangle = Q. \quad (64)$$

Так как сбалансированный реактивный ток *реально* параллелен напряжению $\mathbf{I}_{sR} \parallel \mathbf{U}_\perp \Rightarrow \mathbf{I}_{sR} = \mathbf{b}_s \mathbf{U}_\perp$, то он обеспечивает поставку электроэнергии реактивной мощности сдвига с минимальными потерями $\|\mathbf{i}_{sR}\| \leq \|\mathbf{i}_R\| \leq \|\mathbf{i}\|$. При этом

$$|Q| = |\langle \mathbf{u}_\perp, \mathbf{i}_{sR} \rangle| = \|\mathbf{u}_\perp\| \cdot \|\mathbf{i}_{sR}\|. \quad (65)$$

Несбалансированный ток и асимметрия проводимостей нагрузки. В несбалансированном режиме несбалансированная составляющая 3-комплекса тока (ток небаланса) определена как ортогональное дополнение сбалансированной составляющей (40)

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I} - \mathbf{I}_S, \quad (\mathbf{I}_D \perp \mathbf{I}_S). \quad (66)$$

Несбалансированная компонента (66) может быть представлена с помощью векторного произведения в пространстве 3-комплексов $C^{(3)}$ [7, 8].

Из (21) и (47) следует

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I} - \mathbf{I}_S = \hat{\mathbf{Y}} \mathbf{U} - \dot{\mathbf{y}}_s \mathbf{U} = \underbrace{(\hat{\mathbf{Y}} - \dot{\mathbf{y}}_s)}_{\hat{\mathbf{Y}}_D} \mathbf{U} = \hat{\mathbf{Y}}_D \mathbf{U}. \quad (67)$$

Матричная форма 3-комплекса тока небаланса

$$\mathbf{I}_D = \hat{\mathbf{Y}}_D \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}}_{Da} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\mathbf{Y}}_{Db} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\mathbf{Y}}_{Dc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_a \\ \dot{U}_b \\ \dot{U}_c \end{bmatrix}. \quad (68)$$

использует комплексную диагональную матрицу

$$\hat{\mathbf{Y}}_D = \operatorname{diag}\{\dot{\mathbf{Y}}_{Da}, \dot{\mathbf{Y}}_{Db}, \dot{\mathbf{Y}}_{Dc}\} \quad (69)$$

эквивалентных проводимостей тока небаланса

$$\dot{\mathbf{Y}}_{Dm} = \dot{\mathbf{Y}}_m - \dot{\mathbf{y}}_s, \quad m \in \{a, b, c\}. \quad (70)$$

Если напряжение симметрично ПП, то (48) и

$$\dot{\mathbf{Y}}_{Dm} = (2\dot{\mathbf{Y}}_m - \sum_{k \neq m} \dot{\mathbf{Y}}_k) / 3, \quad m \in \{a, b, c\}. \quad (71)$$

Комплексные проводимости (70) характеризуют рассеяние по фазам проводимостей нагрузки относительно проводимости баланса. Небаланс (асимметрия) определяет несбалансированный ток

$$\mathbf{i}_u(t) = \sqrt{2} \Re e[\mathbf{I}_D e^{j\omega t}], \quad (72)$$

который ортогонален напряжению

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{i}_u \rangle &= \operatorname{Re}[\mathbf{U}^T (\hat{\mathbf{Y}}_D \mathbf{U})^*] = \operatorname{Re}[U^2 \sum_m v_m^2 (\dot{\mathbf{Y}}_m - \dot{\mathbf{y}}_s)] = \\ &= \operatorname{Re}[U^2 (\underbrace{\sum_m v_m^2 \dot{\mathbf{Y}}_m}_{\dot{\mathbf{y}}_s} - \dot{\mathbf{y}}_s)] = 0. \end{aligned} \quad (73)$$

При этом из (67) следует разложение

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_S + \mathbf{I}_D, \quad \mathbf{i}(t) = \mathbf{i}_s(t) + \mathbf{i}_u(t). \quad (74)$$

Рассеяние (небаланс) по фазам отдельно активных и реактивных элементов нагрузки

$$\mathbf{g}_{Dm} = \mathbf{G}_m - \mathbf{g}_s, \quad \mathbf{b}_{Dm} = \mathbf{B}_m - \mathbf{b}_s, \quad m \in \{a, b, c\} \quad (75)$$

