

## A função zeta de Riemann

Maria Cecília K. Aguilera-Navarro<sup>1</sup>, Valdir C. Aguilera-Navarro<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Matemática - UNICENTRO

85015-430 Guarapuava, PR

<sup>2</sup>Departamento de Química e Física - UNICENTRO

85015-430 Guarapuava, PR

Ricardo C. Ferreira<sup>3</sup> e Neuza Teramon<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Departamento de Matemática - UEL

86051-970 Londrina, PR

Resumo: *Faz-se um estudo extensivo da função zeta de Riemann. Sua origem e relação com a teoria dos números primos também são discutidas.*

Palavras chaves: *Função zeta de Riemann*

Abstract: *The origin of the Riemann zeta function is presented. An extensive study of this function is carried out. Its relation with the theory of prime number is also discussed.*

Key words: *Riemann zeta function*

### 1. Introdução

A função zeta de Riemann desempenha um papel muito importante em várias áreas de pesquisa moderna. Na Física Teórica aparece em problemas de regularização de determinantes infinitos que surgem em Teoria de Campos; e, também, em alguns trabalhos teóricos sobre o importante fenômeno da supercondutividade. Mas é entre os matemáticos que aquela função exerce um maior fascínio devido, principalmente, à famosa conjectura de Riemann (que discutiremos abaixo). Para se ter uma idéia da importância dessa conjectura, agora que foi provado o *Último Teorema de Fermat* (um parêntese: “último” no sentido de último a ser provado), levantou-se a seguinte questão: *e agora, onde encontrar motivação para continuar inspirando, provocando*

*e desafiando as próximas gerações de matemáticos?* Aqui a conjectura de Riemann desponta como um dos candidatos — ao lado da conjectura dos primos gêmeos e outros problemas mais complexos.

De relevante importância para o estudo dos números primos, a função zeta de Riemann invariavelmente ocupa amplo espaço em qualquer texto sobre a Teoria dos Números. Sua relação com outras funções especiais também lhe reserva uma posição importante na Teoria das Funções.

Apesar de sua relevância, os autores não conhecem nenhuma literatura em língua portuguesa sobre o assunto. O presente trabalho é uma pequena contribuição para aqueles que tenham interesse, ou mesmo curiosidade a respeito da função zeta de Riemann, e não tenham acesso à literatura estrangeira. O que se espera do leitor são apenas conceitos básicos de Análise Matemática e da Teoria das Funções de Variável Complexa.

Neste trabalho desenvolveremos um estudo geral da função zeta de Riemann. Na próxima seção mostraremos sua origem, daremos sua definição e algumas de suas propriedades elementares. Na seção 3, apresentaremos alguns resultados preliminares visando ao estudo posterior de suas propriedades analíticas. A função zeta de Riemann permite uma representação integral que será estudada na seção 4. Nas seções 5 e 6, estenderemos o domínio de definição da função zeta de Riemann e derivaremos a sua equação funcional, que estabelece uma relação com a função gama de Euler. A famosa conjectura de Riemann, que permanece um problema aberto na Matemática, é apresentada na seção 7. Como veremos, a função zeta de Riemann originou-se da busca de solução a um problema na teoria dos números primos. Sua relação com tais números é estudada na seção 8. Alguns cálculos algébricos foram deslocados para o Apêndice A, para não congestionar o texto principal. No Apêndice B colecionamos algumas das propriedades da função zeta de Riemann e listamos seus valores em alguns pontos particulares. Finalmente, uma bibliografia é oferecida para os interessados em se aprofundar sobre o tema.

## 2. Definição da função zeta de Riemann

Quando tentava obter uma fórmula que permitisse calcular o número de primos menores do que um número dado  $n$ , Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi conduzido a investigar a série

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad (2.1)$$

hoje conhecida como *função zeta de Riemann*. Neste trabalho vamos empregar, também, a designação mais simples de *função zeta*, sempre subentendendo que se trata da função zeta de Riemann. A variável  $z$  é um número complexo da forma  $z = x + iy$ , onde  $i = \sqrt{-1}$ , e  $x$  e  $y$  são reais. Veremos que esta função é analítica no semi-plano  $x = \operatorname{Re}(z) > 1$ . Mostraremos, também, que a analiticidade de (2.1) pode ser estendida a todo plano complexo, exceto no ponto  $z = 1$ . Antes, porém, de

estudar a convergência da série (2.1), examinemos algumas características da função zeta de Riemann.

A figura 2.1 mostra um gráfico da função  $\zeta$  para valores reais do seu argumento. Notemos, *en passant*, algumas características gerais dessa função, todas elas ilustradas na figura. Todos os zeros reais estão no eixo real negativo, localizados nos pontos  $x = -2n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , isto é,  $\zeta(-2n) = 0$ . No caso particular da origem, temos  $\zeta(0) = -1/2$ . Sua única singularidade está em  $x = 1$ , onde seu resíduo, como veremos, é também 1. Finalmente,  $\zeta(x) > 1$  para  $x > 1$  e  $\zeta(x) \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow \infty$ .

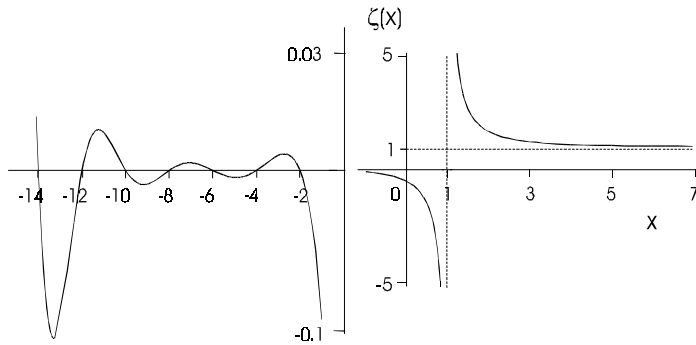


Figura 2.1. Função  $\zeta(x)$ ,  $x$  real. A figura mostra os zeros triviais em  $x = -2n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  e a localização do único pólo em  $x = 1$ . Notemos que  $\zeta(0) = -0.5$  e que  $\zeta(x) \rightarrow 1$  quando  $x \rightarrow \infty$ . As escalas são diferentes nas partes esquerda e direita do gráfico.

Para valores inteiros, a função  $\zeta$  foi estudada por Euler, que provou a seguinte fórmula notável no caso de argumentos inteiros positivos pares

$$\zeta(2n) = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

onde  $B_k$  são os números de Bernoulli definidos como os coeficientes da expansão de Taylor da função  $t/(e^t - 1)$ , isto é

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \quad (2.3)$$

Os primeiros números de Bernoulli são

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \dots \quad (2.4)$$

Euler foi o primeiro a mostrar que a soma dos recíprocos dos quadrados dos inteiros positivos, isto é  $\zeta(2)$ , vale  $\pi^2/6$  (esse valor pode ser verificado a partir do resultado (2.2)). A equação (2.2) mostra que o valor da função  $\zeta$  para argumentos inteiros positivos  $2n$  é proporcional à potência  $2n$  de  $\pi$ . Uma questão ainda em aberto é se o mesmo é verdadeiro quando o argumento de  $\zeta$  é um inteiro positivo

ímpar. Por exemplo, será que  $\zeta(3)$  é proporcional a  $\pi^3$ ? Recentemente, em 1978, R. Apéry provou que  $\zeta(3)$  é pelo menos um número irracional.

