JMSK
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 9, No.2, 69-85, Januari 2013
ISBN:1858-1382

Pemodelan Autoregressive (AR) pada Data Hilang dan Aplikasinya pada Data Kurs Mata Uang Rupiah

Fitriani, Erna Tri Herdiani, M. Saleh AF[1]

Abstrak

Dalam analisis deret waktu terdapat model stasioner dan model non stasioner. Salah satu model deret waktu yang stasioner adalah model *Autoregressive*. Model *Autoregressive* adalah suatu model yang mengasumsikan bahwa data pada periode sekarang dipengaruhi oleh data pada periode sebelumnya. Dalam memodelkan suatu data deret waktu seringkali dijumpai adanya ketidak lengkapan data yang disebut data hilang. Data hilang disebabkan oleh beberapa faktor, antara lain karena informasi untuk sesuatu tentang objek tidak diberikan, sulit dicari, atau memang informasi tersebut tidak ada. Untuk itu perlu dilakukan penelitian lebih lanjut pada pendekatan model *Autoregressive* jika terdapat data hilang. Dalam menaksir parameter data hilang digunakan metode *Ordinary Least Square* (OLS). Parameter model *Autoregressive* dengan data hilang yang signifikan akan digunakan dalam membangun model. Setelah mendapatkan model, langkah selanjutnya adalah menguji kelayakan model yaitu uji asumsi *White Noise* dan uji kenormalan. Data yang digunakan sebagai aplikasi tulisan ini yakni data harian nilai tukar rupiah terhadap dollar Amerika Serikat mulai tanggal 1 April sampai dengan 30 April 2009.

Kata Kunci: Deret waktu, stasioner, non stasioner, Autoregressive, data hilang, Ordinary Least Square (OLS).

1. Pendahuluan

Dalam analisis deret waktu terdapat beberapa model. Pertama, model deret waktu berskala stasioner yang terdiri dari model *Autoregressive* (AR), *Moving Average* (MA), atau kombinasi keduanya *Autoregressive Moving Average* (ARMA). Kedua, model deret waktu berskala non stasioner yang terdiri dari model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA) yang merupakan pengembangan dari ARMA yang dikembangkan oleh Box dan Jenkins pada tahun 1970 [6]. Model *Autoregressive* (AR) merupakan salah satu model yang mengasumsikan bahwa data pada periode sekarang dipengaruhi oleh data pada periode sebelumnya.

Dalam suatu pengamatan yang melibatkan variabel waktu, sering ditemukan adanya ketidak lengkapan data yang biasa disebut data hilang atau *missing data*. Hal ini disebabkan oleh beberapa hal di antaranya adalah tidak adanya respon, kelalaian saat melakukan perekaman data, cuaca, atau bahkan oleh hal lain yang tidak diketahui sebabnya. Jika data hilang dibiarkan begitu saja maka inferensi statistik dengan menggunakan metode standar untuk data lengkap tidak dapat dilakukan, terlebih lagi apabila jumlahnya banyak [4].

Adapun tujuan penulisan ini adalah menentukan taksiran nilai-nilai pada hilang untuk model *Autoregressive* (AR) dan menetukan langkah identifikasi model dari data harian nilai tukar rupiah terhadap dollar Amerika Serikat yang mengandung data hilang.

---

[1] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin, email: fitrianifj_267@yahoo.com*

2. Menaksir Parameter Autoregressive dengan Menggunakan Metode *Ordinary Least Square*

Metode *Ordinary Least Square* (OLS) atau metode kuadrat terkecil adalah suatu metode penaksir parameter regresi dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galat (selisih antara nilai aktual dan ramalan). Jumlah kuadrat error pada regresi dalam model AR(p) yang dinyatakan dalam fungsi $S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)$ dan didefinisikan sebagai:

$$S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p) = \sum_{t=p+1}^{n} {e_t}^2 \tag{1}$$

setelah disederhanakan menghasilkan :

