

Abordagem Teórica e Evidência Prática da Variação da Proporcionalidade entre as Dimensões de Embalagens Cilíndricas

Theoretical Approach and Practical Evidence of the Variation of the Proportionality Between the Dimensions of Cylindrical Packaging

Valdemir da Silva Nunes

Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, Garanhuns, PE

nunesvsn153@gmail.com

Everson Fernando Santos Feitosa

Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE, Garanhuns, PE

eversonfeitosa@gmail.com

Resumo: As embalagens metálicas envolvem uma importante parcela na contenção de produtos alimentares. Esta pesquisa refere-se a uma análise prévia das dimensões das latas metálicas cilíndricas, a fim de minimizar perdas em sua confecção. Este estudo se iniciou com um modelo matemático simples até a progressão para níveis menos elementares. Verificou-se, teoricamente, que o volume da lata e as características das junções do cilindro influenciam diretamente no formato final da lata, delimitando-se um intervalo numérico para a variação da proporcionalidade entre as dimensões da lata. Finalmente, observou-se que as relações entre as dimensões das latas presentes em supermercados estiveram, significativamente ($p < 0,05$), dentro do intervalo obtido teoricamente como plausível.

Palavras-chave: derivada; formato; latas cilíndricas; otimização.

Abstract: Metal packaging involves an important part in containment of food products. This research extends to a prior analysis of the dimensions of metal cylindrical cans in order to minimize loss in production. The study began with a simple

Recebido em 30/09/2013 - Aceito em 18/06/2014.

RECEN 16(1) p. 59-73 jan/jun 2014 DOI: 10.5935/RECEN.2014.01.04

mathematical model to the progression to less elementary levels. It has been found theoretically that the volume of the can and the characteristics of the junctions of the cylinder directly influence the final shape of the can, delimiting a numerical range for variation of the proportionality between the dimensions of the can. Finally, it was observed that the relationship among the sizes of cans found in supermarkets were significantly ($p < 0.05$), within the range obtained as theoretically plausible.

Key words: cylindrical cans; derivative; format; optimization.

1 Introdução

A embalagem faz parte de uma importante operação no processamento de alimentos. Sua função principal é conter os alimentos de maneira que seu custo efetivo satisfaça as necessidades industriais e desejos do consumidor, mantendo a segurança alimentar e minimizando os impactos ambientais [1].

Os materiais metálicos empregados nos sistemas de embalagens incluem basicamente os derivados do aço e os de alumínio, os quais são utilizados para a fabricação de latas, tampas, baldes, tambores e contêineres. Dentre as folhas de aço, as folhas de flandres constituem o maior mercado [2].

As embalagens metálicas para alimentos são classificadas em embalagens de três peças e de duas peças. As de três peças apresentam costura no corpo da lata e duas tampas (tampo e fundo) [3]. Os óleos comestíveis representam um dos principais mercados de latas de três peças, assim como leite em pó e vegetais em conservas. As folhas cromadas são bem usadas para fabricação de tampas/fundos, rolhas metálicas e latas para pescados [2].

Nos últimos anos, têm ocorrido desenvolvimentos significativos nos sistemas de embalagens e nos materiais que a compõem. Essa progressão tem auxiliado tanto na redução dos custos da embalagem, quanto no desenvolvimento de novos alimentos [4].

Alguns desafios dos engenheiros consistem em minimização de custos e perdas ou maximização de lucros. Esse fato promove o interesse por parte dos profissionais dessa área na obtenção de respostas favoráveis por meio de resolução de problemas

que envolvam otimização.

O problema envolvendo a otimização das dimensões das latas percorre desde modelos matemáticos mais simples até alguns mais elaborados. A construção dos modelos matemáticos que descrevem o fenômeno ou o sistema de estudo consiste basicamente em identificar as variáveis responsáveis por reger o sistema e elaborar um conjunto de proposições ou hipóteses sobre o sistema. Entretanto, talvez não seja interessante começar com um modelo complexo. A princípio pode-se optar por não incorporar todas as variáveis no modelo. A ideia é progredir de um modelo de baixa para um de alta resolução [5].