представляется диагональными матрицами проводимостей активных и реактивных элементов нагрузки:

$$\hat{\mathbf{g}}_D = \operatorname{diag}\{\mathbf{g}_{Da}, \mathbf{g}_{Db}, \mathbf{g}_{Dc}\},$$

$$\hat{\mathbf{b}}_D = \operatorname{diag}\{\mathbf{b}_{Da}, \mathbf{b}_{Db}, \mathbf{b}_{Dc}\}.$$

Небаланс по фазам (асимметрия проводимостей фаз) отдельно активных и реактивных элементов нагрузки определяет разложение 3-комплекса тока небаланса на две компоненты

$$\mathbf{I}_D = \mathbf{I}_{DA} + \mathbf{I}_{DR}, \quad (76)$$

$$\mathbf{I}_{DA} = \hat{\mathbf{g}}_D \mathbf{U} = [\mathbf{g}_{Da} \dot{U}_a \quad \mathbf{g}_{Db} \dot{U}_b \quad \mathbf{g}_{Dc} \dot{U}_c]^T, \quad (77)$$

$$\mathbf{I}_{DR} = -j \hat{\mathbf{b}}_D \mathbf{U} = -j [\mathbf{b}_{Da} U_a \quad \mathbf{b}_{Db} U_b \quad \mathbf{b}_{Dc} U_c]^T. \quad (78)$$

Справедливо разложение несбалансированного тока

$$\mathbf{i}_u(t) = \mathbf{i}_{uA}(t) + \mathbf{i}_{uR}(t), \quad (79)$$

где $\mathbf{i}_{uA}(t) = \sqrt{2} \Re e[\mathbf{I}_{DA} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} \Re e[\hat{\mathbf{g}}_D \mathbf{U} e^{j\omega t}]$, (80)

$$\mathbf{i}_{uR}(t) = \sqrt{2} \Re e[\mathbf{I}_{DR} e^{j\omega t}] = \sqrt{2} \Re e[\hat{\mathbf{b}}_D \mathbf{U} e^{j\omega t}] \quad (81)$$

– составляющие, обусловленные асимметрией активных и реактивных элементов нагрузки.

3-мерные кривые (80) и (81) ортогональны, так как

$$\langle \mathbf{i}_{uA}, \mathbf{i}_{uR} \rangle = \operatorname{Re}[\mathbf{I}_{DA}^T \mathbf{I}_{DR}^*] = \operatorname{Re}[j \sum_m U_m^2 \mathbf{g}_{Dm} \mathbf{b}_{Dm}] = 0.$$

В силу ортогональности разложения (79) справедливо тождество Пифагора

$$\mathbf{i}_{uA}(t) \perp \mathbf{i}_{uR}(t) \Rightarrow I_{DA}^2 + I_{DR}^2 = I_D^2, \quad (82)$$

$$I_{DA}^2 = U^2 (v_a^2 \mathbf{g}_{Da}^2 + v_b^2 \mathbf{g}_{Db}^2 + v_c^2 \mathbf{g}_{Dc}^2), \quad (83)$$

$$I_{DR}^2 = U^2 (v_a^2 \mathbf{b}_{Da}^2 + v_b^2 \mathbf{b}_{Db}^2 + v_c^2 \mathbf{b}_{Dc}^2). \quad (84)$$

Таким образом, для разложения тока использованы два дихотомических фактора:

- один фактор обусловлен активностью и реактивностью элементов нагрузки;
- другой фактор обусловлен симметрией и асимметрией элементов нагрузки по фазам.