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{t=p+1}^{n} Z_t - \phi_1 \sum_{t=p+1}^{n} Z_{t-1} - \cdots - \phi_l \sum_{t=p+1}^{n} Z_{t-l} - \cdots - \phi_p \sum_{t=p+1}^{n} Z_{t-p}}{(n-p)(1-\phi_1 - \cdots - \phi_p)} \tag{2}$$

Karena untuk n yang besar berlaku

$$\frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^{n} Z_t \approx \frac{1}{n-p} \sum_{t=p+1}^{n} Z_{t-p} \approx \bar{Z} \tag{3}$$

maka penaksir untuk parameter μ pada persamaan (8) dinyatakan sebagai berikut:

$$\hat{\mu} = \frac{(1-\phi_1 - \cdots - \phi_p)\bar{Z}}{(1-\phi_1 - \cdots - \phi_p)} = \bar{Z} \tag{4}$$

Penaksiran parameter $\phi_l; 1 \le l \le p$, diperoleh dari penurunan $\frac{\partial}{\partial \phi_l}\left[S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)\right] = 0$

$$= \sum_{t=p+1}^{n} \big[(Z_t - \mu)(-(Z_{t-l} - \mu)) - \phi_1 (Z_{t-1} - \mu)(-(Z_{t-l} - \mu)) - \cdots - \phi_l (Z_{t-l} - \mu)(-(Z_{t-l} - \mu)) - \cdots - \phi_p (Z_{t-p} - \mu)(-(Z_{t-l} - \mu))\big]$$

Diketahui bahwa $\mu = \bar{z}$, maka

$$\frac{\partial}{\partial \phi_l}\left[S(\mu, \phi_1, \dots, \phi_p)\right] = \sum_{t=p+1}^{n} (Z_t - \bar{z})(Z_{t-l} - \bar{z}) - \phi_1 \sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-1} - \bar{z})(Z_{t-l} - \bar{z}) - \cdots - \phi_l \sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-l} - \bar{z})^2 - \cdots - \phi_p \sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-p} - \bar{z})(Z_{t-l} - \bar{z}) = 0$$

Atau

$$\frac{\sum_{t=p+1}^{n} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t-l} - \bar{Z}) - \hat{\phi}_1 \sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-1} - \bar{Z})(Z_{t-l} - \bar{Z}) - \cdots - \hat{\phi}_l \sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-l} - \bar{Z})^2 - \cdots - \hat{\phi}_p \sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-p} - \bar{Z})(Z_{t-l} - \bar{Z})}{\sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-l} - \bar{Z})^2} = 0$$

di mana

$$\sum_{t=p+1}^{n} (Z_{t-l} - \bar{Z})^2 = \hat{\gamma}_0 > 0 \tag{5}$$

Dengan demikian, maka diperoleh penaksir parameter untuk $\phi_l; 1 \leq l \leq p$ yaitu:

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \cdots & \hat{\rho}_{p-1} \\ \hat{\rho}_1 & 1 & \hat{\rho}_1 & \cdots & \hat{\rho}_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{\rho}_{p-1} & \hat{\rho}_{p-2} & \hat{\rho}_{p-3} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1 \\ \hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ \hat{\rho}_p \end{bmatrix} \quad (6)$$

Dengan menggunakan persamaan (6), untuk $p = 1$ diperoleh penaksir parameter model AR(1) adalah $\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1 = r_1$. Untuk $p = 2$ diperoleh penaksir parameter model AR(2) yaitu:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\hat{\rho}_1(1-\hat{\rho}_2)}{1-\hat{\rho}_1^{\,2}} \quad \text{dan}$$
$$\hat{\phi}_2 = \frac{\hat{\rho}_2-\hat{\rho}_1^{\,2}}{1-\hat{\rho}_1^{\,2}}, \quad (7)$$

Dengan cara yang sama diperoleh penaksir parameter AR orde $3,4, \dots, p-1$ menggunakan persamaaan (6).