Nos pontos ímpares negativos o valor da função zeta também pode ser expresso em termos dos números de Bernoulli, a saber

$$\zeta(1 - 2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Quando o argumento  $z$  da função zeta é complexo, esta função assume valores também complexos. Na figura 2.2 mostramos o gráfico do valor absoluto,  $|\zeta(z)|$ . O inverso de  $|\zeta(z)|$  é mostrado na figura 2.3.

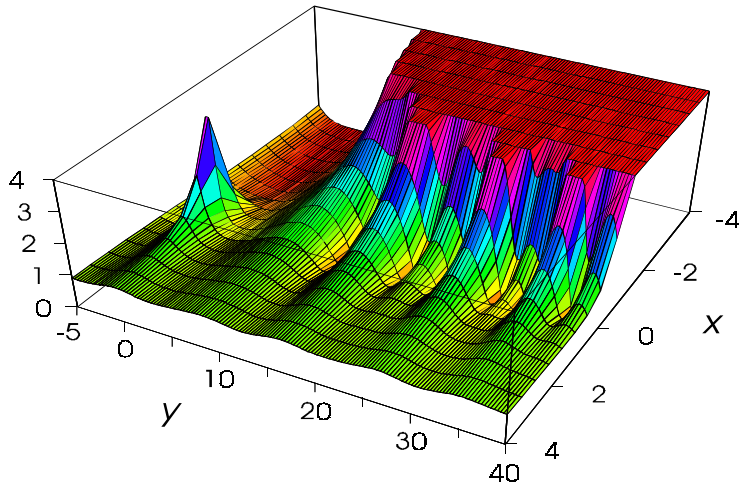


Figura 2.2. Valor absoluto  $|\zeta(z)|$  da função zeta de Riemann para  $z = x + iy$ . Nesta figura, e na seguinte, podemos observar alguns zeros não triviais da função zeta de Riemann e o pólo em  $x = 1$ .

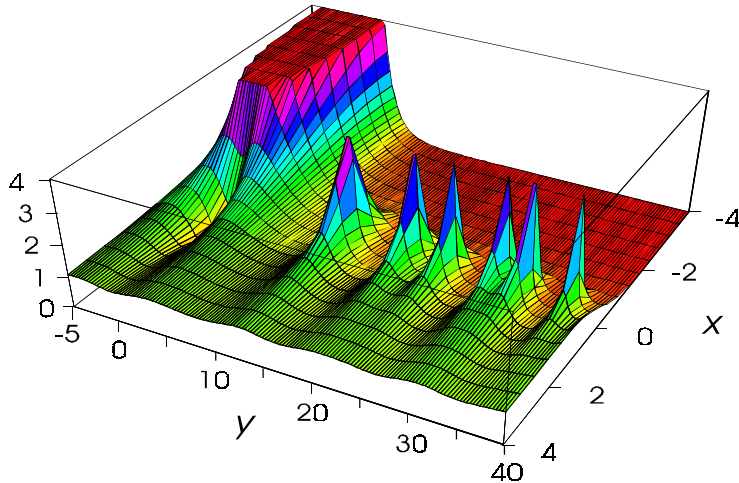


Figura 2.3. Inverso de  $|\zeta(z)|$  para  $z = x + iy$ . Nesta figura, e na anterior, podemos observar alguns zeros não triviais da função zeta de Riemann.

Algumas outras propriedades e valores especiais da função zeta de Riemann são listadas no Apêndice B.

Após essa breve apresentação de algumas propriedades da função zeta de Riemann, passemos a discutir a convergência da série (2.1).

Primeiramente examinemos a convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$  com  $\operatorname{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon$ .

Seja  $n$  um número inteiro positivo. Temos as seguintes igualdades,

$$\begin{aligned} |n^z| &= |e^{\ln(n^z)}| = |e^{z \ln(n)}| &&= |e^{(\operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z)) \ln(n)}| \\ &= |e^{\operatorname{Re}(z) \ln(n)} e^{i\operatorname{Im}(z) \ln(n)}| &&= e^{\operatorname{Re}(z) \ln(n)} = e^{\ln(n^{\operatorname{Re}(z)})} = n^{\operatorname{Re}(z)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-z}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re}(z)} \quad (2.6)$$

Se  $\operatorname{Re}(z) \geq 1 + \varepsilon$ , onde  $\varepsilon$  é um número positivo e arbitrariamente pequeno, teremos,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-z}| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\operatorname{Re}(z)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} \quad (2.7)$$

As séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  são conhecidas por *p-séries* ou *séries hiper-harmônicas*. Essas séries convergem se  $p > 1$  e divergem se  $p \leq 1$ . No caso da relação (2.7),

$p = 1 + \varepsilon > 1$ , ou seja, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)}$  é convergente. Usando este resultado,

juntamente com o *teste M* de Weierstrass, podemos concluir que a série  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$  converge uniformemente e absolutamente se  $\operatorname{Re}(z) > 1$ .

Segue-se, portanto, que a função zeta de Riemann é analítica se  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . Podemos estender a analiticidade de  $\zeta$ , para  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$  e futuramente para todo  $\mathbb{C}$ , exceto no ponto  $z = 1$ , onde ocorre o único pólo da função  $\zeta$ , como ilustrado na figura 2.1. Com o objetivo de ampliar a analiticidade da função zeta, precisaremos de resultados preliminares, que serão desenvolvidos com o propósito de obter a equação funcional de Riemann. Com essa equação, poderemos estender o domínio da função  $\zeta$ , para todo o plano complexo  $\mathbb{C}$ , com exceção do ponto  $z = 1$ .

### 3. Resultados preliminares

O primeiro teorema que consideraremos neste trabalho tratará da analiticidade de uma função definida através de uma integral. Esse resultado será de fundamental importância para se estender a analiticidade da função  $\zeta$ , uma vez que esta admite, também, uma representação integral conforme será estudado na próxima seção.

**Teorema 1** *Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  uma curva retificada e  $G$  um domínio em  $\mathbb{C}$ . Sejam  $\varphi : \{\gamma\} \times G \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua e  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  definida por*

$$h(z) = \int_{\gamma} \varphi(t, z) dt \quad (3.1)$$

*então  $h$  é contínua. Se  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  existe para cada ponto  $(t, z)$  em  $\{\gamma\} \times G$  e é contínua, então  $h$  é analítica e*

$$h'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, z) dt \quad (3.2)$$

*Prova:* Inicialmente provaremos que  $h$  é contínua em  $G$ , ou seja, dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $|h(z) - h(z')| < \varepsilon$  sempre que  $|z - z'| < \delta$  para todos os pontos  $z' \in G$ .

