

УДК 621.313.32

В.І. Ткачук, В.І. Жук

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ВЕНТИЛЬНОМУ ДВИГУНІ ПОСТІЙНОГО СТРУМУ

На основі вихідних допущень створено математичну модель, яка описує електромеханічні процеси у вентильному двигуні постійного струму з явнополюсним статором і збудженням від постійних магнітів.

На основе исходных допущений создана математическая модель, описывающая электромеханические процессы в вентиальном двигателе постоянного тока с явнополюсным статором и возбуждением от постоянных магнитов.

### ВСТУП

У процесі технологічної еволюції виробники промислового устаткування та побутової техніки почали широко використовувати вентильні двигуни з явнополюсним статором і постійними магнітами на роторі. Це є цілком логічно, оскільки двигуни цієї конструкції мають ряд переваг, а саме: нема рухомих контактів, отже не потрібне постійне обслуговування, а тому вони дешеві в обслуговуванні; тривалий термін служби і висока надійність; висока швидкодія.

Переваги вентильних двигунів постійного струму забезпечують їх конкурентноздатність в порівнянні з іншими типами електричних двигунів. Відтак виникає необхідність синтезу та аналізу роботи такого двигуна, а значить і в створенні його математичної моделі.

**Мета роботи** – отримати систему рівнянь, яка описує електромеханічні процеси у вентильному двигуні постійного струму з явнополюсним статором і збудженням від постійних магнітів.

**Об'єкт і предмет дослідження.** Об'єктом досліджень є трифазний вентильний двигун постійного струму з явнополюсним статором і постійними магнітами на роторі. Принципова електрична схема даного двигуна зображена на рис. 1 [1]. Предметом дослідження є магнітні, електромагнітні, та електромеханічні процеси, які відбуваються в вентильному двигуні під час його роботи.

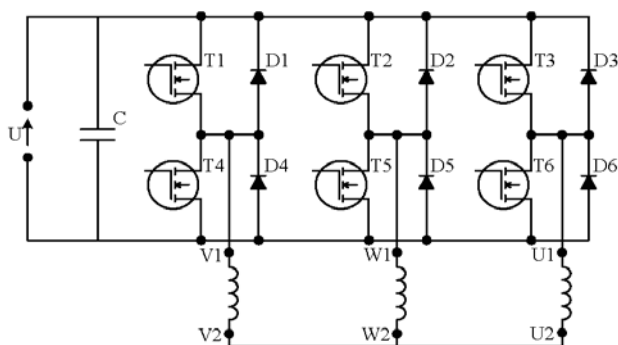


Рис. 1. Принципова електрична схема вентиального двигуна

Вихідні допущення:

- магнітні зв'язки між секціями відсутні;
- крива розмагнічення постійного магніту є прямолінійною;
- робоча точка постійного магніту лежить на прямій повернення для всіх режимів роботи двигуна;
- потокозчеплення обмотки секції є функцією кута повороту ротора і струму та змінюється гармонічно;

- потокозчепленням, спричиненим потоками розсіяння нехтуємо;
- перехідні процеси ввімкнення і вимкнення силових транзисторів відбуваються миттєво;
- опір транзистора в закритому стані як і опір діода у зворотному напрямку вважатимемо безмежним.

### ВИКЛАДЕННЯ ОСНОВНОГО МАТЕРІАЛУ

За прийнятих допущень спад напруги на  $j$ -му транзисторі визначатиметься за формулою:

$$\Delta U_{T_j} = U_{KE.O} + i_{k_j} \cdot R_{KE.НАС}, \quad (1)$$

де  $U_{KE.O}$  і  $R_{KE.НАС}$  – паспортні дані транзистора,  $i_{k_j}$  – струм транзистора,  $j = 1 \dots 2m$  – номер транзистора,  $m$  – кількість секцій ВД, а

$$k_j = \begin{cases} j, & \text{якщо } j \leq m \\ (j-m), & \text{якщо } j > m. \end{cases}$$

Стан транзисторів і діодів ВД описується цілочисельними масивами  $KT$  і  $KD$  відповідно.  $j$ -ий елемент цього масиву рівний нулю, за умови, що транзистор (чи діод) з  $j$ -им номером закритий і одиниці, якщо відкритий. Стан кожного транзистора залежить від кута положення ротора двигуна відносно статора, і описуватиметься такою системою логічних рівнянь:

$$KT_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta < \theta_e + \frac{2\pi}{m}(m-1) \leq \beta + \gamma; \\ 0, & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases} \quad (2)$$

$$KT_{i+m} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta < \theta_e + \frac{2\pi}{m}(m-1) + \pi \leq \beta + \gamma; \\ 0, & \text{в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

де  $\theta_e$  – електричний кут положення ротора,  $\gamma = 2\pi/m$  – кут комутації транзистора.