3. Menaksir Nilai-nilai pada Data Hilang dengan Menggunakan Metode *Ordinary Least Square*

Menerapkan prinsip *Ordinary Least Square* (OLS) untuk deret waktu dengan nilai-nilai yang hilang adalah dasar pendekatan yang dapat dimasukkan ke dalam pemodelan ARIMA. Sebagaimana diuraikan oleh Ferreiro [3] dan Chi Fung [2], metode ini dimaksudkan untuk menemukan nilai-nilai yang hilang untuk deret waktu yang stasioner. Dengan melakukan *differencing* terlebih dahulu pada data yang tidak stasioner, maka data tersebut dapat diterapkan pada deret waktu untuk memperoleh model ARIMA.

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + e_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q e_{t-q}$$

maka

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = e_t + \theta_1 Z_{t-1} + \cdots + \theta_q e_{t-q} \quad (8)$$

sehingga dapat dituliskan menjadi

$$Z_t - \phi_1 B Z_t - \phi_2 B^2 Z_t - \cdots - \phi_p B^p Z_t = e_t + \theta_1 B e_t + \theta_2 B^2 e_t + \cdots + \theta_q B^q e_t \quad (9)$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) Z_t = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q) e_t$$

maka

$$\phi(B) Z_t = \theta(B) e_t, \quad (10)$$

di mana:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p,$$
$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \cdots - \theta_p B^p.$$

Untuk persamaan (10) dapat disusun kembali menjadi

$$e_t = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} Z_t, \tag{11}$$

dimisalkan $\frac{\phi(B)}{\theta(B)} = \Pi(B)$, sehingga

$$\Pi(B) = 1 - \Pi_1 B - \Pi_2 B^2 - \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \Pi_j B^j. \tag{12}$$

Diketahui $\Pi_0 = -1$ maka, persamaan (12), dapat dituliskan menjadi

$$e_t = (1 - \Pi_1 B - \Pi_2 B^2 - \cdots) Z_t$$
$$e_t = Z_t - \Pi_1 Z_{t-1} - \Pi_2 Z_{t-2} - \cdots = -\sum_{i=0}^{\infty} \prod_i Z_{t-i} \tag{13}$$

Untuk menghitung jumlah kuadrat error dengan menggunakan metode OLS maka:

$$SS = \sum_{t=-L}^{L} e_t^2$$
$$SS = \sum_{t=-L}^{L} (-\sum_{i=0}^{\infty} \prod_i X_{t-i})^2$$

Kemudian akan diminimalkan *SS* dengan adanya data hilang. Dimisalkan Z_s hilang maka,

$$\frac{\partial SS}{\partial Z_s} = 2 \sum_{t=-L}^{L} \Pi_i (-\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i Z_{t-i})$$
$$\sum_{t=s}^{L} \Pi_{t-s} (\sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i Z_{t-i}) = 0 \tag{14}$$

karena jumlahnya konvergen, maka memungkinkan L→∞. Misalkan $j = t - s$ maka diperoleh:

$$e_t = \prod(B) Z_t, \text{ maka}$$
$$e_{s+j} = -\sum_{i=0}^{\infty} \prod_i Z_{s+j-i}$$

Diketahui bahwa $\frac{\phi(B)}{\theta(B)} = \Pi(B)$ dan inversnya adalah $\frac{\theta(B)}{\phi(B)} = \Pi(B^{-1})$.
Sehingga persamaan (14) menjadi

$$\sum_{j=0}^{\infty} \prod_j (\sum_{i=0}^{\infty} \prod_i Z_{s+t-i}) = -\sum_{i=0}^{\infty} \prod_i e_{s+j-i} = 0 \tag{15}$$

ekivalen dengan persamaan di bawah ini:

$$-\sum_{j=0}^{\infty} \prod_j e_{s+j} = \prod(B^{-1}) e_s \tag{16}$$

maka persamaan (16) dapat dituliskan menjadi

$$\prod(B^{-1}) e_s = \prod(B^{-1}) \prod(B) Z_s = 0 \tag{17}$$

Untuk menaksir nilai-nilai pada data hilang, maka akan ditentukan terlebih dahulu koefisien autokorelasi pada lag *k*, yang diperoleh dari data. Setelah didapatkan maka penentuan nilai data yang hilang akan ditaksir dengan menggunakan koefisien korelasi pada lag *k = 1* dan lag *k = 2.*