Temos

$$\begin{aligned} |h(z) - h(z')| &= \left| \int_{\gamma} \varphi(t, z) dt - \int_{\gamma} \varphi(t, z') dt \right| \\ &= \left| \int_{\gamma} [\varphi(t, z) - \varphi(t, z')] dt \right| \\ &\leq \int_{\gamma} |\varphi(t, z) - \varphi(t, z')| |dt| \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como a função  $\varphi$  é contínua, por hipótese, temos que

$$|\varphi(t, z) - \varphi(t, z')| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

sempre que

$$(t - t')^2 + (z - z')^2 < \delta^2$$

para todos os pontos  $(t, z') \in \{\gamma\} \times G$ . Em particular, fixando um  $t$  qualquer de  $\gamma$  teremos que

$$|\varphi(t, z) - \varphi(t, z')| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}, \text{ sempre que } |z - z'| < \delta$$

para todos os pontos  $(t, z') \in \{\gamma\} \times G$ . Segue, assim, que

$$|h(z) - h(z')| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)} \int_{\gamma} |dt| = \varepsilon \quad (3.4)$$

para qualquer ponto  $z' \in G$ . Logo,  $h$  é contínua em  $G$ .

O nosso próximo objetivo é mostrar que  $h$  é analítica em  $G$ . Para isto, basta mostrar que  $h$  é diferenciável em todos os pontos  $z$  pertencentes a  $G$ . Por definição, temos que

$$h'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{h(z + \Delta z) - h(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \int_{\gamma} \frac{\varphi(t, z + \Delta z) - \varphi(t, z)}{\Delta z} dz \quad (3.5)$$

Então, devemos mostrar que

$$I = \int_{\gamma} \left| \frac{\varphi(t, z + \Delta z) - \varphi(t, z)}{\Delta z} - \frac{\partial \varphi(t, z)}{\partial z} \right| dt \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

quando  $\Delta z \rightarrow 0$ .

Consideremos o disco  $|\xi - z| \leq \rho$  contido em  $G$ , e  $|\Delta z| < \rho$ . Como, por hipótese,  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  existe em todos os pontos de  $G$ , ou seja,  $\varphi$  é analítica em  $G$ , podemos representar  $\varphi$  por uma série em torno do ponto  $z + \Delta z$ , a saber,

$$\varphi(t, z + \Delta z) = \varphi(t, z) + \varphi_z(t, z) \Delta z + R_2(t, z, \Delta z) \quad (3.7)$$

onde

$$R_2(t, z, \Delta z) = \frac{(\Delta z)^2}{2\pi i} \int_k \frac{\varphi(t, \xi)}{(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)} d\xi \quad (3.8)$$

sobre a circunferência  $k : |\xi - z| = \rho$ . Como  $\varphi$  é contínua em  $G$ , em particular  $\varphi$  é contínua em  $k$ ; como  $k$  é um compacto, segue que  $\varphi$  é limitada por uma constante positiva  $M$  em  $k$ , ou seja,  $|\varphi(t, z)| \leq M$ ,  $\forall z \in k$ . Logo

$$\begin{aligned} |R_2(t, z, \Delta z)| &\leq \frac{|\Delta z|^2}{2\pi i} \int_k \frac{|\varphi(t, \xi)|}{|\xi - z|^2 |\xi - z - \Delta z|} d\xi \\ &\leq \frac{|\Delta z|^2}{2\pi i} \int_k \frac{M}{\rho^2 (\rho - |\Delta z|)} |d\xi| = \frac{M}{\rho^2 (\rho - |\Delta z|)} |\Delta z|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Se  $\Delta z \rightarrow 0$ , então  $R_2(t, z, \Delta z) \rightarrow 0$ . Voltando à expansão em série (3.7), temos que

$$\left( \frac{\varphi(t, z + \Delta z) - \varphi(t, z)}{\Delta z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, z) \right) \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

e, conseqüentemente,

$$I = \int_{\gamma} \left| \left( \frac{\varphi(t, z + \Delta z) - \varphi(t, z)}{\Delta z} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, z) \right) \right| dt \rightarrow 0 \quad (3.11)$$

quando  $\Delta z \rightarrow 0$  e, portanto,

$$h'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t, z) dt \quad (3.12)$$

existe para todos os pontos  $z \in G$ , resultando que  $h$  é analítica em  $G$ . A continuidade de  $h$  em  $G$  é imediata, pois uma vez que  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  é contínua em  $G$ , segue da primeira parte que  $h'$  também é contínua em  $G$ .  $\square$

**Lema 1** (i) *Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $S = \{z : \operatorname{Re}(z) \geq a\}$  onde  $a > 1$ . Então existe um número  $\delta$ , ( $0 < \delta < 1$ ), tal que para todo  $z$  em  $S$ ,  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| < \varepsilon$ , onde  $\delta > \beta > \alpha > 0$ .*

(ii) *Seja  $S = \{z : \operatorname{Re}(z) \leq A\}$ , onde  $-\infty < A < \infty$ . Se  $\varepsilon > 0$ , então existe um número  $k > 1$  tal que para todo  $z$  em  $S$ ,  $\left| \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| < \varepsilon$ , onde  $\beta > \alpha > k$ .*

*Prova de (i):* Como  $e^t - 1 \geq t$ , para todo  $t \geq 0$ , temos que para  $0 < t \leq 1$  e  $z \in S$

$$\left| (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} \right| \leq |t^{-1} t^{z-1}| \leq t^{a-2} \quad (3.13)$$

Como  $0 < \alpha < \beta < 1$  e  $a > 1$ , então, para todo  $z \in S$ , temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| &\leq \int_{\alpha}^{\beta} \left| (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} \right| dt \\ &\leq \int_{\alpha}^{\beta} t^{a-2} dt = \frac{t^{a-1}}{a-1} \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{a-1} \left[ \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^{a-1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto, para um  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , tal que (i) seja satisfeito.  $\square$

*Prova de (ii):* Se  $t \geq 1$  e  $z \in S$ ,  $|t^{z-1}| \leq t^{A-1}$ , por outro lado, a função  $t^{A-1} e^{-\frac{t}{2}}$  é contínua no intervalo  $[1, \infty)$  e converge para zero quando  $t \rightarrow \infty$ , então, existe uma constante  $c$  tal que  $t^{A-1} e^{-\frac{t}{2}} \leq c$  para todo  $t \geq 1$ . Assim,

$$\left| (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} \right| = \left| (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} e^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \right| \leq c e^{\frac{t}{2}} (e^t - 1)^{-1} \quad (3.15)$$

para todo  $z$  em  $S$  e  $t \geq 1$ . Se  $\beta > \alpha > k > 1$ , então

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right| \leq c \int_{\alpha}^{\beta} e^{\frac{t}{2}} (e^t - 1)^{-1} dt = c \ln \left| \left( \frac{e^{\frac{\beta}{2}} - 1}{e^{\frac{\beta}{2}} + 1} \right) \left( \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + 1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1} \right) \right| \quad (3.16)$$



