

---

# Tempo de tunelamento de um pacote de ondas gaussiano na região de uma barreira de potencial retangular

Veríssimo M. de Aquino<sup>1</sup>, Mario Goto<sup>2</sup> e Hiromi Iwamoto<sup>3</sup>

Departamento de Física/CCE - UEL

86051-990 - Londrina - PR

<sup>1</sup>verissim@uel.br, <sup>2</sup>mgoto@uel.br, <sup>3</sup>hiromi@uel.br

**Valdir C. Aguilera-Navarro**

Departamento de Química e Física - UNICENTRO

85015-430 Guarapuava, PR

aguilera@unicentro.br

(Recebido: 28 de novembro de 2000)

**Resumo:** *Dentro da temática do tempo de tunelamento, utilizando o método da fase estacionária, examinamos o tempo de trânsito de um pacote de ondas na região de uma barreira de potencial retangular. O pacote de ondas incidente é construído a partir de uma distribuição gaussiana de momentos. O tempo de trânsito obtido é livre das contribuições devidas às perturbações causadas pelas interferências na região imediatamente anterior à barreira de potencial. Mede o tempo de propagação do pacote de ondas através da região do potencial a partir da sua emergência no início da barreira até a sua chegada ao final da mesma, dentro dos procedimentos do método da fase estacionária.*

**Palavras-chave:** *tunelamento, fase estacionária, tempo de trânsito, pacotes de ondas*

**Abstract:** *The method of stationary phase is used to discuss the tunneling time of a wavepacket through a rectangular barrier. The incident wavepacket is built from a momentum Gaussian distribution. The obtained tunneling time is free from the perturbations due to the interference nearby the front of the barrier. This tunneling time represents how long it takes the wavepacket since it emerges from the beginning of the barrier until it reaches the other extremity.*

**Key words:** *tunneling, stationary phase, tunneling time, wavepackets*

## 1 Introdução

Utilizando o método da fase estacionária [1],[2], desenvolvemos um estudo do tempo de tunelamento de uma partícula com energia cinética inicial  $E < V_0$ , representada por um pacote de ondas gaussiano incidindo sobre uma barreira de potencial retangular de altura  $V_0$  definido em  $0 < x < a$ ,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (1)$$

É necessário salientar que existe uma vasta bibliografia tratando do assunto "tempo de tunelamento" com várias propostas sobre como calcular o tempo supostamente gasto por uma partícula durante o processo de tunelamento através de uma região de potencial. Citamos, por exemplo, os trabalhos [3]-[7] onde o leitor interessado pode encontrar referências adicionais.

Como um pacote de ondas tem componentes de velocidades acima e abaixo da velocidade do pico, que, no caso do pacote gaussiano, coincide com o seu valor médio, obviamente as componentes mais rápidas atingem primeiro a barreira de potencial, sendo que uma parte é transmitida e outra parte é refletida. As ondas refletidas iniciam o processo de interferência com as próximas componentes que chegam em direção à barreira, e assim por diante, descaracterizando o pacote de ondas incidente, que se decompõe, como resultado das interferências, em vários máximos e mínimos, formando típicos padrões de interferência.

Como as ondas rápidas têm coeficientes de transmissão maior do que os das ondas mais lentas, e obviamente atingem a região do potencial antes, pode ocorrer de o pico do pacote de ondas transmitidas, formadas a partir dessas ondas mais rápidas, surgir antes que o pico do pacote de ondas incidente atinja a barreira (supondo que, de alguma maneira, as ondas refletidas possam ser suprimidas, para que a integridade do pacote incidente possa ser mantida). O nosso tempo de transmissão,  $t_T$ , definido em [1]-[2], incorpora esse adiantamento na formação do pico do pacote de ondas transmitido, caracterizado pelos seus valores negativos para determinadas velocidades de grupo do pacote incidente. É necessário muita cautela na interpretação desses resultados, pois, obviamente um tempo de transmissão negativo sugere um processo de quebra de causalidade. Processo semelhante é conhecido no caso eletromagnético, quando a velocidade de grupo de pacotes de ondas através de um meio dispersivo pode adquirir um valor superluminal, o que tem causado muitas controvérsias em relação à violação ou não dos princípios da Relatividade Restrita [8].

Neste trabalho, vamos definir um tempo de trânsito do pacote de ondas na região do potencial,  $0 < x < a$ , a partir do intervalo de tempo entre a emergência do pico do pacote em  $x = 0$  e a sua chegada em  $x = a$ , quando simultaneamente ocorre a emergência do pico do pacote de ondas transmitido. Esse procedimento tem a vantagem de considerar apenas a parte do pacote de ondas incidente que penetra na região do potencial. Vamos nos basear na análise da fase estacionária [9] para identificar a posição do pico do pacote de ondas.

## 2 O pacote de ondas

Sejam as auto funções de energia  $u_E(x)$  para o potencial  $V(x)$  determinado pela equação (1.1)

$$u_E(x) = \begin{cases} u_1(x) = Ae^{ikx} + A'e^{ikx} & x < 0 \\ u_2(x) = Be^{ikx} + De^{ikx} & 0 < x < a \\ u_3(x) = Ce^{ikx} & x > a \end{cases} \quad (2)$$

onde

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad k_0 = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar} \quad e^{-\kappa} = \frac{k_0^2 - k^2}{k_0^2 + k^2} \quad (3)$$

A partir das condições de continuidade da função de onda e sua derivada nos pontos de descontinuidade do potencial, obtêm-se, após alguma álgebra,

$$\begin{aligned} \frac{A'}{A} &= \frac{(\kappa^2 + k^2)(e^{2\kappa a} - 1)}{(\kappa + ik)^2 - (\kappa - ik)^2 e^{2\kappa a}} \\ \frac{B}{A} &= \frac{2ik(\kappa - ik)e^{2\kappa a}}{(\kappa + ik)^2 - (\kappa - ik)^2 e^{2\kappa a}} \\ \frac{C}{A} &= \frac{4\kappa^2 e^{-\kappa a} e^{ika}}{(\kappa + ik)^2 - (\kappa - ik)^2 e^{2\kappa a}} \\ \frac{D}{A} &= \frac{2ik(\kappa + ik)}{(\kappa + ik)^2 - (\kappa - ik)^2 e^{2\kappa a}} \end{aligned}$$

Colocando-se os números complexos na sua forma polar

$$z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} e^{i \arctan(y/x)}$$

e tomando  $A = 1$ , obtemos para os coeficientes em (2.1)

$$A' = \frac{e^{-2\kappa a} - 1}{r} e^{-i\kappa a} \quad (4)$$

para as ondas refletidas,

$$B = \frac{2 \cos \kappa a}{r} e^{i\kappa a} \quad e \quad D = e^{-2\kappa a} \frac{2 \cos \kappa a}{r} e^{i\kappa a} \quad (5)$$

para as ondas na região do potencial e

$$C = e^{-\kappa a} \frac{2 \sin 2\kappa a}{r} e^{ika} e^{-i\kappa a} e^{-i\kappa a} \quad (6)$$

para as ondas transmitidas, onde

$$r = \frac{1 + e^{-4\kappa a} - 2e^{-2\kappa a} \cos 4\kappa a}{4} \quad (7)$$

e as variáveis angulares são dadas por

$$\cos \theta = \frac{k}{k_0}, \quad \sin \theta = \frac{1}{k_0} \sqrt{k_0^2 - k^2} \quad \tan \theta = \coth(a) \tan 2a \quad (8)$$