Bentuk umum model *AR*(1) adalah:

$$\dot{Z}_t = \phi_1 \dot{Z}_{t-1} + e_t$$

Untuk penaksir parameter model AR(1) yaitu $\hat{\phi}_1 = \hat{\rho}_1 = r_1$, diperoleh dengan menggunakan persamaan (2),

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})^2},$$

Selanjutnya untuk menaksir nilai-nilai data hilang pada model AR(1) melalui metode OLS, maka gunakan persamaan (17) yaitu

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + e_t$$

Kemudian akan didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\hat{Z}_t = \phi Z_{t+1} + \phi Z_{t-1} \qquad (18)$$

di mana $\hat{Z}_t$ adalah penaksir parameter untuk data hilang. Untuk menghitung nilai-nilai data hilang maka akan digunakan persamaan (18).

Setelah didapatkan taksiran nilai data hilangnya maka akan diidentifikasi lagi apakah datanya stasioner atau tidak. Kestasioneran data dapat diketahui dengan melakukan plot data dan juga melihat nilai autokorelasi data tersebut. Plot data dapat memberikan informasi secara visual mengenai kondisi data sedangkan nilai autokorelasi dapat memberikan informasi apakah data-data tersebut masih berautokorelasi secara signifikan atau tidak.

Suatu model *Autoregressive* yang baik yang dapat menggambarkan suatu kejadian adalah model yang salah satunya menunjukkan bahwa penaksiran parameternya signifikan berbeda dengan nol. Uji signifikansi parameter *Autoregressive* pada data hilang dilakukan untuk mengetahui apakah semua parameter signifikan atau tidak. Cara pengujiannya bisa dengan menggunakan uji *t* atau bisa juga menggunakan nilai *p-value.* Pada tulisan ini digunakan nilai *p-value* dari taksiran parameter *Autoregressive* pada data hilang untuk menguji tingkat signifikansi dari parameternya. Hipotesis ujinya yaitu:

$$H_0: \phi_1 = 0$$
$$H_1: \phi_1 \neq 0$$

Hipotesis nolnya adalah parameter *Autoregressive* sama dengan nol atau tidak cukup signifikan dalam model, sedangkan hipotesis tandingannya adalah parameter *Autoregressive* tidak sama dengan nol atau cukup signifikan dalam model. Agar parameter *Autoregressive* cukup signifikan maka diharapkan akan ditolak hipotesis nol. Kriteria keputusan: terima H_0 jika $p-value \geq \alpha$ dan tolak H_0 jika $p-value < \alpha$.

Setelah mendapatkan parameter model *Autoregressive* yang signifikan, maka langkah selanjutnya adalah menggunakan nilai parameter tersebut untuk membangun model *Autoregressive* pada data hilang. Uji kelayakan model *Autoregressive* terdiri atas dua bagian yaitu uji *White Noise* sisaan dan kenormalan sisaan. Uji *White Noise* sisaan dapat dituliskan sebagai berikut:

1. Hipotesis

$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$
H_1: minimal ada satu $\rho_j \neq 0,\ j = 0,1,2,\dots,k$

2. Statistik Uji : *Ljung-Box statistics (Modified Box-Pierce)*

$$Q^* = n(n+2)\sum_k^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

Kriteria keputusan: terima H_0 jika $p - value \geq \alpha$ dan tolak H_0 jika $p - value < \alpha$. Untuk model AR(1), nilai *Ljung-Box Statistics (Modified Box-Pierce)* diperoleh dari software Minitab.