Logo, dado  $\varepsilon > 0$  existe um número  $k > 1$ , tal que

$$\left| c \ln \left| \left( \frac{e^{\frac{\beta}{2}} - 1}{e^{\frac{\beta}{2}} + 1} \right) \left( \frac{e^{\frac{\alpha}{2}} + 1}{e^{\frac{\alpha}{2}} - 1} \right) \right| \right| < \varepsilon \quad (3.17)$$

para  $\beta > \alpha > k$ , o que prova a parte (ii).  $\square$

Observemos que, pelo Teorema 1, as integrais

$$\int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt, \quad 0 < \alpha < \beta < 1 \quad \text{e} \quad \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt, \quad 1 < \alpha < \beta \quad (3.18)$$

são contínuas e analíticas no intervalo  $[\alpha, \beta]$ .

**Teorema 2** (i) Se  $S = \{z : a \leq \operatorname{Re}(z) \leq A\}$ , onde  $1 < a < A < \infty$ , então a integral  $\int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$  converge uniformemente e é analítica em  $S$ .

(ii) Se  $S = \{z : \operatorname{Re}(z) \leq A\}$  onde  $-\infty < A < \infty$  então a integral  $\int_1^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$  converge uniformemente e é analítica em  $S$ .

*Prova de (i):* Sejam  $\varphi(t, z) = (e^t - 1)^{-1} t^{z-1}$  e  $f_n(z) = \int_{1/n}^n \varphi(t, z) dt$  sobre o segmento de reta  $\left[ \frac{1}{n}, n \right]$ .

Pelo Teorema 1, existe  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  sobre todos os pontos de  $\left[ \frac{1}{n}, n \right] \times S$ , portanto,  $f_n$  é analítica sobre  $S$ .

Consideremos  $1 < n < m$ . Então,

$$\begin{aligned} f_m(z) - f_n(z) &= \int_{1/m}^m \varphi(t, z) dt - \int_{1/n}^n \varphi(t, z) dt \\ &= \int_{1/m}^m \varphi(t, z) dt + \int_{1/n}^n \varphi(t, z) dt + \int_n^m \varphi(t, z) dt - \int_n^m \varphi(t, z) dt \\ &= \int_{1/m}^m \varphi(t, z) dt + \int_n^{1/n} \varphi(t, z) dt + \int_n^m \varphi(t, z) dt + \int_m^n \varphi(t, z) dt \\ &= \int_{1/m}^{1/n} \varphi(t, z) dt + \int_n^m \varphi(t, z) dt \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pelo Lema 1 temos que

$$\left| \int_{1/m}^{1/n} \varphi(t, z) dt \right| < \left| \int_n^m \varphi(t, z) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad \left| \int_n^m \varphi(t, z) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.20)$$

Assim,

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq \left| \int_{1/m}^{1/n} \varphi(t, z) dt \right| + \left| \int_n^m \varphi(t, z) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (3.21)$$

logo, a seqüência  $\{f_n\}$  é uma seqüência de Cauchy sobre o conjunto das funções analíticas que é completo, pois, este é um subconjunto do conjunto das funções contínuas que também é completo. Deste modo, a seqüência  $\{f_n\}$  converge para uma função  $f$  que é analítica, ou seja, para  $n \rightarrow \infty$  temos

$$f(z) = \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \quad (3.22)$$

A convergência uniforme segue do fato de que uma seqüência de Cauchy converge uniformemente. Portanto,

$$f(z) = \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \quad (3.23)$$

é analítica e uniformemente convergente em  $S$ .  $\square$

*Prova de (ii):* Sejam  $\varphi(t, z) = (e^t - 1)^{-1} t^{z-1}$  e  $f_n(z) = \int_1^n \varphi(t, z) dt$  sobre o intervalo  $[1, n]$ . Pelo Teorema 1,  $\varphi$  é contínua e  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$  existe sobre  $[1, n] \times S$ . Assim, pelo resultado anterior,  $f_n$  é analítica em  $S$ .

Consideremos  $1 < n < m$ . Então

$$\begin{aligned} f_m(z) - f_n(z) &= \int_1^m \varphi(t, z) dt - \int_1^n \varphi(t, z) dt \\ &= \int_n^1 \varphi(t, z) dt + \int_1^m \varphi(t, z) dt = \int_n^m \varphi(t, z) dt \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pelo Lema 1 temos que

$$\left| \int_n^m \varphi(t, z) dt \right| < \varepsilon \quad (3.25)$$

Segue que

$$|f_m(z) - f_n(z)| = \left| \int_n^m \varphi(t, z) dt \right| < \varepsilon \quad (3.26)$$

ou seja, a seqüência  $\{f_n\}$  é de Cauchy sobre o espaço das funções analíticas. Com os mesmos argumentos usados na demonstração da parte (i), podemos concluir que a função

$$f(z) = \int_1^{\infty} \varphi(t, z) dt \quad (3.27)$$

é analítica e converge uniformemente em  $S$ .  $\square$

#### 4. Representação integral

A função zeta de Riemann, definida em (2.1), admite a seguinte representação integral (que será provada no Teorema 3 abaixo):

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{(e^t - 1)} dt, \quad \operatorname{Re}(z) > 1 \quad (4.1)$$

onde  $\Gamma(z)$  é a função gama de Euler, definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (4.2)$$

para  $\operatorname{Re}(z) > 0$ .

Como preliminares para o Teorema 3, façamos a mudança de variável  $t = nu$  na integral (4.2), obtendo

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-nu} (nu)^{z-1} n du = n^z \int_0^{\infty} e^{-nu} u^{z-1} du \quad (4.3)$$

donde

$$n^{-z} \Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-nu} u^{z-1} du \quad (4.4)$$

Somando sobre todos os inteiros positivos em ambos os lados da igualdade acima, e considerando  $\operatorname{Re}(z) > 1$ , temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nu} u^{z-1} du \quad (4.5)$$

donde segue que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nu} u^{z-1} du \quad (4.6)$$

onde usamos a definição (2.1).

**Teorema 3** Para  $\operatorname{Re}(z) > 1$ ,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \quad (4.7)$$

*Prova:* De acordo com o Teorema 2, a integral  $\int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$  é uniformemente convergente e analítica na região onde  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . Assim, é suficiente mostrar que

$\zeta(z)\Gamma(z)$  é igual à integral  $\int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$  para  $z = x > 1$ .