O coeficiente de transmissão é

$$T = |C|^2 = \frac{2 \sin^2 2a}{\cosh 2a + \cos 4a} \quad (9)$$

e o coeficiente de reflexão

$$R = |A|^2 = \frac{\cosh(2a) - 1}{\cosh 2a + \cos 4a} \quad (10)$$

A Figura 1 mostra o comportamento, em função do momento incidente  $k$ , do coeficiente de transmissão,  $T$ , em linha contínua, e do coeficiente de reflexão  $R$ , em linha tracejada, para a altura e largura da barreira do potencial relacionadas por  $k_0 a = 1$ . Esses coeficientes, que satisfazem a relação

$$R + T = 1 \quad (11)$$

são muito sensíveis ao aumento na altura ou na largura da barreira do potencial. Por exemplo, a Figura 2 mostra os mesmos coeficientes de transmissão e de reflexão da Figura 1, agora para  $k_0 a = 2$ , revelando, neste caso, um aumento considerável na probabilidade de reflexão.

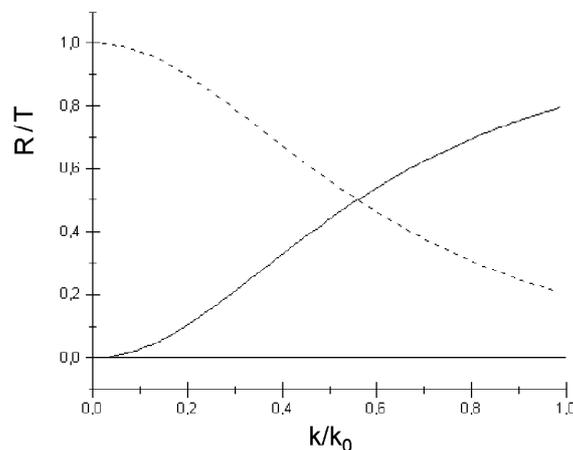


Figura 1: Comportamento dos coeficientes de transmissão,  $T$ , em linha contínua, e de reflexão,  $R$ , em linha tracejada, em função de  $k/k_0$ , para  $k_0 a = 1$

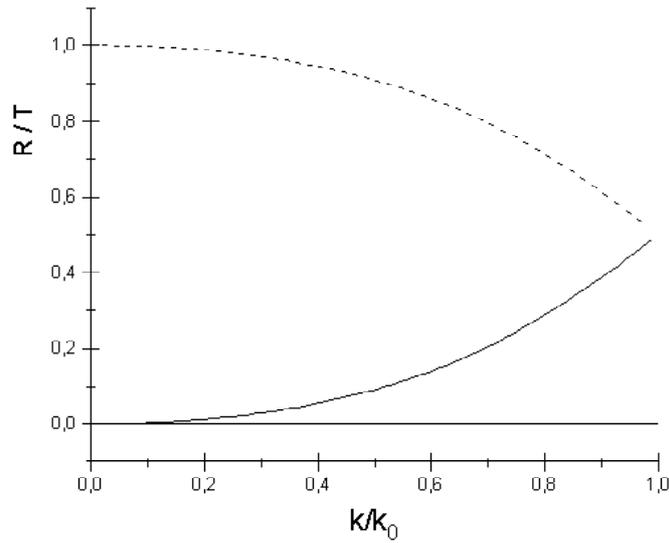


Figura 2: Comportamento dos coeficientes de transmissão,  $T$ , em linha contínua, e de reflexão,  $R$ , em linha tracejada, em função de  $k/k_0$ , para  $k_0 a = 2$

Como estamos nos restringindo a soluções de energia  $E < V_0$ , temos

$$0 < k < k_0 \quad k_0 > 0 \quad \kappa > 0 \quad (12)$$

Utilizando-se o princípio da superposição, podemos escrever  $\psi(x,t)$  na forma

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_0} \phi(k) e^{i\phi_k(t-t_0)} u_k(x) dk \quad (13)$$

com as  $u_k(x)$  dadas pelas expressões (2.1),

$$\phi(k) = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (14)$$

e onde escolhemos  $\phi(k)$  da forma

$$\phi(k) = g(k - \bar{k}) e^{ik\bar{x}} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{k}} e^{ik\bar{x}} e^{i(k-\bar{k})^2 \frac{\hbar^2}{2m}} \quad (15)$$

A função de onda  $\psi(x,t)$  assim definida, descreve um pacote de ondas que se desloca, a partir de  $t = 0$ , com a velocidade de grupo

$$\bar{v}_0 = \frac{\hbar \bar{k}}{m} \quad \bar{k} < k_0 \quad (16)$$

da região  $x = \bar{x}$  em direção à região do potencial, em  $x = 0$  centrado inicialmente em  $x = \bar{x}$ . Queremos observar que, embora as  $u_k(x)$  apresentem as componentes

refletida, transmitida, e na região do potencial, em  $t = 0$  (para detalhes ver [1]-[2]), somente a componente incidente contribui para  $\psi(x,0)$ , de forma que

$$\psi(x,0) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{k}}} e^{i\bar{k}(x+\frac{1}{2})} e^{-\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{2\frac{2}{k}}} \quad (17)$$

representa uma distribuição de probabilidade gaussiana de encontrar-se a partícula centrada em  $x = -\frac{1}{2}$ . Devemos ressaltar ainda que, estando a integração em  $k$  restrita à região  $0 < k < k_0$ , a distribuição espacial  $\psi(x,0)$  será aproximadamente da forma gaussiana. Esta forma gaussiana é tão mais precisa quanto menor for a largura  $\frac{2}{k}$  da distribuição de momentos, e quanto mais distante  $\bar{k}$  estiver dos seus extremos  $k = 0$  e  $k = k_0$ , tal que possamos assegurar que

$$\int_0^{k_0} g(k, \bar{k}) e^{ik} e^{ikx} dk \approx \int_0^{k_0} g(k, \bar{k}) e^{ik} e^{ikx} dk \quad (18)$$

assim como

$$\int_0^{k_0} k g(k, \bar{k}) \frac{2}{k} dk \approx \int_0^{k_0} k g(k, \bar{k}) \frac{2}{k} dk = \bar{k} \quad (19)$$