Este trabalho tem por objetivo, a partir de ferramentas matemáticas, obter a melhor relação altura/raio de uma embalagem metálica cilíndrica de três peças, mostrando, em particular, qual o melhor método utilizado na forma de uso da matéria-prima para a confecção da lata, e verificar se a relação altura/raio das latas cilíndricas observadas em supermercados se põem de acordo com a melhor razão encontrada.

Dependendo da complexidade do modelo matemático e das circunstâncias na manufatura da embalagem, a relação entre a altura e o raio da lata seguem diversas proporções. Se alguém consultar, com uma régua, a relação entre as dimensões das latas cilíndricas, *e.g.* em supermercado, descobrirá de imediato que a altura é geralmente maior que o diâmetro [6].

2 Material e métodos

Ao longo deste trabalho, serão indicadas correlações entre grandezas, de sorte que, a partir delas, possam ser elaborados e formalizados modelos matemáticos para a descrição dos problemas envolvidos na otimização do formato da lata. Essas relações partem basicamente de operações aritméticas e, especificamente, de fórmulas de áreas e volume de um cilindro reto.

O estudo se inicia com a busca pela forma mais econômica para uma lata cilíndrica. Supondo que o volume V da lata seja dado, deseja-se encontrar a altura h ideal para o custo mínimo da lata.

O material para a confecção da lata metálica é cortado de folhas metálicas, como a folha de flandres, de acordo com as dimensões do cilindro. No corte das folhas

metálicas, haverá alguma perda de material que deverá ser também minimizada. Em primeiro plano, serão utilizadas ferramentas matemáticas para se verificar, de forma teórica e algébrica a otimização do formato de uma lata de embalagem cilíndrica de três peças. A segunda parte do trabalho consiste em comprovar se a indústria de embalagens adota a opção obtida teoricamente, através da análise de latas presentes em supermercados.

Os dados referentes às dimensões das latas cilíndricas presentes em supermercados foram obtidos *in loco* com auxílio de régua graduada (precisão 0,1 cm) e bloco para as devidas anotações. As dimensões medidas foram o diâmetro e a altura das latas metálicas cilíndricas de três peças. A amostragem consistiu de um total de 28 latas distintas, dos mais variados alimentos, como leite em pó, óleos comestíveis e vegetais em conserva.

Conforme Larson, Farber [7], supomos que as populações, das quais se extraíram as amostras, tenham distribuição normal e variâncias iguais, sendo utilizado o critério t de Student para diferença entre médias, cuja estatística de teste padronizada é a seguinte:

$$t_{calc} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{x_1 x_2}} \quad (1)$$

em que o erro padrão para a distribuição de amostragem $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ é $\sigma_{x_1 x_2} = \sqrt{s^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$, em que $s = \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}}$ é a estimativa coligada do desvio padrão para $n_1 + n_2 - 2$ graus de liberdade.

A análise quantitativa dos dados foi realizada usando as funções estatísticas disponíveis na planilha de cálculo *Microsoft Excel 2010* (Microsoft Co., USA). As figuras foram obtidas com auxílio de recursos do *software AutoCAD 2007* (Autodesk Inc., USA) e do *software GeoGebra 4.4* (Geogebra - Dynamic Mathematics, USA).

3 Resultados e discussão

Os modelos matemáticos se apresentam em um modo evolutivo, desde a minimização da área superficial de um cilindro até o envolvimento dos custos do consumo

de material e do trabalho para a realização das junções da lata.

3.1 Minimizando a área de um cilindro

Considerando, *a priori*, que na confecção da lata não houvesse perda de material, o problema se resumiria à minimização da área superficial do cilindro.