4. Data dan Analisisnya

Data yang digunakan adalah data harian yang bersumber dari aktivitas perbankan dimulai dari hari Senin sampai dengan Jumat. Data untuk hari Sabtu, Minggu dan hari libur diasumsikan sama dengan data pada hari sebelumnya. Akan tetapi, dalam tulisan ini, data pada hari Sabtu, Minggu, dan hari libur tidak diasumsikan sama dengan data pada hari sebelumnya melainkan merupakan data hilang dimana nilainya tidak diberikan sehingga akan dilakukan penaksiran untuk memperoleh nilai-nilai pada hari tersebut. Pada kasus ini, digunakan data nilai tukar rupiah terhadap dollar Amerika Serikat yang dimulai dari tanggal 1 April sampai 30 April 2009. Data tersebut yang diperoleh dari situs website BI ditunjukkan pada tabel berikut.

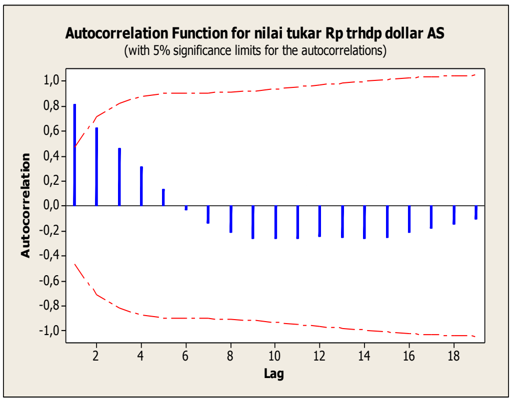
Tabel 1. Data Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar Amerika Serikat.

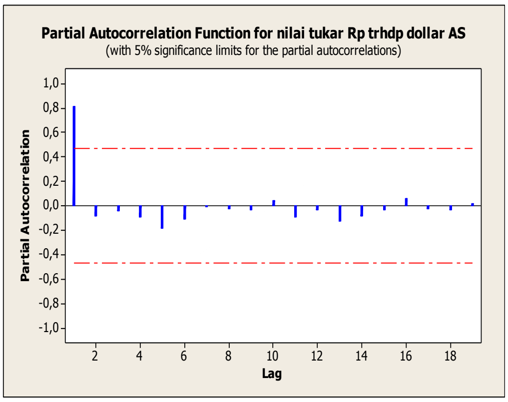
Waktu	Nilai Tukar Rupiah	Waktu	Nilai Tukar Rupiah	Waktu	Nilai Tukar Rupiah
01-Apr-09	11678	11-Apr-09		21-Apr-09	10904
02-Apr-09	11619	12-Apr-09		22-Apr-09	10892
03-Apr-09	11454	13-Apr-09	11181	23-Apr-09	10985
04-Apr-09		14-Apr-09	11036	24-Apr-09	10872
05-Apr-09		15-Apr-09	10934	25-Apr-09	
06-Apr-09	11402	16-Apr-09	10748	26-Apr-09	
07-Apr-09	11402	17-Apr-09	10754	27-Apr-09	10884
08-Apr-09	11437	18-Apr-09		28-Apr-09	10894
09-Apr-09		19-Apr-09		29-Apr-09	10913
10-Apr-09		20-Apr-09	10804	30-Apr-09	10767

Sumber : *http://www.ortax.org/ortax/?mod=kursbi*

Langkah pertama yang dilakukan adalah menentukan orde *Autoregressive* (AR) yang sesuai. Hal ini dapat dilakukan dengan cara melihat plot *Autocorrelation Function* (ACF) dan *Partial Autoregressive Function* (PACF) dari data tersebut. Plot ACF dan PACF akan terpotong setelah proses pada orde ke-*p* atau *lag-p*. Proses ini disebut dengan identifikasi model tentatif.