Assumindo como satisfeitas as condições (18) e (19), temos os pacotes nas três regiões,

$$\psi(x,t) = \begin{cases} \psi_1(x,t) = \psi_I(x,t) + \psi_R(x,t) & x < 0 \\ \psi_2(x,t) & 0 < x < a \\ \psi_3(x,t) = \psi_T(x,t) & x > a \end{cases} \quad (20)$$

onde  $\psi_I(x,t)$  é o pacote de ondas incidente

$$\psi_I(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{k}}} \int_0^{k_0} \psi_I(k) e^{if_I(k,x,t)} dk \quad (21)$$

com distribuição de momentos

$$\psi_I(k) = g(k, \bar{k}) = \frac{1}{(2\sqrt{\frac{2}{k}})^{1/4}} e^{-\frac{(k-\bar{k})^2}{4\frac{2}{k}}} \quad (22)$$

e fase

$$f_I(k,x,t) = k(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \frac{2}{k} t \quad (23)$$

e  $\psi_R(x,t)$  é o pacote de ondas refletido

$$\psi_R(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{k}}} \int_0^{k_0} \psi_R(k) e^{if_R(k,x,t)} dk \quad (24)$$

com distribuição de momentos

$$\psi_R(k) = 2g(k, \bar{k}) \frac{\sinh \frac{a}{2}}{2 \cosh \frac{a}{2} - 2 \cos 4} \quad (25)$$

e fase

$$f_R(k|x|t) = k(x - a) + \phi(k) t \quad (26)$$

Na região  $x > a$ , temos o pacote de ondas transmitido

$$\psi_T(x|t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_0} \psi_T(k) e^{if_T(k|x|t)} dk \quad (27)$$

com distribuição de momentos

$$\psi_T(k) = g(k - \bar{k}) e^{i\phi_a} \frac{2 \sin 2}{r} \quad (28)$$

e fase

$$f_T(k|x|t) = k(x + a) + \phi(k) t \quad (29)$$

A condição de fase estacionária [9]

$$\frac{df(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = 0 \quad (30)$$

com  $f(k)$  tomada como a fase das ondas incidente, refletida ou transmitida, determina a equação da trajetória  $\bar{x}(t)$  dos picos dos pacotes de ondas.

Utilizando-se a expressão para a fase da onda incidente em (30), obtêm-se a equação para a posição do pico incidente

$$\bar{x}(t) = a + \bar{v}_0(t - t_0) \quad (31)$$

onde

$$\bar{v}_0 = \frac{\hbar \bar{k}}{m} \quad (32)$$

A trajetória do pico do pacote de ondas refletido é

$$\bar{x}_R(t) = \bar{v}_R t + \phi_R = \bar{v}_R(t - t_1) \quad (33)$$

válida na região  $a < x < 0$  nos instantes de tempo  $t > t_1$ , e para o pacote de ondas transmitido, a trajetória do pico é

$$\bar{x}_T(t) = \bar{v}_T t - \phi_T + a = \bar{v}_T(t - t_3) + a \quad (34)$$

válida na região  $x > a$  e nos instantes de tempo  $t > t_3$ . Em (33) e (34),  $\bar{v}_R$  e  $\bar{v}_T$  são as velocidades de grupo dos pacotes de ondas refletido e transmitido, respectivamente. As quantidades  $\phi_R$  e  $\phi_T$  são obtidas de

$$\phi = \frac{d\phi(k)}{dk} \quad (35)$$

com a derivada calculada nos pontos  $\bar{k}_R$  e  $\bar{k}_T$ .

Um análise simples mostra que o pico incidente atinge a barreira de potencial, em  $x = 0$ , no instante

$$t_0 = \frac{\hbar}{\bar{v}_0} = \frac{m}{\hbar k} \quad (36)$$

Somente no instante

$$t_1 = \frac{\hbar}{\bar{v}_R} + \frac{\Delta_R}{\bar{v}_R} \quad (37)$$

o pico refletido parte da barreira de potencial, em  $x = 0$ , retornando com velocidade  $\bar{v}_R$ . Da mesma maneira, no instante

$$t_3 = \frac{\hbar}{\bar{v}_T} + \frac{\Delta_T}{\bar{v}_T} \quad (38)$$

o pico do pacote transmitido inicia a sua trajetória, a partir da barreira de potencial em  $x = a$ , com velocidade  $\bar{v}_T$ .

O intervalo de tempo

$$\Delta t_R = t_1 - t_0 = \frac{\hbar}{\bar{v}_R} + \frac{\Delta_R}{\bar{v}_R} - \frac{\hbar}{\bar{v}_0} \quad (39)$$

ou tempo de reflexão entre a chegada do pico incidente e a saída do pico refletido é sempre positivo, i.e.  $\Delta t_R > 0$ , uma vez que  $\Delta_R > 0$  e  $\bar{v}_R < \bar{v}_0$ , caracterizando um retardo entre os mesmos. Esse retardo é consequência de o pacote de ondas refletido ser formado preferencialmente pelas componentes mais lentas do pacote de ondas incidente.

O tempo de transmissão, definido por

$$\Delta t_T = t_3 - t_0 = \frac{\hbar}{\bar{v}_T} + \frac{\Delta_T}{\bar{v}_T} - \frac{\hbar}{\bar{v}_0} \quad (40)$$

mede o intervalo de tempo entre a chegada do pico do pacote de ondas incidente em  $x = 0$  e a emergência do pico do pacote de ondas transmitido em  $x = a$ . Como  $\Delta_T > 0$  e  $\bar{v}_T > \bar{v}_0$ , o tempo de transmissão pode assumir valores negativos conforme a velocidade inicial da partícula incidente, aqui representada pelo momento médio  $\hbar k$ . Isso significa que o pico transmitido pode emergir em  $x = a$  antes da chegada do pico incidente em  $x = 0$ , sendo isso possível porque o pacote de ondas transmitido é formado preferencialmente pelas componentes mais rápidas do pacote de ondas incidente.

Se interpretarmos os picos dos pacotes de ondas como as posições clássicas das partículas, teremos dificuldades com os valores negativos de  $\Delta t_T$ , que pode sugerir a emergência de uma partícula ao final da barreira de potencial antes de a mesma ter atingido e penetrado nesta barreira. Resultados semelhantes são conhecidos na propagação e transmissão de pulsos de luz através de meios dispersivos, dando origem a muitas controvérsias [10], [11], tendo como foco a possibilidade de velocidades superluminais dos pulsos transmitidos através desses meios e a consequente violação dos princípios da Relatividade Restrita.

Sem pretender entrar nessa polêmica, vamos analisar, na seção seguinte, o comportamento do pacote de ondas penetrado na barreira de potencial, do ponto de vista da sua fase estacionária. Esse enfoque tem a vantagem de eliminar os fatores devidos às interferências das ondas incidentes e refletidas, que tendem a descaracterizar os picos tanto do pacote incidente como do refletido na região imediatamente próxima à barreira do potencial.