Sejam h , r , A e V a altura, o raio da base ou da tampa, a área total e o volume do cilindro, respectivamente. O volume de um cilindro (aqui supostamente fixo) é dado por:

$$V = \pi r^2 h \quad (2)$$

Por outro lado, a área total, a qual deve ser minimizada, é a soma das áreas da base e da tampa (círculos iguais de raio r) com a área lateral (sendo recortada verticalmente, torna-se um retângulo de base $2\pi r$ e altura h), ou seja:

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (3)$$

Substituindo (2) em (3), pode-se deixar a área apenas em função de uma variável, por exemplo em função do raio r , isto é:

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r} \quad (4)$$

Tomando-se a primeira e segunda derivadas da função dada pela equação (4), a saber, $A'(r) = \frac{4\pi r^3 - 2V}{r^2}$ e $A''(r) = \frac{4\pi r^4 + 4Vr}{r^4}$, verifica-se o valor de r para o qual $A'(r)$ se anula e $A''(r)$ é positiva, ou seja, procura-se um ponto crítico, especificamente um ponto de mínimo. Como $A''(r)$ é positiva para todo r real positivo e $A'(r) = 0 \rightarrow 4\pi r^3 = 2V \rightarrow 4\pi r^3 = 2\pi r^2 h$, então a área é minimizada quando:

$$\frac{h}{r} = 2 \quad (5)$$

Constata-se, então, que a menor área de um cilindro com volume constante é atingida quando a altura é igual ao dobro do raio. No entanto, levando-se em consideração que apenas a área lateral é obtida de retângulos, é notável que haverá uma

perda mais significativa no corte dos discos da base e da tampa da lata, o que provocará a busca por um modelo mais complexo, por meio do qual os discos serão escritos em polígonos regulares.

3.2 Discos a partir de quadrados

Com o corte dos discos, a partir de quadrados (Figura 1), as áreas utilizadas para base e a tampa assumem o valor $l^2 = (2r)^2 = 4r^2$. A partir disso, o volume se mantém constante (Equação 2), mas a área total passa a ser:

$$A = 2(4r^2) + 2\pi r h \quad (6)$$

Substituindo (2) em (6), obtém-se a equação:

$$A(r) = 8r^2 + \frac{2V}{r} \quad (7)$$

Considerando-se a primeira derivada da função dada pela Equação (7), $A'(r) = \frac{16r^3 - 2V}{r^2}$, no ponto de mínimo a primeira derivada se anula e, portanto, tem-se que: $A'(r) = 0 \rightarrow 16r^3 = 2V \rightarrow 16r^3 = 2(\pi r^2 h)$, donde:

$$\frac{h}{r} = \frac{8}{\pi} \approx 2,55 \quad (8)$$

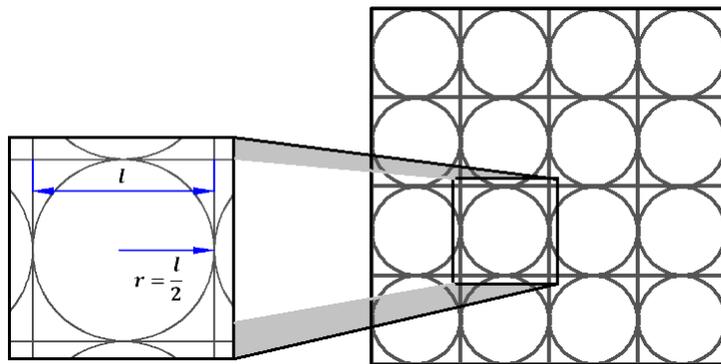


Figura 1. Discos cortados a partir de quadrados.

Além do mais, quando r assume essa proporção com a altura, a função atinge realmente um mínimo, pois $A''(r) = 16 + \frac{4V}{r^3}$, sendo positiva para todo r real positivo.