Hasil dari plot ACF ditunjukkan pada Gambar 1a, yang memperlihatkan bahwa pada selang $0 < \phi < 1$, plot ACF turun secara eksponensial sedangkan pada selang $-1 < \phi < 0$, plot ACF turun secara sinusoidal. Dan Gambar 1b, tampak bahwa plot PACF terpotong setelah *lag* ke-1. Hal ini menunjukkan bahwa plot ACF dan plot PACF mengikuti karakteristik dari model AR(1), dengan demikian data tersebut diperkirakan merupakan model AR(1).





Gambar 1a

Gambar 1b

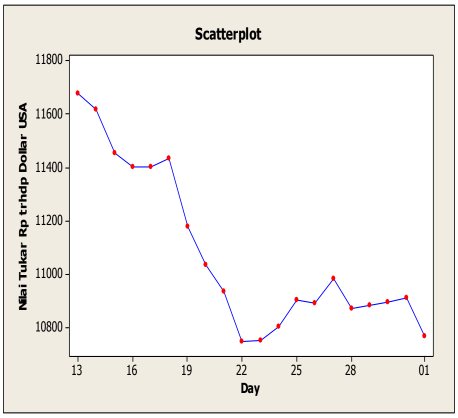
Untuk memperoleh model yang baik, maka akan dilakukan identifikasi pada pola datanya, apakah sudah memenuhi syarat stasioner atau tidak. Kestasioneran data dapat diketahui dengan melakukan plot data dan juga mengecek nilai autokorelasi data tersebut. Plot data dapat memberikan informasi secara visual mengenai kondisi data sedangkan nilai autokorelasi dapat memberikan informasi apakah data-data tersebut masih berautokorelasi secara signifikan atau tidak.

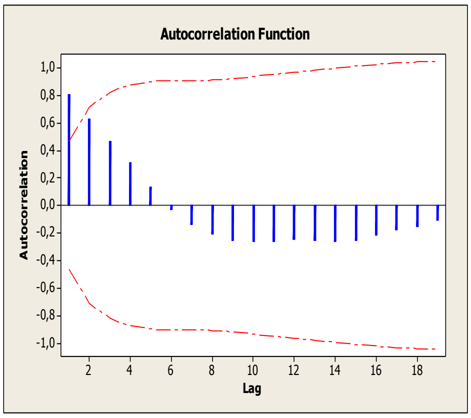
Scatter plot data dengan menggunakan Minitab dapat dilihat pada Gambar 2a. Dari *scatter plot*-nya tampak bahwa data tersebut membentuk pola *tren* turun. Pada Gambar 2b plot nilai autokorelasi data yang diolah hasilnya menggambarkan bahwa nilai autokorelasinya turun secara lambat.

Dengan menggunakan metode koreologram akan dihitung batas signifikansi dari nilai autokorelasi yang dibolehkan. Dengan mengambil $\alpha = 0{,}05$ maka tingkat kepercayaannya sebesar 95%. Dengan demikian $Z_{(1-\frac{\alpha}{2})} = Z_{(1-0{,}025)} = Z_{(0{,}975)} = 1{,}96$. Karena datanya sebanyak 20 maka diperoleh kesalahan standar sebesar $\frac{1}{\sqrt{20}} = 0{,}22$, sehingga batas signifikansi koefisien autokorelasi berada di antara rentang:

$$(-1{,}96)(0{,}22) \leq r_k \leq (1{,}96)(0{,}22)$$

$$-0{,}44 \leq r_k \leq 0{,}44$$





Gambar 2a

Gambar 2b

Berdasarkan rentang seperti ini dapat dilihat pada Tabel 2 bahwa masih banyak nilai autokorelasi dari data yang berada di luar batas signifikansinya. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa data tidak stasioner.

Tabel 2. Nilai Autokorelasi Data Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar USA.