За прийнятих допущень спад напруги на  $j$ -му діоді визначатиметься за формулою:

$$\Delta U_{D_j} = \frac{1}{b} \cdot \ln \frac{i_{k_j} + I_0}{I_0}, \quad (3)$$

де  $I_0$  і  $b$  – паспортні дані транзистора,  $i_{k_j}$  – струм діода.

Елементи масиву  $KD$  визначатимуться згідно з фізикою процесів, які проходять в ВД: в момент часу, коли закривається транзистор в певній секції, в ній відкривається діод ( $KD_j = 1$ ) (так, щоб струм секції протікав в тому ж напрямку що й до закриття транзистора), переходить діод в закритий стан ( $KD_j = 1$ ), за умови, що струм, який протікає через нього спаде до нуля.

В залежності від того, через транзистор чи через діод протікає струм секції, спад напруги в її електричному колі визначатиметься одним з двох виразів:

$$U_{CT_{k_j}} = (U_{KE.0} + i_{k_j} \cdot R_{KE.НАС}) + i_{k_j} \cdot R + \frac{d\psi_{k_j}(\theta_e, i_{k_j})}{dt}, \quad (4)$$

$$U_{CD_{k_j}} = \frac{1}{b} \cdot \ln \frac{i_{k_j} + I_0}{I_0} + i_{k_j} \cdot R + \frac{d\psi_{k_j}(\theta_e, i_{k_j})}{dt}, \quad (5)$$

де  $i_{k_j}$  – струм секції,  $R$  – активний опір секції,  $\psi_{k_j}(\theta_e, i_{k_j})$  – потокозчеплення секції.

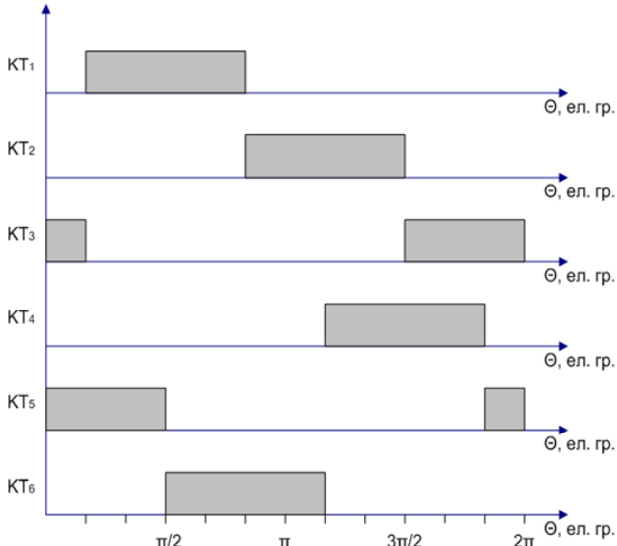


Рис. 2. Діаграма сигналів керування транзисторами інвертора напруги ВД ПС

Потокозчеплення секції, яке є функцією від її струму і кута повороту ротора, згідно з прийнятих допущень визначається за формулою:

$$\psi_{k_j}(\theta_e, i_{k_j}) = 16 \cdot \frac{\Phi_{max} \cdot \lambda_{\delta} + w_z \cdot \lambda_{\sigma} \cdot (\lambda_m + \lambda_{\sigma}) \cdot i_{k_j}}{\lambda_m + \lambda_{\delta} + \lambda_{\sigma}} \times (6)$$

$$\times w_z \cdot \cos(\theta_e),$$

де  $\Phi_{max}$  – амплітуда магнітного потоку, який створюється постійним магнітом ротора;  $\lambda_{\delta}$ ,  $\lambda_{\sigma}$ ,  $\lambda_m$  – магнітні провідності повітряного проміжку, розсіяння постійного магніту відповідно;  $w_z$  – число витків зубця секції статора.