3.3 Discos a partir de hexágonos

Quando se passa a cortar os discos a partir de hexágonos (Figura 2), o raio do círculo das superfícies da base e da tampa assumirá o valor do apótema do hexágono circunscrito. Dessa forma, sendo l o lado do polígono de seis lados, tem-se que: $r = \frac{l\sqrt{3}}{2} \rightarrow l = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Por outro lado, a área de um hexágono é dada por $\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$, então a nova área que deve ser minimizada é $A = 2(2\sqrt{3}r^2) + 2\pi rh$ e, como $h = \frac{V}{\pi r^2}$, chega-se a:

$$A(r) = 4\sqrt{3}r^2 + \frac{2V}{r} \quad (9)$$

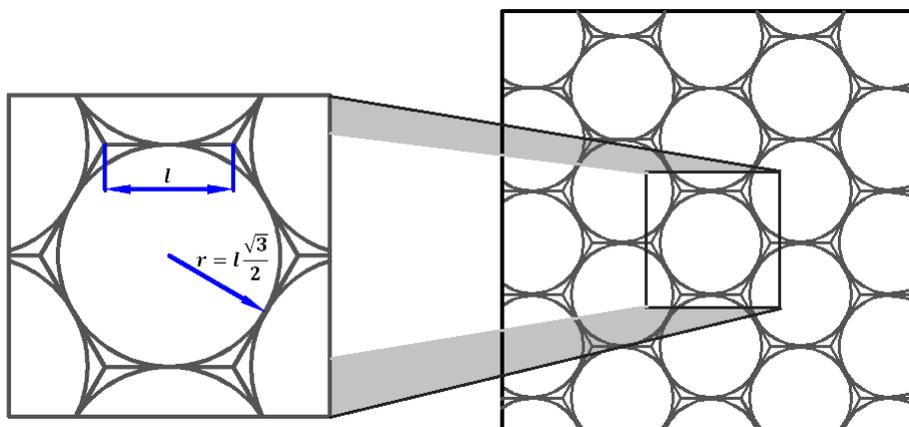


Figura 2. Discos cortados a partir de hexágonos.

De forma análoga ao item anterior, tomando-se as derivadas de primeira e segunda ordens da função em (9), verifica-se que $A''(r) = 8\sqrt{3} + \frac{4V}{r^3}$ assume valores positivos para todo r real positivo, mostrando que o ponto ótimo é de mínimo, cuja abcissa r é obtida quando $A'(r)$ se anula, isto é, $A'(r) = \frac{8\sqrt{3}r^3 - 2V}{r^2}$, $A'(r) = 0 \rightarrow 8\sqrt{3}r^3 =$

$2V \rightarrow 8\sqrt{3}r^3 = 2(\pi r^2 h)$, o que implica:

$$\frac{h}{r} = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2,21 \quad (10)$$

3.4 Porque o hexágono é o polígono limite para tal atribuição?

Nos itens anteriores, constatou-se que a utilização das subdivisões das folhas metálicas em hexágonos foi mais eficiente que a divisão em quadrados, pois a altura mais próxima ao dobro do raio do cilindro é reflexo de menor perda de material na confecção da lata.

Ora, para cada círculo recortado, é fácil ver que a quantidade de material perdido é equivalente à diferença da área do polígono regular e da circunferência nele inscrita e, quanto maior o número de lados do polígono, menor a diferença entre as áreas, o que é confirmado nos dois casos analisados, pois o hexágono, por ter maior número de lados que o quadrado, tem área mais próxima da circunferência nele inscrita. A diferença entre as áreas (da circunferência e do polígono circunscrito), sendo menor, leva a uma menor perda de material.

Então, por que não se tomariam polígonos regulares com muito mais lados, de modo que a diferença entre as áreas seja mínima? Por que as folhas metálicas não seriam subdivididas, *e.g.* em octógonos ou duodecágonos, de sorte que a perda de material fosse ainda menor? Na verdade, para cada circunferência inscrita a perda de material seria ainda menor. A dificuldade está em dividir as folhas metálicas em polígonos regulares com mais de seis lados de modo que esses fiquem arrumados, ou seja, que não haja área da superfície metálica que não possa ser sobreposta pelos polígonos.

Pode-se ver geometricamente que não se pode dividir uma folha em polígonos regulares com mais de 6 lados. Veja as tentativas de divisão em octógonos e duodecágonos na figura 3. É evidente que sempre sobram espaços relativamente grandes que não podem ser cobertos pelos polígonos.