Pelo Lema 1, existem números  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $0 < \alpha < \beta < \infty$ , tais que

$$\int_0^{\alpha} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad \int_{\beta}^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt < \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.8)$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=1}^n e^{-kt} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kt} = (e^t - 1)^{-1} \quad (4.9)$$

para todo  $t \geq 0$  e  $n \geq 1$ . Conseqüentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} e^{-nt} t^{x-1} dt \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad (4.10)$$

Segue que

$$\begin{aligned}
& \left| \zeta(x)\Gamma(x) - \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt - \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt \right| \\
&= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\alpha} e^{-nt} t^{x-1} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-nt} t^{x-1} dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} e^{-nt} t^{x-1} dt \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\alpha} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt - \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt - \int_{\beta}^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt \right| \\
&\leq \varepsilon + \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-nt} t^{x-1} dt - \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt \right| = \varepsilon
\end{aligned}$$

pois  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt}$  converge uniformemente para  $(e^t - 1)^{-1}$  no intervalo  $[\alpha, \beta]$ , ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-nt} t^{x-1} dt = \int_{\alpha}^{\beta} (e^t - 1)^{-1} t^{x-1} dt.$$

Portanto,  $\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt$ , para  $\operatorname{Re}(z) > 1$ .  $\square$

## 5. Extensão do domínio da função $\zeta$

Vimos, na seção 2, que a função zeta de Riemann é analítica no semi-plano  $\operatorname{Re}(z) > 1$ . Vamos usar o teorema 3 da seção anterior para estender o domínio de definição de  $\zeta$  para a faixa  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$ . Na próxima Seção, estenderemos o domínio de definição da função  $\zeta$  para todo plano complexo  $\mathbb{C}$ .

Consideremos a expansão de Laurent de  $(e^z - 1)^{-1}$ , a saber,

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \tag{5.1}$$

para certas constantes  $a_1, a_2, a_3, \dots$  que não precisamos conhecer explicitamente neste momento. Assim  $[(e^z - 1)^{-1} - z^{-1}]$  permanece limitada em uma vizinhança

de  $z = 0$ . Mas isto implica que a integral

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt$$

converge uniformemente sobre subconjuntos compactos no semi-plano complexo direito  $\text{Re}(z) > 0$  representando, portanto, uma função analítica nessa região. Por outro lado, pelo teorema 3 da seção anterior, temos

$$\begin{aligned} \zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \\ &= \int_0^1 (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \\ &= \int_0^1 (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt - (z-1)^{-1} + (z-1)^{-1} + \int_1^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \\ &= \int_0^1 (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt - \int_0^1 t^{z-2} dt + (z-1)^{-1} + \int_1^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \\ &= \int_0^1 \left[ (e^t - 1)^{-1} - t^{-1} \right] t^{z-1} dt + (z-1)^{-1} + \int_1^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \end{aligned} \tag{5.2}$$

Usando o teorema 2, podemos afirmar que as integrais

$$\int_0^1 \left[ (e^t - 1)^{-1} - t^{-1} \right] t^{z-1} dt \quad \text{e} \quad \int_1^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \tag{5.3}$$

que aparecem em (5.2) são analíticas se  $\text{Re}(z) > 0$ . A função  $(z-1)^{-1}$  é analítica se  $\text{Re}(z) > 0$ , exceto no ponto  $z = 1$ . Assim,

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[ \int_0^1 \left[ (e^t - 1)^{-1} - t^{-1} \right] t^{z-1} dt + (z-1)^{-1} + \int_1^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt \right] \tag{5.4}$$

é analítica para  $\text{Re}(z) > 0$ , exceto no ponto  $z = 1$ , ou seja,  $\zeta$  é meromorfa no semi-plano  $\{z : \text{Re}(z) > 0\}$ , com um pólo simples em  $z = 1$ . Observemos que quando  $z = 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1}$  é a série harmônica que sabemos ser divergente.

Para  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , temos  $(z-1)^{-1} = -\int_1^{\infty} t^{z-2} dt$ . Substituindo este resultado na equação obtida para  $\zeta(z)\Gamma(z)$ , (5.2), obtemos

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt, \quad 0 < \operatorname{Re}(z) < 1 \quad (5.5)$$

Considerando, novamente, a expansão de Laurent de  $(e^z-1)^{-1}$ , (5.1), podemos afirmar que  $\left[ (e^z-1)^{-1} - z^{-1} + \frac{1}{2} \right] \leq cz$ , para alguma constante  $c$  e para todo  $z$  no intervalo  $[0, 1]$ . Assim a integral

$$\int_0^1 \left( \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt \leq c \int_0^1 t^z dt = \frac{c}{z+1} \quad (5.6)$$

é uniformemente convergente sobre subconjuntos compactos onde  $\operatorname{Re}(z) > -1$ . Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \left( \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right) = -1, \quad (5.7)$$

existe uma constante  $c'$  tal que

$$\left( \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right) \leq \frac{c'}{t} \quad (5.8)$$

para  $t \geq 1$ .

Logo,

$$\int_1^{\infty} \left( \frac{1}{e^t-1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt \leq c' \int_1^{\infty} t^{z-2} dt = \frac{c'}{z-1} \quad (5.9)$$

desde que  $\operatorname{Re}(z) < 1$ , ou seja, a integral (5.9) é uniformemente convergente sobre subconjuntos compactos onde  $\operatorname{Re}(z) < 1$ .

Usando a equação (5.5) e os resultados das últimas sub-seções, vamos estender o domínio da definição da função  $\zeta$  para a faixa  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$ . Da equação (5.5), temos para  $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$

$$\begin{aligned}
\zeta(z)\Gamma(z) &= \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z} + \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 t^{z-1} dt - \frac{1}{2z} + \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt \\
&= \int_0^1 \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt - \frac{1}{2z} + \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Mas, como ambas as integrais convergem na faixa  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , podemos usar este resultado para definir  $\zeta$  na faixa  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , com exceção do ponto  $z = 0$ , que será analisado em seguida.

Reescrevendo (5.10) na forma

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[ \int_0^1 \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt - \frac{1}{2z} + \int_1^{\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} \right) t^{z-1} dt \right] \tag{5.11}$$

notamos um aparente problema no ponto  $z = 0$ , que pode ser resolvido da seguinte forma. O termo  $2z\Gamma(z)$  no denominador é igual a  $2\Gamma(z+1)$ , portanto, no ponto  $z = 0$ , temos  $2z\Gamma(z) = 2\Gamma(1) = 2$  que elimina o aparente problema. Portanto, a função  $\zeta$  está definida e é analítica na faixa onde  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$ , com um pólo simples em  $z = 1$ .

## 6. Equação funcional de Riemann

Nesta seção vamos derivar uma relação de fundamental importância na teoria da função zeta de Riemann, a equação funcional de Riemann.