Разложение 3-фазного тока и уравнение мощности несбалансированного режима. Сочетание значений двух факторов, классифицирующих нагрузку:

- («активность/реактивность» – первый фактор)

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_A + \mathbf{i}_R;$$

- («симметрия / асимметрия» – второй фактор)

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_u,$$

позволило получить четыре взаимно ортогональных составляющих 3-фазного тока

$$\mathbf{i}_{sA}, \quad \mathbf{i}_{uA}, \quad \mathbf{i}_{sR}, \quad \mathbf{i}_{uR},$$

которые обеспечивают разложение на четыре взаимно ортогональные 3-фазные компоненты тока

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_A + \mathbf{i}_R = \underbrace{(\mathbf{i}_{sA} + \mathbf{i}_{uA})}_{\mathbf{i}_A} + \underbrace{(\mathbf{i}_{sR} + \mathbf{i}_{uR})}_{\mathbf{i}_R}. \quad (85)$$

Так как разложение тока (85) ортогонально, то справедливо тождество (уравнение потерь на один Ом)

$$\|\mathbf{i}\|^2 = \|\mathbf{i}_{sA}\|^2 + \|\mathbf{i}_{uA}\|^2 + \|\mathbf{i}_{sR}\|^2 + \|\mathbf{i}_{uR}\|^2. \quad (86)$$

Умножение уравнения (86) на квадрат д.з. (rms) напряжения $\|\mathbf{u}\|^2$ дает уравнение для мощностей синусоидального несбалансированного режима

$$S_T^2 = P^2 + Q^2 + D_G^2 + D_B^2. \quad (87)$$

Здесь:

$$S_T = \|\mathbf{i}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \quad (88)$$

– (total) кажущая мощность;

$$P = \|\mathbf{i}_{sA}\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{i}, \mathbf{u} \rangle \quad (89)$$

– активная мощность баланса, обусловленная симметрией активных элементов нагрузки;

$$|Q| = \|\mathbf{i}_{sR}\| \cdot \|\mathbf{u}_\perp\| = |\langle \mathbf{i}, \mathbf{u}_\perp \rangle| \quad (90)$$

– реактивная мощность баланса, обусловленная симметрией активных элементов нагрузки;

$$D_G = \|\mathbf{i}_{uA}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \quad (91)$$

– мощность небаланса, обусловленная асимметрией активных элементов нагрузки;

$$D_B = \|\mathbf{i}_{uR}\| \cdot \|\mathbf{u}\| \quad (92)$$

– мощность небаланса, обусловленная асимметрией реактивных элементов нагрузки;

Уравнение мощности (87) обобщает уравнение для синусоидального несимметричного режима [7]

$$I^2 \cdot U^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2, \quad (93)$$

так как $D_u^2 = D_G^2 + D_B^2$.

Практическая ценность полученного ортогонального разложения тока и уравнений мощности заключается в возможности их использования не только для разделительного измерения и учета неактивных составляющих ПМ, но и для решения задачи компенсации в синусоидальном несбалансированном режиме.

Выводы. Для 3-фазной 4-проводной сети с синусоидальным несбалансированным режимом, при несимметричном напряжении получено 4-х компонентное ортогональное разложение 3-фазного тока. Компоненты, имея явный энергетический смысл, независимо классифицируют состояние нагрузки. Полученное разложение расширяет теорию CPC на 4-проводные схемы с несимметричным напряжением путем разложения тока небаланса на две составляющие, обусловленные активностью и реактивностью асимметрии элементов нагрузки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. 1459-2010 IEEE Standard definitions for the measurement of electric power quantities under sinusoidal, nonsinusoidal, balanced, or unbalanced conditions. doi: 10.1109/ieeestd.2010.5439063.
2. Czarnecki L.S. Orthogonal decomposition of the currents in a 3-phase nonlinear asymmetrical circuit with a nonsinusoidal voltage source // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1988. – vol.37. – no.1. – pp. 30-34. doi: 10.1109/19.2658.
3. Ferrero A., Superti-Furga G. A new approach to the definition of power components in three-phase systems under nonsinusoidal conditions // IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement. – 1991. – vol.40. – no.3. – pp. 568-577. doi: 10.1109/19.87021.
4. Lev-Ari H., Stankovic A.M. A decomposition of apparent power in polyphase unbalanced networks in nonsinusoidal operation // IEEE Transactions on Power Systems. – 2006. – vol.21. – no.1. – pp. 438-440. doi: 10.1109/tpwrs.2005.860903.
5. Czarnecki L.S., Haley P.M. Unbalanced power in four-wire systems and its reactive compensation // IEEE Transactions on Power Delivery. – 2015. – vol.30. – no.1. – pp. 53-63. doi: 10.1109/tpwrd.2014.2314599.
6. Czarnecki L.S., Bhattarai P.D. Currents' physical components (CPC) in three-phase systems with asymmetrical voltage // Przegląd Elektrotechniczny. – 2015. – no.6. – pp. 40-47. doi: 10.15199/48.2015.06.06.
7. Сиротин Ю.А. Векторная мгновенная мощность и энергетические режимы трехфазных цепей // Технічна електродинаміка. – 2013. – №6. – С. 57-65.
8. Sirotnin Iu.A. Non-pulsed mode of supply in a three-phase system at asymmetrical voltage // Przegląd Elektrotechniczny. – 2013. – no.7. – pp. 54-58.