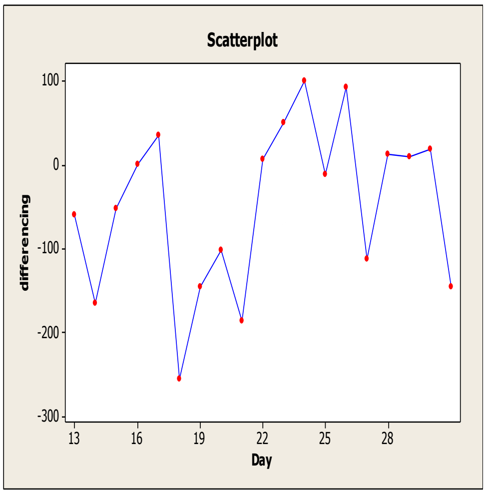
Lag	ACF	Lag	ACF	Lag	ACF	Lag	ACF
1	0,807813	6	-0,030706	11	-0,261687	16	-0,214425
2	0,623004	7	-0,139288	12	-0,248866	17	-0,179241
3	0,463295	8	-0,210761	13	-0,256523	18	-0,151302
4	0,309765	9	-0,259120	14	-0,263207	19	-0,105642
5	0,132210	10	-0,259446	15	-0,255874		

Karena data belum stasioner, maka dilakukan transformasi data dalam hal ini melakukan *differencing* orde pertama.

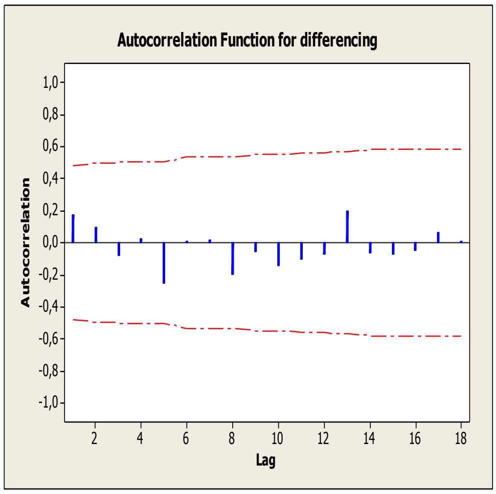
Tabel 3. Hasil *Differencing* Orde Pertama.

T	ΔZ_t	T	ΔZ_t	T	ΔZ_t	T	ΔZ_t
1	-	6	35	11	6	16	-113
2	-59	7	-256	12	50	17	12
3	-165	8	-145	13	100	18	10
4	-52	9	-102	14	-12	19	19
5	0	10	-186	15	93	20	-146

Data hasil *differencing* orde pertama ini diharapkan stasioner sehingga dapat digunakan untuk pemodelan data. Untuk itu, dengan cara yang sama akan dicek kembali kestasionerannya. Hasil plot data *differencing* orde pertama ditunjukkan pada Gambar 3a, tampak secara visual bahwa data sudah tidak menunjukkan pola *tren* namun dicoba menguji kestasioneran melalui plot autokorelasi. Plot autokorelasinya ditunjukkan pada Gambar 3b, yang hasilnya menunjukkan bahwa sudah tidak ada data pada *time lag* yang keluar dari batas signifikan.



Gambar 3a



Gambar 3b

Berdasarkan batas signifikansi koefisien autokorelasi yang berada di antara rentang $-0{,}44 \leq r_k \leq 0{,}44$, dapat dilihat pada Tabel 4 di bawah menunjukkan bahwa sudah tidak ada nilai autokorelasi yang berada di luar batas signifikansi. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa data hasil *differencing* orde pertama sudah stasioner.

Tabel 4. Nilai Autokorelasi Data Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar USA.

Lag	ACF	Lag	ACF	Lag	ACF	Lag	ACF
1	0,177143	6	0,005895	11	-0,099780	16	-0,045254
2	0,096925	7	0,015489	12	-0,074850	17	0,060142
3	-0,081528	8	-0,198022	13	0,193494	18	0,006070
4	0,022943	9	-0,051496	14	-0,064167		
5	-0,251390	10	-0,142057	15	-0,069556		

Dengan demikian data hasil pembedaan pertama ini stasioner sehingga dapat digunakan untuk pemodelan data. Selanjutnya akan ditaksir nilai-nilai pada data hilang, maka akan ditentukan terlebih dahulu koefisien autokorelasi pada lag *k*, yang diperoleh dari data, hasilnya adalah sebagai berikut.