Vamos examinar mais detalhadamente a equação (5.11). Para  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$ ,

$$-\frac{1}{z} = \int_1^{\infty} t^{z-1} dt \tag{6.1}$$



Substituindo este resultado na equação (5.11), ela pode ser reescrita como

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left[ \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) t^{z-1} dt \right] \quad (6.2)$$

Porém,

$$\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^t + 1}{e^t - 1} \right) = \frac{i}{2} \cotg \left( \frac{it}{2} \right) \quad (6.3)$$

De fato, sabemos que  $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$  e  $\sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ . Desta forma,

$$\cotg(z) = \frac{\cos(z)}{\sen(z)} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{\frac{1}{i}(e^{iz} - e^{-iz})} \quad (6.4)$$

donde

$$\frac{i}{2} \cotg \left( \frac{it}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{e^t + 1}{e^t - 1} \right] \quad (6.5)$$

No Apêndice A, mostramos que

$$\pi \cotg(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}, \quad a \notin \mathbb{Z} \quad (6.6)$$

Tomando  $a = it/2\pi$  na expressão (6.6), temos

$$\cotg \left( \frac{it}{2} \right) = \frac{2}{it} - 4it \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2}, \quad t \neq 0 \quad (6.7)$$

Combinando as equações (6.7) e (6.3), obtemos

$$\left( \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{t} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4\pi^2 n^2}$$

Substituindo este resultado na equação (6.2), segue que

$$\zeta(z) \Gamma(z) = 2 \int_0^{\infty} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2} \right) t^z dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{t^2 + 4n^2\pi^2} \right) t^z dt \quad (6.8)$$

Efetuando a mudança de variável  $t = 2n\pi \operatorname{tg} \theta$ ,  $dt = 2n\pi (\sec \theta)^2 d\theta$ , vem

$$\begin{aligned} \zeta(z) \Gamma(z) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left( \frac{[2n\pi \operatorname{tg} \theta]^z 2n\pi (\sec \theta)^2}{[2n\pi \operatorname{tg} \theta]^2 + 4n^2\pi^2} \right) d\theta \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{z-1} \int_0^{\infty} \left( \frac{(\operatorname{tg} \theta)^z (\sec \theta)^2}{(\operatorname{tg} \theta)^2 + 1} \right) d\theta \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{z-1} \int_0^{\infty} (\operatorname{tg} \theta)^z d\theta \end{aligned} \quad (6.9)$$

Fazendo uma nova mudança com  $u = \operatorname{tg} \theta$ ,  $du = (\sec \theta)^2 d\theta$ , podemos reescrever (6.9) como

$$\begin{aligned} \zeta(z) \Gamma(z) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{z-1} \int_0^{\infty} \left( \frac{u^z}{\sec^2(\theta)} \right) du = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n\pi)^{z-1} \int_0^{\infty} \left( \frac{u^z}{(\operatorname{tg} \theta)^2 + 1} \right) du \\ &= 2 (2\pi)^{z-1} \sum_{n=1}^{\infty} n^{z-1} \int_0^{\infty} \left( \frac{u^z}{u^2 + 1} \right) du = 2 (2\pi)^{z-1} \zeta(1-z) \int_0^{\infty} \left( \frac{u^z}{u^2 + 1} \right) du \end{aligned} \quad (6.10)$$

para  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$ . Por outro lado

$$\int_0^{\infty} \frac{u^z}{u^2 + 1} du = \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi}{2}z\right) \quad (6.11)$$

e da teoria da função gama de Euler, temos

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z)}{\pi} \operatorname{sen}(\pi z) = \frac{\Gamma(1-z)}{\pi} \left[ 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right] \quad (6.12)$$

Substituindo (6.11) e (6.12) em (6.10), obtemos finalmente que

$$\zeta(z) = 2 (2\pi)^{z-1} \zeta(1-z) \Gamma(1-z) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \quad (6.13)$$

para  $-1 < \operatorname{Re}(z) < 0$ . O resultado expresso em (6.13) é a *equação funcional de Riemann*.

O teorema abaixo estende o domínio da função zeta de Riemann e de sua equação funcional para todo plano complexo, exceto no ponto  $z = 1$ .

**Teorema 4** *A função zeta de Riemann pode ser definida de modo que ela seja meromorfa no plano complexo tendo um pólo simples em  $z = 1$  e  $\operatorname{Res}[\zeta, 1] = 1$ . Para  $z \neq 1$ ,  $\zeta$  satisfaz a equação funcional de Riemann (6.13).*

Como  $\Gamma(1-z)$  tem pólos em  $z = 1, 2, \dots$  e como  $\zeta$  é analítica em  $z = 2, 3, \dots$  sabemos, da equação funcional de Riemann que,

$$\zeta(1-z) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0 \quad (6.14)$$

para  $z = 2, 3, \dots$ . Entretanto, como os pólos de  $\Gamma(1-z)$  em  $z = 2, 3, \dots$  são simples, cada zero de  $\zeta(1-z) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0$  deve ser simples. Como  $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0$ , quando  $z$  é um inteiro par, então  $\zeta(1-z) = 0$  para  $z = 3, 5, \dots$ . Isto é,  $\zeta(z) = 0$  para  $z = -2, -4, \dots$ . Um raciocínio similar nos leva a concluir que  $\zeta$  não tem zeros fora da faixa  $\{z : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1\}$ .

Desta forma, concluímos que a função  $\zeta$  satisfaz a equação funcional de Riemann

$$\zeta(z) = 2 (2\pi)^{z-1} \zeta(1-z) \Gamma(1-z) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \quad (6.15)$$

para todo  $z \neq 1$ .

## 7. A conjectura de Riemann

A famosa conjectura ou hipótese de Riemann está relacionada com os zeros da função  $\zeta$ . Os zeros da função zeta localizados em  $z_n = -2n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  são chamados *zeros triviais*. Aquele grande matemático afirmou que a função  $\zeta$  tem infinitos zeros na faixa  $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ , conhecida por *faixa crítica*. J. Hadamard foi o primeiro a provar esta afirmação, em 1893.

Uma das mais famosas questões em aberto da Matemática é a *hipótese de Riemann* sobre os zeros *não triviais* da função zeta. A hipótese de Riemann estabelece que todos os infinitos zeros da função  $\zeta$ , pertencentes à faixa crítica  $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ , estão sobre a reta  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ , que é chamada de *reta crítica*. Desta forma, os zeros não triviais da função  $\zeta$ , de acordo com a conjectura de Riemann, são infinitos e da forma  $z = \frac{1}{2} + i\sigma$ , com  $\sigma$  real. Até o momento, nenhuma prova foi apresentada para esta conjectura. Este problema não é um tipo de problema que pode ser abordado por métodos elementares. Já deu origem a uma extensa e complicada bibliografia.