### 3 Região do potencial

Na região do potencial, em  $0 < x < a$ , o pacote de ondas pode ser escrito na forma

$$\psi_2(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_0} \psi_2(k|x) e^{if_2(k|x,t)} dk \quad (41)$$

onde definimos a distribuição de momentos por

$$\psi_2(k|x) = g(k|\bar{k}) \frac{2\bar{r} \cos}{r} \quad (42)$$

e a fase

$$f_2(k|x,t) = \phi(k|x) + k \int \phi(k) t \quad (43)$$

respectivamente. A dependência explícita em  $x$  na distribuição de momentos  $\psi_2(k|x)$  aparece através da quantidade  $\bar{r}$  definida pela expressão

$$\bar{r} e^{\alpha} = \frac{1}{2 \cosh(2(x-a)) + 2 \cos 2} \quad (44)$$

assim como uma dependência não trivial em  $x$  na fase  $f_2(k|x,t)$  através da função  $\phi(k|x)$  definida pelas equações

$$e^{2\alpha} e^{\alpha i} e^{\alpha x} = e^i e^{\alpha x} = \bar{r} e^{\alpha i \phi(k|x)} \quad (45)$$

e

$$\tan \phi = \coth[\alpha(x-a)] \tan \quad (46)$$

Nas figuras 3, 4 e 5, a probabilidade de se encontrar a partícula é representada pela densidade de pontos. A figura 3, obtida pela técnica de Monte Carlo [12]-[13], ilustra a evolução temporal do sistema traçando a trajetória probabilística da partícula contendo os ramos incidente, refletido e transmitido, a partir da distribuição de probabilidades  $\psi(x,t)^2$ .

Uma representação desse tipo, apesar de não fornecer uma precisão em termos numéricos, permite uma visualização global do sistema, de onde pode-se extrair uma razoável compreensão qualitativa do mesmo. O pico do pacote de ondas incidente é localizado inicialmente na posição  $x = 0$ , propagando-se à direita com velocidade de grupo  $\bar{v}_0$ , atingindo a região do potencial,  $x = 0$ , no instante  $t = t_0$ . A coordenada espacial (eixo  $x$ ), para  $0 < x < a$  corresponde à horizontal e a coordenada temporal (eixo  $t$ ) corresponde à vertical, no intervalo  $0 < t < (2a+1)\bar{v}_0$  onde  $a$  é

a largura da região do potencial, tomada como unidade de comprimento. A região do potencial é marcada por dois traços nas partes superior e inferior da figura, delimitando a região  $0 < x < a$ , o efeito da interferência aparecendo imediatamente antes desta região. Este caso corresponde a uma distribuição gaussiana centrada inicialmente em  $x = 0$  com velocidade incidente  $\bar{v}_0 = \bar{k} = 0.5$  e largura inicial do pacote de ondas definida por  $4\sigma_k^2 = 0.01$  e largura da região de potencial,  $a = 1$ .

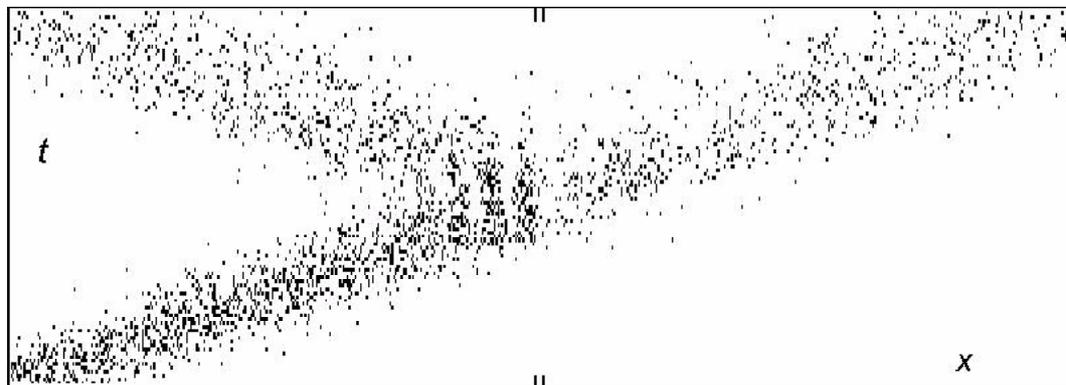


Figura 3: Densidade de pontos da trajetória probabilística correspondente a um pacote de ondas gaussiano representando uma partícula incidente sobre uma barreira de potencial, para  $a = 1$ ,  $\bar{k} = 0.5 k_0$  e  $4\sigma_k^2 = 0.01 k_0^2$ , na região  $0 < x < 1$ . As duas marcas centrais superiores e inferiores delimitam a região do potencial.

A figura 4 faz uma tomada do mesmo sistema na região  $1 < x < 1 + a$ , o que já torna possível visualizar melhor o processo de interferência entre as ondas incidentes e as refletidas.

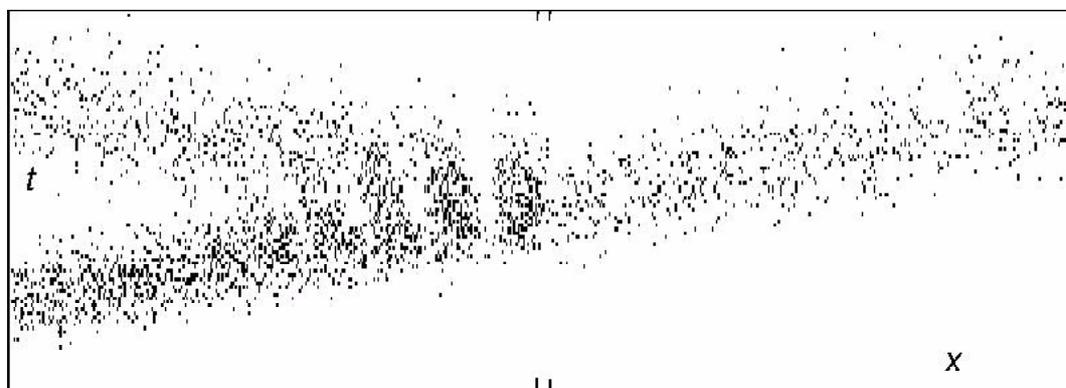


Figura 4: Densidade de pontos da trajetória probabilística correspondente a um pacote de ondas gaussiano representando uma partícula incidente sobre uma barreira de potencial, para  $a = 1$ ,  $\bar{k} = 0.5 k_0$  e  $4\sigma_k^2 = 0.01 k_0^2$ , na região  $1 < x < 2$ . As duas marcas centrais superiores e inferiores delimitam a região do potencial.

A Figura 5 corresponde à região  $0 < x < a$ . Estas três figuras são úteis para uma visualização do comportamento do sistema no tempo.