Com mais formalidade, pode-se provar esse fato. De imediato, para que não haja pontos da folha metálica, que não se encaixem no recorte dos polígonos, é necessário que todos esses pontos estejam no interior ou no contorno dos polígonos idênticos - o que não ocorre na figura 3, onde sobram espaços (infinitos pontos) não cobertos

pelos polígonos.

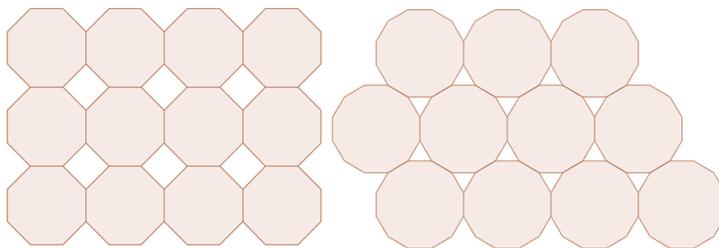


Figura 3. Tentativa em dividir folha em octógonos e duodecágonos.

Seja α a medida dos ângulos internos de um polígono regular. Ora, quaisquer pontos, em particular os pontos que são vértices dos polígonos, possuem 360° ao seu redor, e o número de polígonos dos quais os vértices fazem parte é um número inteiro. Portanto, α deve ser divisor de 360, isto é:

$$\alpha = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \quad (11)$$

a, b, c inteiros tais que $0 \leq a \leq 3; 0 \leq b \leq 2; 0 \leq c \leq 1$. Com efeito, no item 3.2, $\alpha = 90 = 2^1 \times 3^2 \times 5^1$; e em 3.3, $\alpha = 120 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$.

Por outro lado, como α é a medida dos ângulos internos de um polígono regular, então tem-se que:

$$60 \leq \alpha < 180 \quad (12)$$

Das expressões (11) e (12), conclui-se que α só pode assumir os valores 60, 90 ou 120. Agora, seja n o número de lados de um polígono regular. Sabe-se que n se relaciona com α do seguinte modo:

$$n = \frac{360}{180 - \alpha} \quad (13)$$

Da Equação (13), nota-se que n cresce quando α cresce. Como se busca o polígono com maior número de lados objetivando a menor perda de material, segue-se que α deve assumir o maior valor possível, isto é, $\alpha = 120^\circ$ e que realmente o hexágono é o polígono regular ideal para este fim.

3.5 Levando em conta o processo de manufatura

Até o momento, todo o estudo só levou em conta o material, desprezando o custo de mão-de-obra necessária na confecção da lata. A seguir, levar-se-á em conta também o custo de manufatura da lata, sendo então incorporado no modelo matemático.

Suponhamos que a despesa na produção se resuma basicamente à aquisição das folhas metálicas e ao trabalho de fazer as junções da lata. No primeiro caso, o custo do material é diretamente proporcional à área utilizada na confecção da lata. Logo, usando este fato, e, de (2) e de (9), segue-se que o custo do material, C_1 , é:

$$C_1(r, h) = k_1(4\sqrt{3}r^2 + 2\pi r h) \quad (14)$$

em que k_1 é constante. No segundo caso, o custo da mão-de-obra C_2 (juntar o retângulo de altura h e os círculos de raio r) é proporcional ao comprimento das junções da lata, ou seja:

$$C_2(r, h) = k_2(4\pi r + h) \quad (15)$$

em que k_2 é constante. O custo total C é, portanto, a soma dos custos da aquisição do material e da mão-de-obra. Teríamos então $C = C_1 + C_2$. Por conveniência, dividindo C por k_1 , pondo $k = \frac{k_2}{k_1}$ e, renomeando $\frac{C}{k_1}$ por C , tem-se a variação do custo total de produção em função do raio e da altura da lata:

$$C(r, h) = 4\sqrt{3}r^2 + 2\pi r h + k(4\pi r + h) \quad (16)$$

onde C é o custo total e k é a constante associada ao custo unitário por unidade de comprimento das junções no metal.