Riemann enunciou, também sem provar, a seguinte fórmula assintótica para o número  $N(T)$  de zeros da faixa crítica,  $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$ ,  $0 < \operatorname{Im}(z) \leq T$ ,

$$N(T) = \frac{1}{2\pi}T \log T - \frac{1 + \log 2\pi}{2\pi}T + O(\log T) \quad (7.1)$$

Uma prova rigorosa desta fórmula foi dada, pela primeira vez, por H. V. Mangoldt em 1905. Nove anos mais tarde, G. H. Hardy provou que existe uma infinidade de zeros sobre a reta  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ . Mas, uma infinidade não significa que são todos. E. C. Titchmarsh mostrou, em 1935/1936, que há 1041 zeros na região  $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1$  e  $0 < \operatorname{Im}(z) < 1468$ . Todos estes zeros estão sobre a reta crítica  $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}$ . Com o notável auxílio dos computadores, já se sabe que o primeiro bilhão e meio de zeros não triviais encontram-se sobre a reta crítica.

## 8. Relação entre a função zeta e os números primos

A função zeta de Riemann desempenha um papel importante na Teoria dos Números, em particular, na teoria dos números primos. O teorema abaixo, devido a Euler, mostra uma relação notável entre a função  $\zeta$  e os números primos.

**Teorema de Euler** *Se  $\operatorname{Re}(z) > 1$  então*

$$\zeta(z) = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} \quad (8.1)$$

onde  $(p)$  é o conjunto infinito de números primos.

*Prova:* Notemos que a série  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{jz}}$  é convergente para qualquer número primo  $p$ ,

pois tal série é geométrica, onde o primeiro termo é igual a 1 e a razão é  $q = \frac{1}{p^z}$ , logo  $|q| < 1$ . Segue que  $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{jz}} = \frac{1}{1 - p^{-z}}$ . Denotemos por  $p_k$  o  $k$ -ésimo número primo,

assim  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 3$ ,  $p_3 = 5, \dots$ , e consideremos o seguinte produto  $\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-z}}$ .

Para  $m = 2$ , usando a fórmula do produto de Cauchy, temos

$$\left( \frac{1}{1 - p_1^{-z}} \right) \left( \frac{1}{1 - p_2^{-z}} \right) = \sum_{k_1, k_2}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{k_1} p_2^{k_2})^z} \quad (8.2)$$

onde  $k_1, k_2$  são inteiros não negativos. Por indução, obtemos o seguinte produto

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_m}^{\infty} \frac{1}{(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m})^z} \quad (8.3)$$

com  $k_1, k_2, \dots, k_m$  inteiros não negativos.

Da teoria dos números inteiros, sabemos que todo inteiro positivo, maior ou igual a 2, pode ser decomposto em produto de fatores primos, de maneira única, a menos de um rearranjo de seus termos. Logo podemos reescrever (8.3) como segue

$$\prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-z}} = \sum \frac{1}{n^z} \quad (8.4)$$

onde  $n$  assume qualquer valor inteiro positivo que não possui fator primo maior que  $p_m$  em sua decomposição em produto de fatores primos.

De (2.1), vemos que o produto em (8.4) é menor do que  $\zeta(z)$ , pois não possui todos os termos da série que representa  $\zeta(z)$ . Por outro lado, a somatória que aparece em (8.4) contém os termos  $1, \frac{1}{2^z}, \frac{1}{3^z}, \dots, \frac{1}{p_m^z}$ , permitindo-nos escrever

$$\sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^z} < \prod_{k=1}^m \frac{1}{1 - p_k^{-z}} < \zeta(z) \quad (8.5)$$

para todo  $m$ . Quando  $m \rightarrow \infty$ ,  $p_m \rightarrow \infty$  também, e assim  $\sum_{n=1}^{p_m} \frac{1}{n^z} \rightarrow \zeta(z)$ .

Portanto

$$\zeta(z) = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^z}} \quad (8.6)$$

## Apêndice A

Neste Apêndice, vamos provar a seguinte expansão

$$\pi \cotg(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2} \quad (\text{A1})$$

onde  $a \notin \mathbb{Z}$ .

A função  $\cotg(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$  tem período 1, ou seja,  $\cotg(\pi(z+1)) = \cotg(\pi z)$ , e tem singularidades isoladas nos pontos  $z = s$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). Usaremos o teorema dos resíduos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \text{Res}[f, k]$$

para obter a expansão de  $\cotg(\pi a)$  em série.

Seja

$$f(z) = \frac{\cotg(\pi z)}{z - a}, \quad \text{onde } a \neq s \ (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{A2})$$

Pelo teorema dos resíduos temos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cotg(\pi z)}{z - a} dz = \sum_{k=1}^n \text{Res} \left[ \frac{\cotg(\pi z)}{z - a}, k \right] \quad (\text{A3})$$

onde  $\gamma$  é a circunferência de raio  $\rho_n = n + \frac{1}{2} > |a|$ , centrada na origem.

No interior da região limitada por  $\gamma$ , a função  $f(z) = \frac{\cotg(\pi z)}{z - a}$  tem singularidades isoladas nos pontos  $z = a$  e  $z = s$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ). Podemos, então, separar a soma em (A3) em duas partes, a saber,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cotg(\pi z)}{z - a} dz &= \sum_{k=1}^n \text{Res} \left[ \frac{\cotg(\pi z)}{z - a}, k \right] \\ &= \text{Res} \left[ \frac{\cotg(\pi z)}{z - a}, a \right] + \sum_{s=-n}^n \text{Res} \left[ \frac{\cotg(\pi z)}{z - a}, s \right] \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

Calculamos, agora, o resíduo de  $f$  em cada ponto singular  $z_k$  de  $f$  no interior de  $\gamma$ , indicados em (A4).

Escrevendo  $f$  sob a forma  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$  notamos que  $g(z) = \cotg(\pi z)$  é analítica nas singularidades de  $f$  e estas singularidades são os zeros da função  $h(z) = z - a$ , e são isoladas e simples. Podemos reescrever  $f(z) = \frac{\bar{g}(z)}{h(z)}$ , onde  $\bar{g}(z) = \cos(\pi z)$ , que

é uma função inteira, e  $\bar{h}(z) = (z - a)\text{sen}(\pi z)$ , que se anula nas singularidades de  $f$ . Assim, o resíduo da função  $f$  no ponto singular  $a$  será dado por

$$\text{Res}[f, a] = \frac{\bar{g}(a)}{\bar{h}'(a)} = \frac{\cos(\pi a)}{\text{sen}(\pi a)} = \text{cotg}(\pi a) \quad (\text{A5})$$

e nos pontos singulares  $z = s$  ( $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$ ), serão dados por

$$\begin{aligned} \text{Res}[f, s] &= \frac{\bar{g}(s)}{\bar{h}'(s)} = \frac{\cos(\pi s)}{\text{sen}(\pi s) + \pi(s - a)\cos(\pi s)} \\ &= \frac{1}{\pi(s - a)}, \quad \text{para } s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n. \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