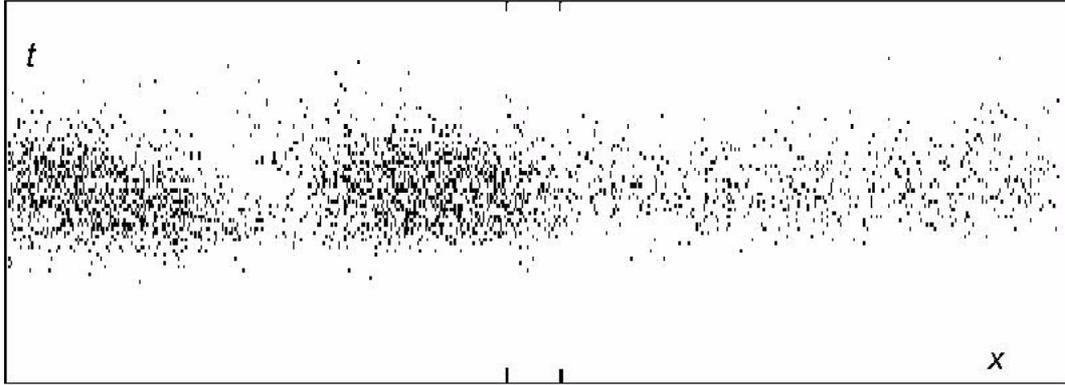


Figura 5: Densidade de pontos correspondentes a um pacote de ondas gaussiano representando uma partícula incidente sobre uma barreira de potencial, para  $a = 100$ ,  $\bar{k} = 0.5 k_0$  e  $4\sigma_k^2 = 0.01 k_0^2$ , na região  $0 < x < a$ . As duas marcas centrais superiores e inferiores delimitam a região do potencial.

Há dois fatos relevantes a se considerar:

1. As componentes rápidas do pacote de ondas incidente chegam à região do potencial, em  $x = 0$ , obviamente antes das demais componentes mais lentas. As ondas rápidas são preferencialmente transmitidas, de modo que pode ocorrer a formação do pico do pacote de ondas transmitido antes que o pico do pacote de ondas incidente, supondo que não seja destruído pelas interferências, atinja a posição  $x = 0$  no instante  $t_0$ .

2. Ao chegarem à barreira de potencial, uma fração das ondas mais rápidas é refletida, produzindo interferência com as ondas que ainda chegam, num processo em cadeia que acaba destruindo a identidade do pacote de ondas incidente, com a formação de vários picos, num padrão típico de ondas estacionárias. A rigor, esses dois fatos invalidam qualquer noção de chegada do pico do pacote de ondas incidente à região do potencial.

É interessante notar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \phi(k|x) = \frac{\pi}{2} \quad (47)$$

de modo que, na interface  $x = a$  as fases dos pacotes de ondas  $\phi_2(x|t)$  e  $\phi_T(x|t)$  são iguais,

$$f_2(k|x = a|t) = f_T(k|x = a|t) = k|x| \phi(t) \quad (48)$$

Devido às condições de contorno nesta interface, essa igualdade das fases implica também a igualdade das distribuições de momentos

$$\phi_2(k|a) = \phi_T(k) = g(k|\bar{k}) \frac{2 \sin 2}{r} e^{\pi a} \quad (49)$$

onde se usou a igualdade  $\bar{r} = 2e^{-\bar{k}a} \sin$  em  $x = a$ , como pode-se ver a partir de (44). Uma consequência importante é que

$$\bar{k}_2(x = a) = \bar{k}_T$$

Ao contrário das outras regiões, a distribuição de momentos da região de potencial tem uma dependência explícita em  $x$  contida no fator multiplicativo  $\bar{r}e^{-\bar{k}a}$  definido na Eq. (44), cujo comportamento é mostrado na Figura 6 para três valores do momento, em unidades de  $k_0$ , a saber,  $k/k_0 = 0,3$  (linha tracejada superior),  $k/k_0 = 0,5$  (linha contínua) e  $k/k_0 = 0,7$  (linha alternada), no intervalo  $x < x/a < 1$ .

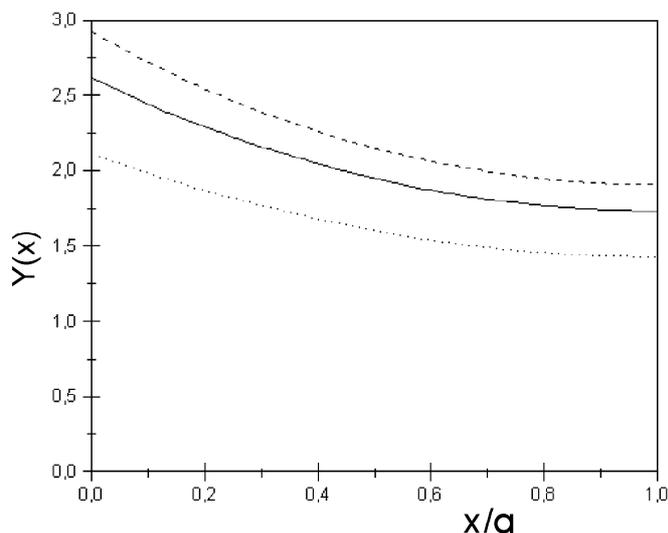


Figura 6: Gráfico do fator  $\bar{r}e^{-\bar{k}a} = Y(x)$  na Figura, que define o comportamento em  $x$  da distribuição de momentos  $\bar{k}_2(k/x)$ , para três valores do momento:  $k = 0,3 k_0$  (linha tracejada);  $k = 0,5 k_0$  (linha contínua); e,  $k = 0,7 k_0$  (linha pontilhada).

Esta dependência em  $x$  acarreta um pequeno desvio do pico, para cada ponto  $x$ , da distribuição de momentos  $\bar{k}_2(k/x)$  em relação ao pico da distribuição inicial  $g(k/\bar{k})$ . A Figura 7 traz uma sucessão de gráficos da distribuição de momentos  $\bar{k}_2(k/x)$  para vários valores de  $x$ , em unidades de  $a$ , entre  $x = 0$  e  $x = a$ , a saber:  $x/a = 0; 0,25; 0,50; 0,75; 1$  para  $k/k_0 = 0,3$ . Para efeito de comparação, incluímos a distribuição de momentos inicial  $g(k/\bar{k})$ , em linha tracejada.

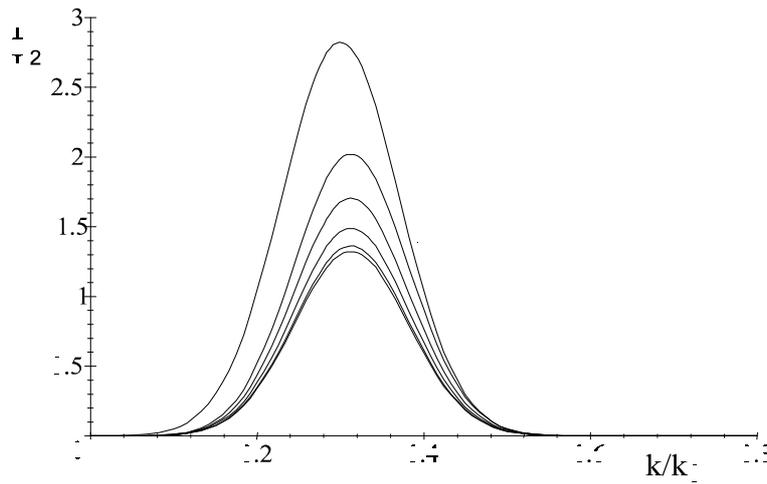


Figura 7: Distribuição de momentos  $\phi_2(k|x)$  com  $4\frac{\sigma^2}{k} = 0.01 k_0^2$  para  $x/a = 0$  (pico mais alto); 0.25; 0.50; 0.75; 1.0 (pico mais baixo). Para efeito de comparação, incluímos em linha tracejada a distribuição de momentos inicial  $g(k - \bar{k})$ , definida em Eq. (2.14). No eixo dos x, mostra-se a quantidade  $k/k_0$