REFERENCES

1. 1459-2010 IEEE Standard definitions for the measurement of electric power quantities under sinusoidal, nonsinusoidal, balanced, or unbalanced conditions. doi: 10.1109/ieeestd.2010.5439063.
2. Czarnecki L.S. Orthogonal decomposition of the currents in a 3-phase nonlinear asymmetrical circuit with a nonsinusoidal voltage source. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1988, vol.37, no.1, pp. 30-34. doi: 10.1109/19.2658.
3. Ferrero A., Superti-Furga G. A new approach to the definition of power components in three-phase systems under nonsinusoidal conditions. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1991, vol.40, no.3, pp. 568-577. doi: 10.1109/19.87021.
4. Lev-Ari H., Stankovic A.M. A decomposition of apparent power in polyphase unbalanced networks in nonsinusoidal operation. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2006, vol.21, no.1, pp. 438-440. doi: 10.1109/tpwrs.2005.860903.
5. Czarnecki L.S., Haley P.M. Unbalanced power in four-wire systems and its reactive compensation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 2015, vol.30, no.1, pp. 53-63. doi: 10.1109/tpwrd.2014.2314599.
6. Czarnecki L.S., Bhattarai P.D. Currents' physical components (CPC) in three-phase systems with asymmetrical voltage. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2015, no.6, pp. 40-47. doi: 10.15199/48.2015.06.06.
7. Sirotnin Iu.A. Vectorial instantaneous power and energy modes in three-phase circuits. *Tekhnichna elektrodynamika – Technical electrodynamic*, 2013, no.6, pp. 57-65. (Rus).
8. Sirotnin Iu.A. Non-pulsed mode of supply in a three-phase system at asymmetrical voltage. *Przegląd Elektrotechniczny*, 2013, no.7, pp. 54-58.

Поступила (received) 29.02.2016

Сиротин Юрий Александрович, д.т.н., проф.,
Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»,
61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21,
e-mail: yuri_sirotnin@ukr.net

Iu.A. Sirotnin

National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»,
21, Frunze Str., Kharkiv, 61002, Ukraine.

Orthogonal components of the three-phase current at asymmetrical active - reactive load in 4-wire circuit.

Purpose. For the unbalanced sinusoidal mode with asymmetric voltage in 3-phase 4-wire circuits to receive the orthogonal 4-component decomposition of 3-phase current, are classified symmetry/asymmetry of active and reactive load elements separately. **Methodology.** The methodology is based on the vector approach, which with one voice allows to analyze the energy characteristics of a 4-wire and 3-wire circuits as balanced and unbalanced modes. At asymmetrical voltage the matrix representation methodology of the equivalent conductivities is used. **Results.** For 3-phase 4-wire network with a sinusoidal unbalanced mode with asymmetric voltage obtained 4-component orthogonal decomposition of the 3-phase current. The components have a clear electro-energetic sense and are classified irrespective by the load condition. **Originality.** The resulting decomposition current develops the theory Currents' Physical Components (CPC) for 4-wire circuit with asymmetric voltage. For the first time the unbalanced current is classified by activity and reactivity of asymmetry load elements. **Practical value.** Practical value of the obtained orthogonal decomposition current and the power equation is a possibility of their utilization for the increase both quality of delivery and quality of consumption of electrical energy. References 8, figures 1.

Key words: three-phase circuit, active and reactive power, power shift, power equation, unbalanced current and mode, active-reactive asymmetrical load, asymmetrical voltage, currents' physical components (CPC).