De acordo com (A4), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\text{cotg}(\pi z)}{(z - a)} dz &= \text{cotg}(\pi a) + \sum_{s=-n}^n \frac{1}{\pi(s - a)} \\ &= \text{cotg}(\pi a) + \frac{1}{\pi} \sum_{s=-n}^{-1} \frac{1}{(s - a)} - \frac{1}{\pi a} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n \frac{1}{(s - a)} \\ &= \text{cotg}(\pi a) - \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n \frac{1}{(s + a)} + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n \frac{1}{(s - a)} - \frac{1}{\pi a} \\ &= \text{cotg}(\pi a) + \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n \left[ \frac{-1}{(s + a)} + \frac{1}{(s - a)} \right] - \frac{1}{\pi a} \\ &= \text{cotg}(\pi a) - \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^n \left[ \frac{2a}{a^2 - s^2} \right] - \frac{1}{\pi a} \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

O nosso próximo passo é mostrar que  $\int_{\gamma} \frac{\text{cotg}(\pi z)}{z - a} dz \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  e

como consequência,  $\pi \text{cotg}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - n^2}$ . Para tanto, dividiremos  $\gamma$  em duas curvas,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , de modo que,  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ , onde  $\gamma_1$  é a semicircunferência superior de  $\gamma$ , e  $\gamma_2$  a semicircunferência inferior de  $\gamma$ . Assim,

$$\int_{\gamma} \frac{\text{cotg}(\pi z)}{z - a} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\text{cotg}(\pi z)}{z - a} dz + \int_{\gamma_2} \frac{\text{cotg}(\pi z)}{z - a} dz \quad (\text{A8})$$

Na integral ao longo de  $\gamma_2$  fazemos a substituição  $z = -t$ . Se  $z$  percorre a curva  $\gamma_2$  no sentido positivo,  $t$  descreverá a curva  $\gamma_1$  no sentido positivo. Usando o fato de que  $\text{cotg}(z)$  é uma função ímpar e  $dz = -dt$ , temos

$$\int_{\gamma_2} \frac{\text{cotg}(\pi z)}{z - a} dz = - \int_{\gamma_1} \frac{\text{cotg}(-\pi t)}{-t - a} dt = - \int_{\gamma_1} \frac{\text{cotg}(\pi t)}{t + a} dt$$

Substituindo este resultado na equação (A8), vem

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{\cotg(\pi z)}{z-a} dz &= \int_{\gamma_1} \frac{\cotg(\pi z)}{z-a} dz - \int_{\gamma_1} \frac{\cotg(\pi z)}{z+a} dz = \int_{\gamma_1} \cotg(\pi z) \left[ \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z+a} \right] dz \\ &= \int_{\gamma_1} \cotg(\pi z) \left[ \frac{2a}{z^2-a^2} \right] dz = 2a \int_{\gamma_1} \frac{\cotg(\pi z)}{z^2-a^2} dz \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

Para completar nossa tarefa, usaremos majorações. Uma primeira majoração é que  $|z^2 - a^2| \geq |z|^2 - |a|^2 = \rho_n^2 - |a|^2$ . Para majorar a função  $\cotg(\pi z)$ , devemos trabalhar sobre uma região onde  $\cotg(\pi z)$  não tenha singularidades. Por esta razão, tomemos inicialmente o disco  $D_s = \{z : 0 < |z - s| < r < \frac{1}{2}\}$ , onde a função  $\cotg(\pi z)$  não tem singularidades e além disso  $D_s$  está contido na faixa de periodicidade da  $\cotg(\pi z)$ . Por outro lado,

$$\cotg(\pi z) = \frac{\cos(\pi z)}{\sen(\pi z)} = i \left( \frac{e^{2zi} + 1}{e^{2zi} - 1} \right) \quad (\text{A10})$$

tende a  $\pm i$  quando  $Im(z) \rightarrow \mp \infty$ . Desta forma, podemos afirmar que  $|\cotg(\pi z)|$  é limitado por uma constante  $M$  na faixa periódica, fora do disco  $D_s$ . Fazendo o mesmo para todas as outras singularidades da  $\cotg(\pi z)$  e por sua periodicidade, podemos afirmar que  $|\cotg(\pi z)| < M$  no disco  $|z| = \rho_n$ , excluindo as suas singularidades.

Com estas majorações teremos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} \frac{\cotg(\pi z)}{z-a} dz \right| &= \left| 2a \int_{\gamma} \frac{\cotg(\pi z)}{z^2-a^2} dz \right| \\ &\leq 2|a| \int_{\gamma} \left| \frac{\cotg(\pi z)}{z^2-a^2} \right| |dz| \leq \frac{2|a|\pi\rho_n}{\rho_n^2 - |a|^2} \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $\rho_n = n + \frac{1}{2} \rightarrow \infty$  e, então,  $\int_{\gamma} \frac{\cotg(\pi z)}{z-a} dz \rightarrow 0$ . Portanto

$$\pi \cotg \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad (\text{A12})$$

que se reduz a (A1) quando  $z = a$ ,  $a \notin \mathbb{Z}_{\square}$ .

## Apêndice B

Neste Apêndice, apresentamos um resumo das propriedades da função zeta de Riemann.

### Definição

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}, \operatorname{Re}(z) > 1$$

### Representação integral

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} (e^t - 1)^{-1} t^{z-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 1$$

### Equação funcional de Riemann

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \zeta(1-z) \Gamma(1-z) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right), z \neq 1$$

### Alguns valores especiais

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= -\frac{1}{2} \\ \zeta(1) &= \infty \\ \zeta(-2n) &= 0, n = 1, 2, \dots \\ \zeta(1-2n) &= -\frac{B_{2n}}{2n}, n = 1, 2, \dots \\ \zeta(2n) &= \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} |B_{2n}|, n = 1, 2, \dots \\ \zeta(2) &= \frac{\pi^2}{6} \\ \zeta(4) &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$



## Bibliografia

- ABRAMOWITZ, M. e STEGUN, I. *Handbook of mathematical functions*. New York: Dover, 1970.
- AHLFORS, L. V. *Complex analysis*. New York: McGraw-Hill, 1979.
- BELL, E. T. *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires: Losada, 1948.
- CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. São Paulo: McGraw-Hill, 1975.
- GUELFOND, A. *Los residuos*. Moscou: Mir, 1968.
- HAUSER, A. A. *Variáveis complexas*. Rio de Janeiro: LTC, 1972.
- KNOPP, K. *Theory of functions*. New York: Dover, 1945.
- KNOPP, K. *Infinite sequences and series*. New York: Dover, 1956.
- MARKUSHEVICH, A. *Teoría de las funciones analíticas*. Moscou: Mir, 1970, v. 1 e 2.
- TITCHMARSH, E. C. *The theory of the Riemann zeta function*. Oxford: Clarendon, 1967.
- WAGON, S. *Mathematica in action*. New York: Freeman, 1991.