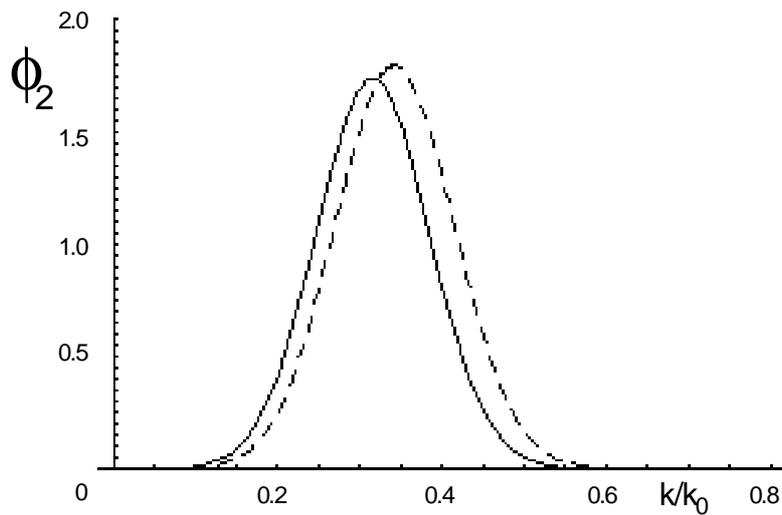


Figura 8: Distribuição de momentos  $\phi_2(k|x)$  com  $4\frac{\sigma^2}{k} = 0.01 k_0^2$  e  $\bar{k}_2 = 0.3 k_0$  para  $k_0 a = 16$  calculado nas posições  $x = 0$  (linha contínua) e  $x = a$  (linha tracejada), onde se nota a dependência em  $x$  do pico da distribuição. A curva em linha tracejada está ampliada por um fator  $2 \times 10^6$

Pode-se ver que a distribuição  $\phi_2(k|x)$  é uma função bem localizada, com um pico bem definido, levemente deslocado em relação ao pico da distribuição inicial  $g(k - \bar{k})$  tal que  $\bar{k}_2 > \bar{k}$ , sendo decrescente em  $x$ , devido ao fator  $\bar{r}(x)$ . A posição do

pico,  $\bar{k}_2$ , também é  $x$ -dependente, embora o deslocamento seja quase imperceptível na escala dessa figura, onde  $\bar{k}_2 \approx 0,312 k_0$  ( $\bar{k} = 0,3 k_0$ ) para todo  $x$ . Em  $x = a$ , vale a igualdade  $\bar{k}_2(k=a) = \bar{k}_T(k)$ , consequência da continuidade da função de onda associada à igualdade das fases, e implica que nesta interface,  $\bar{k}_2 = \bar{k}_T \approx 0,313$ .

A figura 8 foi produzida para ilustrar essa dependência, embora muito pequena, de  $\bar{k}_2$  em função de  $x$ , compreendido entre  $\bar{k} < \bar{k}_2 < \bar{k}_T$ . São dois gráficos superpostos da distribuição de momentos  $\bar{k}_2(k=x)$  para  $\bar{k} = 0,3 k_0$  e  $\frac{2}{k} = 0,01 k_0^2$  e  $k_0 a = 16$  calculados nas posições  $x = 0$  (linha cheia)  $x = a$  (linha tracejada). No entanto, é preciso ressaltar que essa dependência somente se torna sensível para relações entre altura e largura da barreira dadas por  $k_0 a \approx 16$ , que representa uma barreira muito larga (ou alta), de modo que a probabilidade de transmissão por tunelamento é muito pequena; no caso,  $\bar{k}_2(k=x=0) \approx \bar{k}_2(k=x=a) \approx 10^6$ . Este é o fator multiplicativo usado nessa figura para a distribuição em  $x = a$  (linha tracejada) para numa escala compatível com a distribuição em  $x = 0$ .

A distribuição de momentos  $\bar{k}_2(k=x)$ , fortemente concentrada em torno de um valor de pico  $\bar{k}_2$  e simétrica em relação ao mesmo, permite o uso formal do método da fase estacionária. O pico da distribuição  $\bar{k}_2(k=x)$  decresce à medida que penetra na região de potencial, até se igualar à distribuição de momentos do pacote de ondas transmitido, em  $x = a$ . A tabela 1 relaciona  $\bar{k}_2(x)$  com o momento incidente  $\bar{k}$  para diversos valores de  $x/a$  no intervalo  $0 < x/a < 1$ . Vemos que praticamente toda a variação do momento ocorre na interface  $x = 0$ , sendo praticamente constante no interior da região do potencial.

$k/x$	0	0,25	0,50	1	$k/x$	0	0,25	0,50	1
0,30	0,312	0,313	0,313	0,313	0,56	0,564	0,565	0,565	0,565
0,32	0,331	0,332	0,332	0,332	0,58	0,584	0,584	0,584	0,585
0,34	0,351	0,351	0,351	0,351	0,60	0,604	0,604	0,604	0,604
0,36	0,370	0,370	0,370	0,370	0,62	0,623	0,624	0,624	0,624
0,38	0,389	0,389	0,389	0,389	0,64	0,643	0,643	0,644	0,644
0,40	0,408	0,408	0,409	0,409	0,66	0,663	0,663	0,663	0,663
0,42	0,428	0,428	0,428	0,428	0,68	0,683	0,683	0,683	0,683
0,44	0,447	0,447	0,447	0,447	0,70	0,702	0,703	0,703	0,703
0,46	0,466	0,467	0,467	0,467	0,72	0,722	0,723	0,723	0,723
0,48	0,486	0,486	0,486	0,486	0,74	0,742	0,742	0,743	0,743
0,50	0,505	0,506	0,506	0,506	0,76	0,762	0,762	0,763	0,763
0,52	0,525	0,525	0,525	0,525	0,78	0,782	0,782	0,782	0,782
0,54	0,545	0,545	0,545	0,545					

Tabela 1: Tabela de variação do momento  $\bar{k}_2(x)$  em função do momento incidente  $\bar{k}$ , para o intervalo  $0 < x/a < 1$ .