Відповідно

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{k_j}(\theta_e, i_{k_j})}{dt} &= \frac{d\psi_{k_j}(\theta_e, i_{k_j})}{d\theta_e} \cdot \frac{d\theta_e}{dt} + \frac{d\psi_{k_j}(\theta_e, i_{k_j})}{di_{k_j}} \cdot \frac{di_{k_j}}{dt} = \\ &= \left( \frac{16 \cdot w_z \cdot \lambda_{\delta} \cdot w_z \cdot (\lambda_m + \lambda_{\sigma})}{\lambda_m + \lambda_{\delta} + \lambda_{\sigma}} \right) \cdot \cos(\theta_e) \cdot \frac{di_{k_j}}{dt} - \\ &- \frac{\left( \Phi_{max} \cdot \lambda_{\delta} + w_z \cdot \lambda_{\sigma} \cdot (\lambda_m + \lambda_{\sigma}) \cdot i_{k_j} \right) \cdot 16 \cdot w_z \cdot \sin(\theta_e)}{\lambda_m + \lambda_{\delta} + \lambda_{\sigma}} \cdot \omega \cdot p. \end{aligned} \quad (7)$$

Системи рівнянь, що описують стан електричної рівноваги секції для кожного з приведених станів на рис. 3, матимуть вигляд:

$$\begin{cases} \Delta U_{T_1} + i_1 \cdot R + \frac{d\psi_1(\theta_e, i_1)}{dt} + \Delta U_{T_5} + i_2 \cdot R + \frac{d\psi_2(\theta_e, i_2)}{dt} = U, \\ \Delta U_{T_5} + i_2 \cdot R + \frac{d\psi_2(\theta_e, i_2)}{dt} - \left( \Delta U_{D_6} + i_3 \cdot R + \frac{d\psi_3(\theta_e, i_3)}{dt} \right) = 0, \\ i_1 = i_2 + i_3, \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \Delta U_{T_1} + i_1 \cdot R + \frac{d\psi_1(\theta_e, i_1)}{dt} + \Delta U_{T_5} + i_2 \cdot R + \frac{d\psi_2(\theta_e, i_2)}{dt} = U, \\ i_1 = i_2, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \Delta U_{T_1} + i_1 \cdot R + \frac{d\psi_1(\theta_e, i_1)}{dt} + \Delta U_{T_6} + i_3 \cdot R + \frac{d\psi_3(\theta_e, i_3)}{dt} = U, \\ \Delta U_{T_6} + i_3 \cdot R + \frac{d\psi_3(\theta_e, i_3)}{dt} - \left( \Delta U_{D_2} + i_2 \cdot R + \frac{d\psi_2(\theta_e, i_2)}{dt} \right) = U_c, \\ i_1 = i_3 - i_2, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Delta U_{T_1} + i_1 \cdot R + \frac{d\psi_1(\theta_e, i_1)}{dt} + \Delta U_{T_6} + i_3 \cdot R + \frac{d\psi_3(\theta_e, i_3)}{dt} = U, \\ i_1 = i_3. \end{cases} \quad (11)$$

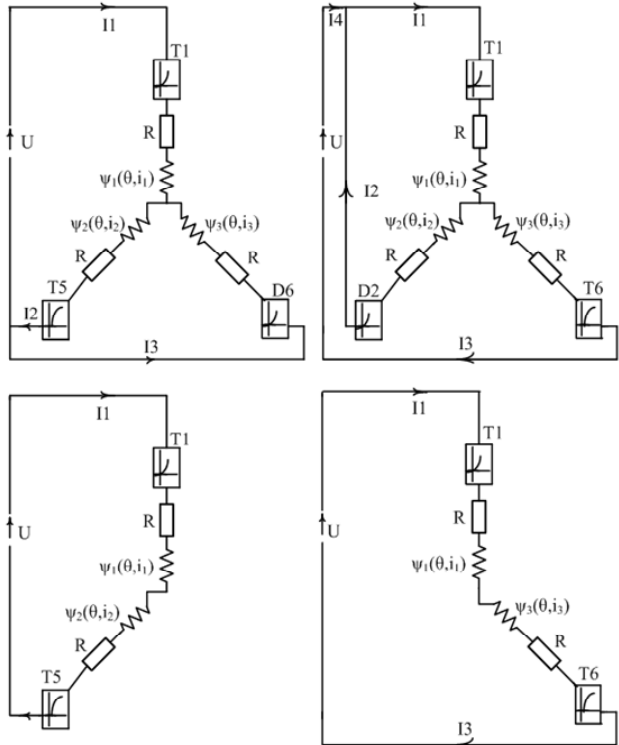


Рис. 3. Схема силового електричного кола ВД ПС при комутації першої секції

Враховуючи приведені викладки система рівнянь, яка описуватиме стан електричної рівноваги першої секції, матиме вигляд:

$$\begin{cases} KT_1 \cdot U_{CT_1} + KT_5 \cdot U_{CT_2} + KT_6 \cdot U_{CT_3} = U; \\ KT_5 \cdot KD_6 \cdot (U_{CT_2} + U_{CD_3}) + \\ + KT_6 \cdot KD_2 \cdot (U_{CT_3} - U_{CD_2}) = 0; \\ i_1 = i_2(KT_5 - KD_2) + i_3(KT_6 + KD_6). \end{cases} \quad (12)$$

Система рівнянь, яка описуватиме стан електричної рівноваги двигуна, матиме вигляд:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 (KT_j + KT_{j+m}) \cdot U_{CT_{k_j}} = U, \\ \sum_{j=1}^m \left( KT_{m+k_{j+1}} \cdot KD_{m+k_{j+2}} \cdot (U_{CT_{k_{j+1}}} + U_{CD_{k_{j+2}}}) + \right. \\ \left. + KT_{m+k_{j+2}} \cdot KD_{k_{j+1}} \cdot (U_{CT_{k_{j+2}}} - U_{CD_{k_{j+1}}}) \right) = 0, \\ \sum_{j=1}^m (i_j \cdot KT_j) = \sum_{j=1}^m \left( i_j \cdot (KT_{k_{j+1}} \cdot (KT_{j+m} + KD_{j+m}) + \right. \\ \left. + KT_{k_{j+2}} \cdot (KT_{j+m} - KD_j) \right). \end{cases} \quad (13)$$

Продиференціювавши третє рівняння системи, отримаємо:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 (KT_j + KT_{j+m}) \cdot U_{CT_{k_j}} = U, \\ \sum_{j=1}^m \left( KT_{m+k_{j+1}} \cdot KD_{m+k_{j+2}} \cdot (U_{CT_{k_{j+1}}} + U_{CD_{k_{j+2}}}) + \right. \\ \left. + KT_{m+k_{j+2}} \cdot KD_{k_{j+1}} \cdot (U_{CT_{k_{j+2}}} - U_{CD_{k_{j+1}}}) \right) = 0, \\ \sum_{j=1}^m \left( \frac{di_j}{dt} \cdot KT_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{di_j}{dt} \cdot (KT_{k_{j+1}} \cdot (KT_{j+m} + KD_{j+m}) + \right. \\ \left. + KT_{k_{j+2}} \cdot (KT_{j+m} - KD_j) \right) \end{cases} \quad (14)$$

Електромагнітний момент вентилювального визначається як сума електромагнітних моментів, які створюють його секції:

$$M_e = \sum_{j=1}^m M_{k_j}(\theta_e, i_j). \quad (15)$$

Електромагнітний момент, який створюється однією секцією, визначається як похідна магнітної коенергії цієї секції за кутом повороту ротора при постійному струмі секції:

$$M_{k_j}(\theta_e, i_j) = \left. \frac{\partial W_{k_j}(\theta_e, i_j)}{\partial \theta_e} \right|_{i_j = const}, \quad (16)$$

де  $W_k$  – магнітна коенергія секції;  $I_C$  – струм секції;  $\theta$  – геометричний кут між осями зубця статора і постійним магнітом ротора.