Ora, fazendo $h = \frac{V}{\pi r^2}$ e tomando a segunda derivada de $C(r)$, tem-se que:

$$C''(r) = 8\sqrt{3} + \frac{4V}{r^3} + \frac{6kV}{\pi r^4} \quad (17)$$

onde $C''(r)$ é positiva para todo r , o que mostra que $C(r)$ é convexa. Por outro lado,

tomando a primeira derivada, vem que:

$$C'(r) = 8\sqrt{3} - \frac{2V}{r^2} - \frac{2kV}{\pi r^3} + 4k\pi \quad (18)$$

Com efeito, no ponto de mínimo (pois $C(r)$ é convexa), $C'(r) = 0 \rightarrow 8\sqrt{3} - \frac{2V}{r^2} - \frac{2kV}{\pi r^3} + 4k\pi = 0$ o que implica:

$$4\sqrt{3}\pi r^4 - V\pi r - kV + 2\pi^2 k r^3 = 0 \quad (19)$$

Paralelamente, pode-se usar de (2) que $r^3 \left(\frac{h}{r}\right) = \frac{V}{\pi}$. Fazendo, $x = \frac{h}{r}$, chega-se a:

$$r^3 = \frac{V}{\pi x} \quad \text{ou} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi x}} \quad (20)$$

Substituindo (20) em (19) e lembrando que $r^4 = r^3 \cdot r$, chega-se a uma equação equivalente mas que não depende explicitamente de r , isto é:

$$4\sqrt{3}\pi \left(\frac{V}{\pi x}\right) \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi x}}\right) - V\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{\pi x}}\right) - kV + 2\pi^2 k \left(\frac{V}{\pi x}\right) = 0 \quad (21)$$

Isolando a constante $\frac{\sqrt[3]{V}}{k}$ e fazendo algumas simplificações, tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\sqrt[3]{V}}{k} = \sqrt[3]{\pi x} \left(\frac{2\pi - x}{\pi x - 4\sqrt{3}} \right) \quad (22)$$

Na equação (22), apenas x é variável. Pode-se tomar então $y = \sqrt[3]{\pi x} \left(\frac{2\pi - x}{\pi x - 4\sqrt{3}} \right)$ como uma função em x . É importante frisar que y também pode ser representado por $y = \frac{\sqrt[3]{V}}{k}$. Verificando, no primeiro caso, a restrição de $y = f(x)$ que nos interessa, nota-se que ela é uma função positiva cujo domínio é um intervalo aberto limitado (Figura 4). Para ver isso, note primeiramente que y deve ser positivo pois $y = \frac{\sqrt[3]{V}}{k}$, onde V e k são constantes positivas. Além disso, como $x = \frac{h}{r}$ é também positivo, $\sqrt[3]{\pi x}$ é positivo. Logo, deve-se impor que $\frac{2\pi - x}{\pi x - 4\sqrt{3}}$ seja positivo. Daí, $2\pi - x > 0$ e

$\pi x - 4\sqrt{3} > 0$ ou $2\pi - x < 0$ e $\pi x - 4\sqrt{3} < 0$ isto é:

$$\frac{4\sqrt{3}}{\pi} < x < 2\pi \quad (23)$$

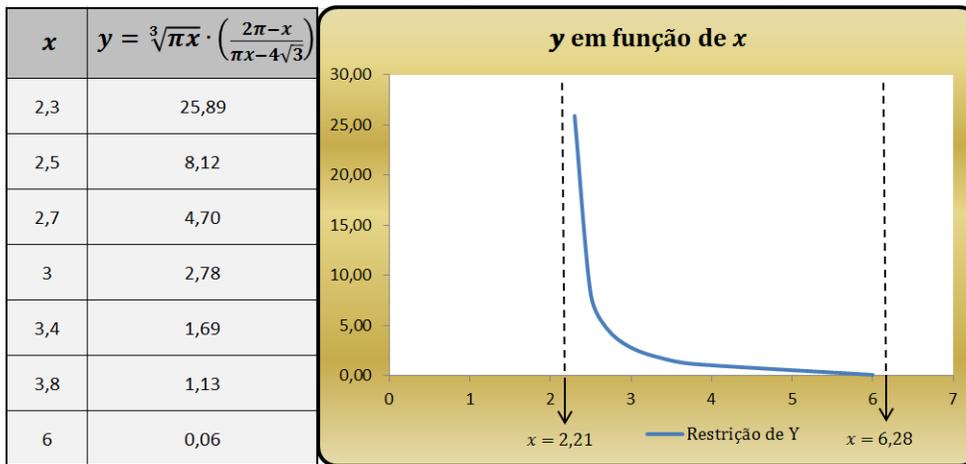


Figura 4. Alguns valores de y em correspondência com x , bem como o esboço da restrição de $y=f(x)$.

Desse modo, à medida que a razão entre a altura e o raio da lata, x , se aproxima da assíntota vertical $x = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \approx 2,21$, y cresce e, como $y = \frac{\sqrt[3]{V}}{k}$, segue-se que o valor de V é alto ou o valor de k é pequeno, isto é, latas cilíndricas grandes ou de junções baratas devem ser praticamente equiláteras. Em contrapartida, ao passo que a relação entre a altura e raio tende $x = 2\pi \approx 6,28$, y decresce, ou seja, neste caso o valor de V é pequeno ou o valor de k é alto, conseqüentemente, latas pequenas ou de junções caras devem ser estreitas e altas.

3.6 Verificação prática em embalagens de supermercados

Os dados referentes às medidas da altura e do raio das embalagens consultadas em supermercados, bem como a razão altura/raio estão organizados na Tabela 1.

Os dados da Tabela 2 mostram que, estatisticamente, as latas apresentaram uma relação altura/raio maior que 2,21 e menor que 6,28.

De fato, observa-se na primeira coluna que $t_{calculado} > t_{tabelado}$, implicando

que a média amostral é maior que o limite inferior; na segunda coluna, $t_{calculado} < -t_{tabelado}$ implica que a média amostral é menor que o limite superior.

Tabela 1. Dados referentes às dimensões das embalagens obtidas em supermercados.

Raio (cm)	Altura (cm)	Razão	Raio (cm)	Altura (cm)	Razão
1,75	11,20	6,40	3,70	9,00	2,43
2,00	11,50	5,80	3,70	9,50	2,57
2,10	16,00	7,60	3,70	10,30	2,78
2,35	14,20	6,00	2,80	19,50	6,96
3,70	6,00	1,60	3,25	14,50	4,46
2,65	12,00	4,50	2,90	18,50	6,38
3,10	11,00	3,50	3,80	11,50	3,03
3,70	8,30	2,20	5,00	7,50	1,50
2,80	15,50	5,50	5,00	9,40	1,88
5,00	11,50	2,30	6,15	14,40	2,34
5,00	12,00	2,40	7,75	17,50	2,26
4,25	18,50	4,40	8,25	18,40	2,23
4,75	15,50	3,30	9,50	21,00	2,21
6,30	12,60	2,00	2,50	21,00	8,40

Portanto, a análise das embalagens metálicas obtidas em supermercados comprovou ($p < 0,05$) que seu formato apresenta uma razão altura/raio (b/r) compatível com o resultado obtido teoricamente, isto é, $2,21 \approx \frac{4\sqrt{3}}{\pi} < \frac{b}{r} < 2\pi \approx 6,28$.

Neste aspecto, Stewart [6], bem indicou que a relação altura/raio de uma embalagem cilíndrica geralmente varia de 2 até cerca de 3,8.

Tabela 2. Valores obtidos na estatística de teste T de Student com 5% de significância.