A figura 9 mostra a dependência de  $\bar{k}_2(x)$  em função do momento incidente  $\bar{k}$  extraída da tabela 1, para  $x/a = 1$ , onde também  $\bar{k}_2(x = a) = \bar{k}_T$ . Vemos uma função aparentemente linear que pode ser ajustada para

$$\bar{k}_2 = A + B\bar{k} \tag{50}$$

para os parâmetros  $A=0.01705$  e  $B=0.97962$

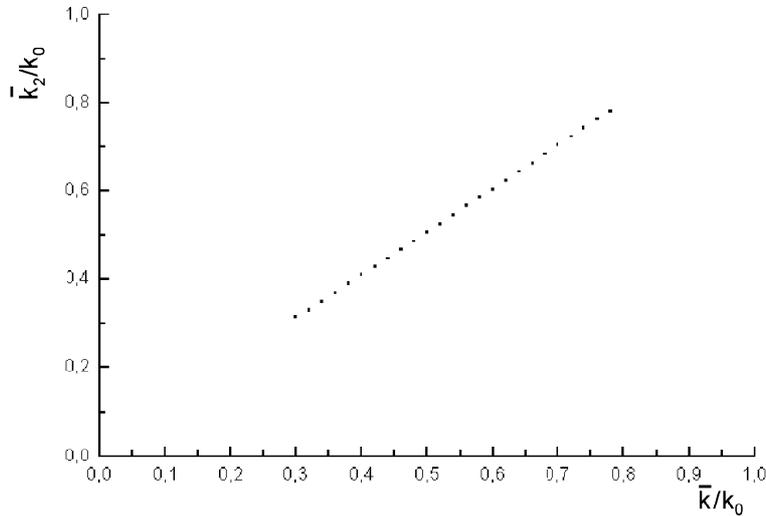


Figura 9: Relação, aparentemente linear, entre os momentos  $\bar{k}_2(a) = \bar{k}_T$  e os momentos incidentes  $\bar{k}$

Da condição de fase estacionária

$$\left. \frac{df_2(k)}{dk} \right|_{k=\bar{k}_2} = 0 \tag{51}$$

resulta

$$\frac{d\phi(k;x)}{dk} - \frac{\hbar k}{m} t - \left. \frac{d\phi(k)}{dk} \right|_{k=\bar{k}_2(x)} = 0 \tag{52}$$

levando à equação

$$v_2(x) t - \bar{v}_2(x) - \bar{v}_2(x) = 0 \tag{53}$$

onde

$$v_2(x) = \frac{\hbar \bar{k}_2(x)}{m} - \bar{v}_2 = \left. \frac{d\phi(k)}{dk} \right|_{k=\bar{k}_2(x)} \tag{54}$$

e

$$\bar{v}_2(x) = \left. \frac{d\phi(k;x)}{dk} \right|_{k=\bar{k}_2(x)} \tag{55}$$

Temos

$$\bar{\tau}_2(x) = \frac{1}{\bar{k}_2(x)} \frac{(2 \sinh 2\bar{a} \cos ka \sin 4)}{(\cosh 2\bar{a} \cos 4)} \quad (56)$$

e

$$\bar{\tau}_2(x) = \frac{1}{\bar{k}_2(x)} \frac{\sinh[2\bar{a}(a-x)] \cos k(a-x) \sin 2}{\cosh[2\bar{a}(a-x)] \cos 2} \quad (57)$$

onde vemos que apenas  $\bar{\tau}_2(x)$  carrega uma dependência explícita em  $x$ , embora todos tenham uma dependência implícita através de  $\bar{k}_2(x)$

Podemos ver que, em  $x = 0$ ,

$$\bar{\tau}_2(0) = \frac{1}{\bar{k}_2} \frac{\sinh(2\bar{a}) \cos ka \sin 2}{\cosh(2\bar{a}) \cos 2} \quad (58)$$

e em  $x = a$ ,

$$\bar{\tau}_2(a) = 0 \quad (59)$$

A equação da trajetória, (53), em  $x = 0$  e  $x = a$  -ca, respectivamente

$$v_2 t(x=0) - \bar{\tau}_2 - \bar{\tau}_2(0) = 0 \quad (60)$$

e

$$v_2 t(x=a) - \bar{\tau}_2 = 0 \quad (61)$$

Vemos, portanto, que o pico do pacote de ondas surge em  $x = 0$  no instante

$$t_2(0) = \frac{\bar{\tau}_2(0)}{v_2(0)} - \frac{\bar{\tau}_2(0)}{v_2(0)} \quad (62)$$

e chega a  $x = a$  no instante

$$t_2(a) = \frac{\bar{\tau}_2(a)}{v_2(a)} - \frac{\bar{\tau}_2(a)}{v_2(a)} \quad (63)$$

definindo o intervalo de tempo

$$\Delta t_2 = t_2(a) - t_2(0) \quad (64)$$

que representa o tempo de trânsito do pico do pacote de ondas entre  $x = 0$  e  $x = a$ . Esse tempo também carrega dependência em  $\bar{a}$ , a localização inicial do pacote de ondas incidente,

$$\Delta t_2 = \frac{\bar{\tau}_2(a)}{v_2(a)} - \frac{\bar{\tau}_2(0)}{v_2(0)} - \frac{\bar{\tau}_2(a)}{v_2(a)} + \frac{\bar{\tau}_2(0)}{v_2(0)} \quad (65)$$

Já vimos que, em  $x = a$ ,  $\bar{k}_2(x)$  assume o valor

$$\bar{k}_2(a) = \bar{k}_T \quad v_2(a) = v_T \quad (66)$$

e portanto

$$\bar{\tau}_2(a) = \bar{\tau}_T \quad (67)$$

resultando

$$t_2(a) = \frac{\bar{v}_T}{v_T} \bar{v}_T = t_3 \quad (68)$$

onde  $t_3$  define o tempo de emergência do pacote de ondas transmitido, e portanto

$$t_2 = \frac{\bar{v}_T}{v_T} \frac{\bar{v}_T}{v_2(0)} \bar{v}_T + \frac{\bar{v}_2(0)}{v_2(0)} + \frac{\bar{v}_2(0)}{v_2(0)} \quad (69)$$

Visto que a variação interna do momento é muito pequena, de modo que  $\bar{v}_T = \bar{v}_2(a) \approx \bar{v}_2(0)$  assim com  $\bar{v}_2(0) \approx \bar{v}_T$ , podemos recorrer à aproximação

$$t_2 \approx \frac{\bar{v}_2(0)}{\bar{v}_2(0)} = \int_0^{\bar{k}_T} \frac{1}{k} \frac{\sinh(2ka) \cos ka \sin 2k}{\cosh(2ka) \cos 2k} dk \quad (70)$$

cujo comportamento em função do momento incidente  $k$  é mostrado na figura 10, a partir do ajuste linear entre os momentos incidente e transmitido. Nessa aproximação, o tempo de trânsito não carrega mais a dependência na posição inicial, definida por  $a$  do pacote de ondas incidente.

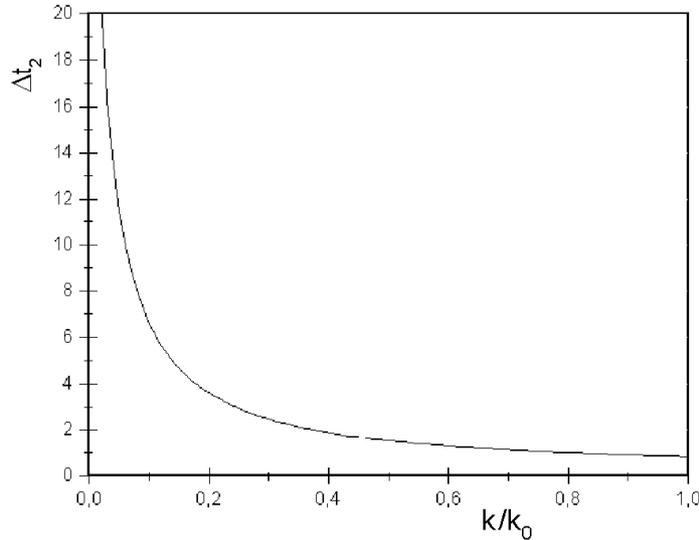


Figura 10: Tempo de trânsito do pico do pacote de ondas entre  $x = 0$  e  $x = a$  Eq. (3.30).