Магнітну коенергію секції можна визначити, як:

$$W_j(\theta_{e_j}, i_j) = \int_0^{i_j} \Psi_{c_j}(i_j, \theta_j) di. \quad (17)$$

Враховуючи (15) – (17), та прийняті допущення вираз, для обчислення електромагнітного моменту, який створює двигун є таким:

$$M_e = \sum_{j=1}^m \left( 4 \cdot p \left( \frac{w_z \Phi_{\max} \lambda_{\delta}}{\lambda_m + \lambda_{\delta} + \lambda_{\sigma}} I_j + \frac{w_z^2 \lambda_{\delta} (\lambda_m + \lambda_{\sigma})}{\lambda_m + \lambda_{\delta} + \lambda_{\sigma}} I_j^2 \right) \sin(\theta_{e_j}) \right). \quad (18)$$

Враховуючи вищевказане, можемо сформулювати систему рівнянь (19), яка описує електромеханічні процеси у вентилювальному двигуні постійного струму з явнополюсним статором і постійними магнітами на роторі.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 (KT_j + KT_{j+m}) \cdot U_{CT_{k_j}} = U; \\ \sum_{j=1}^m \left( KT_{m+k_{j+1}} \cdot KD_{m+k_{j+2}} \cdot (U_{CT_{k_{j+1}}} + U_{CD_{k_{j+2}}}) + \right. \\ \left. + KT_{m+k_{j+2}} \cdot KD_{k_{j+1}} \cdot (U_{CT_{k_{j+2}}} - U_{CD_{k_{j+1}}}) \right) = 0; \\ \sum_{j=1}^m \left( \frac{di_j}{dt} \cdot KT_j \right) = \sum_{j=1}^m \left( \frac{di_j}{dt} \cdot (KT_{k_{j+1}} \cdot (KT_{j+m} + KD_{j+m}) + \right. \\ \left. + KT_{k_{j+2}} \cdot (KT_{j+m} - KD_j) \right); \\ \frac{d\omega}{dt} = \left( \sum_{j=1}^m \left( 4 \cdot p \left( \frac{w_z \Phi_{\max} \lambda_{\delta}}{\lambda_m + \lambda_{\delta} + \lambda_{\sigma}} I_{k_j} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \frac{w_z^2 \lambda_{\delta} (\lambda_m + \lambda_{\sigma})}{\lambda_m + \lambda_{\delta} + \lambda_{\sigma}} I_{k_j}^2 \right) \sin(\theta_{e_{k_j}}) \right) - M_c \right) \cdot \frac{1}{J}; \\ \frac{d\theta}{dt} = p \cdot \omega; \\ \text{де } U_{CT_{k_j}} = (U_{KE.0} + i_{k_j} \cdot R_{KE.HAC}) + i_{k_j} \cdot R + \frac{d\psi_{k_j}(\theta_{e_{k_j}}, i_{k_j})}{dt}; \\ U_{CD_{k_j}} = \frac{1}{b} \cdot \ln \frac{i_{k_j} + I_0}{I_0} + i_{k_j} \cdot R + \frac{d\psi_{k_j}(\theta_{e_{k_j}}, i_{k_j})}{dt}; \end{cases} \quad (19)$$

## ВИСНОВКИ

Запропонована математична модель дає змогу моделювати різноманітні режими роботи вентилювального двигуна постійного струму, що своєю чергою, дає змогу використати її для розроблення електромеханічних систем, до складу яких входять такі двигуни. Модель також може бути використана для проектування двигуна, що дасть змогу ще на стадії розробки отримати його робочі характеристики і параметри.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ткачук В.І. Електромеханотроніка: Підручник – Львів: Видавництво Національного університету "Львівська політехніка", 2006. – 440 с.

**Bibliography (transliterated):** 1. Tkachuk V.I. *Elektromekhanotronika: Pidruchnyk*. Lviv, Lviv Polytechnic National University Publ., 2006. 440 p.

Надійшла (received) 07.10.2013

Ткачук Василь Іванович<sup>1</sup>, д.т.н., проф.,

Жук Володимир Іванович<sup>1</sup>, аспірант,

<sup>1</sup> Національний університет "Львівська політехніка",

кафедра електричних машин та апаратів,

79013, Львів, вул. Степана Бандери, 12,

тел/phone +38 032 2582160, +38 097 8608104,

e-mail: tkachuk@polynet.lviv.ua, 1volk@ukr.net

V.I. Tkachuk<sup>1</sup>, V.I. Zhuk<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Lviv Polytechnic National University

12, Bandera Street, Lviv, 79013, Ukraine

## Mathematical modeling of electromechanical processes in a brushless DC motor.

On the basis of initial assumptions, a mathematical model that describes electromechanical processes in a brushless DC electric motor with a salient-pole stator and permanent-magnet excitation is created.

**Key words** – mathematical model, electromechanical processes, brushless DC electric motor.