Média $\frac{b}{r}$	Desvio
3,82	2,03
Limite inferior	Limite superior
2,21	6,28
$t_{calculado}$	$t_{calculado}$
4,21	-6,42
$t_{tabelado}$	$-t_{tabelado}$
1,70	-1,70
$t_{calculado} > t_{tabelado}$	$t_{calculado} < -t_{tabelado}$
Média maior que limite inferior	Média menor que limite superior

Além do mais, uma vez que já foi verificado na teoria a tendência de latas de maior volume terem uma relação altura/raio menor que latas pequenas, o próximo passo foi averiguar este fato na prática.

Com efeito, a Tabela 3 mostra os dados da pesquisa divididos em latas maiores - amostra 1 (14 unidades) e latas menores - amostra 2 (14 unidades).

Tabela 3. Comparação usando o teste T de Student com $\alpha = 5\%$. Amostras 1 - latas grandes; amostras 2 - latas pequenas.

Volume-amostras 1	razão h/r	Volume-amostras 2	razão h/r
481,0	4,5	108,0	6,4
489,0	6,4	145,0	5,8
522,0	3,0	222,0	7,6
589,0	1,5	246,0	6,0
738,0	1,9	258,0	1,6
903,0	2,3	265,0	4,5
942,0	2,4	332,0	3,5
1050,0	4,4	357,0	2,2
1099,0	3,3	382,0	5,5
1571,0	2,0	387,0	2,4
1711,0	2,3	409,0	2,6
3302,0	2,3	412,0	8,4
3934,0	2,2	443,0	2,8
3954,0	2,2	480,0	7,0
Média am1	2,9	Média am2	4,7
$t_{calculado}$	-2,7	$-t_{tabelado}$	-1,7

Observa-se, a partir do teste de hipóteses aplicado que as duas amostras diferem significativamente ($p < 0,05$) na proporcionalidade altura/raio, sendo que as latas maiores apresentaram média $\frac{h}{r}$ menor que as latas menores. Isto comprova que as embalagens cilíndricas de volume elevado são mais equiláteras que latas de pequeno volume, as quais são estreitas e altas.

4 Conclusão

As latas cilíndricas são amplamente utilizadas para o acondicionamento de alimentos e outros produtos. O estudo confirmou que a opção adotada pela indústria

proporciona boa otimização da relação de consumo de material e mão-de-obra com o formato das embalagens.

Além disso, verificou-se que a capacidade volumétrica influencia significativamente na relação altura/raio da embalagem cilíndrica, isto é, em latas grandes $h/r \rightarrow 2,21$, ao passo que em latas pequenas h/r se aproxima de 6,28. Finalmente, constatou-se que na realidade dos supermercados ocorre realmente esse perfil de variação nas dimensões das latas cilíndricas, provenientes da indústria de embalagens.

Referências

- [1] MARSH, K.; BUGUSU, B. Food Packaging - Roles, Materials, and Environmental Issues. *J Food Sci*, v. 72, n. 3, p. 39-55, 2007.
- [2] CORSO, M. P. Embalagens Metálicas. Tecnologia em Laticínios, Universidade Tecnológica do Paraná. Medianeira-PR, 2007. p. 21.
- [3] BARÃO, M. Z. Embalagens para produtos alimentícios. Instituto de Tecnologia do Paraná - TECPAR. Curitiba, 2011. p.8.
- [4] FELLOWS, P. J. Tecnologia do Processamento de Alimentos: princípios e prática. Tradução: Oliveira, F. C.; Rubensan, J. M.; Nitzke, J. A.; Thys, R. C. S. 2ª ed. Porto Alegre, 2006.
- [5] ZILL, D. G. Equações diferenciais com aplicações em modelagem. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra; revisão técnica: Antônio Luiz Pereira. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- [6] STEWART, J. Cálculo : vol 1. Tradução técnica Antônio Carlos Moretti, Antônio Carlos Gilli Martins; revisão técnica Helena Castro. São Paulo: Cengage Learning, 2006.
- [7] LARSON, R.; FARBER, B. Estatística Aplicada. Tradução: Luciane Ferreira Pauletti Viana. 4ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.