## 4 Conclusões

No cálculo do tempo de transmissão  $t_T$ , assumimos que o pico do pacote de ondas incidente chega em  $x = 0$  no instante  $t_0 = l/\bar{v}_0$ , obtido a partir da extrapolação da trajetória

$$\bar{x}(t) = \bar{v}_0 t \quad (71)$$

para o intervalo  $-\infty < x < 0$ , trajetória está definida pelo pico do pacote de ondas incidente. No entanto, as interferências entre as ondas incidentes e refletidas destroem a identidade do pacote de ondas incidente antes de atingir a posição  $x = 0$ , e além do mais, o pacote de ondas transmitido é constituído a partir das ondas mais rápidas do pacote incidente, pelo fato de as mesmas serem preferencialmente transmitidas em comparação com as componentes mais lentas, que são preferencialmente refletidas. Desse modo, o pico do pacote transmitido pode surgir num tempo anterior à suposta chegada do pico incidente no instante  $t_0$ . É como se a partícula, quando transmitida, sofresse uma aceleração e um conseqüente aumento de velocidade imediatamente antes de atingir a barreira de potencial, acontecendo exatamente o oposto se a mesma for refletida.

Se compararmos o tempo de transmissão, calculado anteriormente,

$$\Delta t_T = t_3 - t_0 = \frac{\Delta x}{v_T} - \frac{\Delta x}{\bar{v}} - \frac{\Delta t_T}{v_T} \quad (72)$$

com o nosso tempo de trânsito, podemos verificar que

$$\Delta t_2 = \Delta t_T - \Delta t_X \quad (73)$$

com

$$\Delta t_X = \frac{\Delta x \cdot v_2(0) - \Delta t_2(0)}{v_2(0)} - \frac{\Delta x}{\bar{v}} = t_2(0) - t_0 \quad (74)$$

Essa expressão mostra que o intervalo de tempo  $\Delta t_X$  é justamente a diferença de tempo entre a suposta chegada do pico do pacote de ondas incidente e a emergência do pico do pacote de ondas na região do potencial, em  $x = 0$ .

A Figura 11 traz os gráficos comparativos dos tempos  $\Delta t_T$  (linha tracejada),  $\Delta t_X$  (traços longos) e  $\Delta t_2$  (linha contínua). Ela mostra que o tempo de trânsito  $\Delta t_2$  é positivo definido, enquanto que o tempo de transmissão  $\Delta t_T$  pode assumir valores negativos que ocorre quando o pico transmitido surge num tempo anterior a  $t_0$ . A dependência em  $\Delta x$  parâmetro que define a posição inicial do pacote de ondas incidente, é praticamente eliminada. Em todo caso, qual desses tempos é mais relevante do ponto de vista do tunelamento só pode ser decidido a partir do conhecimento do que realmente é medido ou mensurável no laboratório.

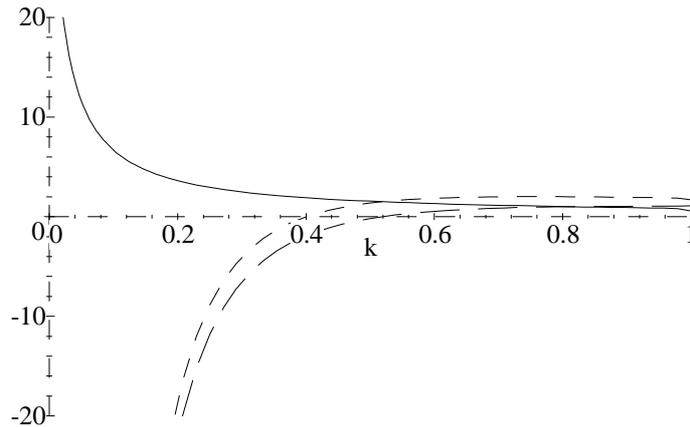


Figura 11: Comparação entre os tempos  $t_2$ , Eq. (3.30) (linha contínua),  $t_T$ , Eq. (4.2) (linha tracejada), e  $t_X$  Eq. (4.4) (traços longos). No eixo dos x,  $k$  está expresso em unidades de  $k_0$

## References

- [1] V. M. de Aquino, V. C. Aguilera-Navarro, M. Goto e H. Iwamoto, *Tempo de tunelamento para pacotes de ondas através de uma barreira de potencial retangular*, Notas de Física/ Departamento de Física - UEL, DF-tO980601 (1998).
- [2] V. M. de Aquino, V. C. Aguilera-Navarro, M. Goto e H. Iwamoto, *Tunneling time through a rectangular potential*, Phys. Rev. A **58**, 4359-4367 (1998).
- [3] R. Sala, S. Brouard e J. G. Muga, *The influence functional: application to tunneling*, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, 6233-6244 (1995).
- [4] T. E. Hartman, *Tunneling of a wave packet*, J. Appl. Phys. **33**, 3427 (1962).
- [5] M. Büttiker e R. Landauer, Phys. Rev. Lett. **49**, 1739 (1982).
- [6] E. H. Hauge e J. A. Størneng, Rev. Mod. Phys. **61**, 917 (1989).
- [7] S. Collins, David Lowe e J. R. Barker, J. Phys. **C20**, 6213 (1987).
- [8] Morgan W. Mitchell, Raymond Y. Chiao, *Negative group delay and "fronts" in a causal system: An experiment with very low frequency bandpass amplifiers*, Phys. Letters **A230**, 133-138 (1997).
- [9] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover: New York (1956).
- [10] C. G. B. Garret e D. E. McCumber, *Propagation of a Gaussian light pulse through an anomalous dispersion medium*, Phys. Rev. **A1**, 305-314 (1970).

- [11] G. Nimtz, *New knowledge of tunneling from photonic experiments*, Adriatico Research Conference: "Tunneling and its applications", World Scientific, 1997.
- [12] M. Goto, V. M. de Aquino, V. C. Aguilera-Navarro e H. Iwamoto, *Técnicas de representação por imagens pelo método de Monte Carlo*, Anais da 6a. Reunião Anual da Soc. Bras. Pesq. Nikkeis, (1998), p. 380, Ilha Solteira (SP) Notas de Física / Dpto. de Física/UEL (1998).
- [13] V. M. de Aquino, V. C. Aguilera-Navarro, M. Goto e H. Iwamoto, *Monte Carlo Image Representation*, A sair no American Journal of Physics.