Untuk *k = 1*, maka

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{19}(Z_t-\bar{Z})(Z_{t+k}-\bar{Z})}{\sum_{t=1}^{20}(Z_t-\bar{Z})^2} = \frac{1426878{,}00}{11078{,}00} = 0{,}81.$$

Untuk menaksir nilai-nilai data hilang pada model AR(1) melalui metode OLS, maka gunakan persamaan :

$$Z_t = 0{,}81Z_{t-1} + e_t$$
$$(1 - 0{,}81B)Z_t = e_t$$

$$(1-0{,}81B)=\Pi(B); \qquad (1-0{,}81B^{-1})=\Pi(B^{-1})$$
$$\Pi(B^{-1})\Pi(B)Z_s=0$$
$$(1-0{,}81B)(1-0{,}81B^{-1})Z_t=0$$
$$(1-0{,}81B^{-1}-0{,}81B+0{,}6561)Z_t=0$$
$$(1{,}6564-0{,}81B-0{,}81B^{-1})Z_t=0$$
$$1{,}6564Z_t-0{,}81Z_{t-1}-0{,}81Z_{t+1}=0$$
$$1{,}6564Z_t=0{,}81Z_{t-1}+0{,}81Z_{t+1}$$

maka,

$$\widehat{Z_t}=\frac{0{,}81}{1{,}6564}Z_{t+1}+\frac{0{,}81}{1{,}6564}Z_{t-1} \qquad (19)$$

di mana $\widehat{Z_t}$ adalah penaksir parameter untuk data hilang.

Untuk menghitung nilai-nilai data hilang pada saat $t=4,5,9,10,11,12,18,19,25,26$ maka akan digunakan persamaan (19).

Setelah didapatkan nilai-nilai pada data hilang tersebut, maka di bawah ini adalah tabel hasil taksiran nilai-nilai pada waktu ke- *t*.

Tabel 5. Taksiran Nilai Data Hilang pada Waktu ke- *t*.

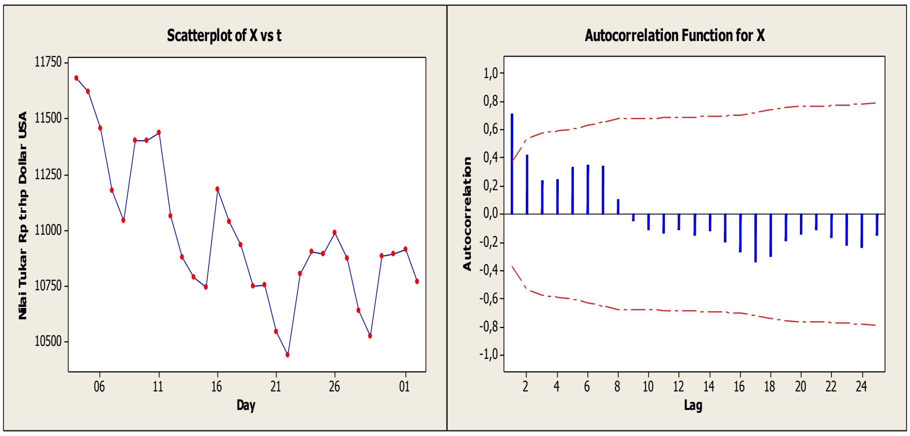
Waktu	Nilai Tukar Rupiah	Waktu	Nilai Tukar Rupiah	Waktu	Nilai Tukar Rupiah
01-Apr-09	11678	11-Apr-09	**10786,32**	21-Apr-09	10904
02-Apr-09	11619	12-Apr-09	**10742,29**	22-Apr-09	10892
03-Apr-09	11454	13-Apr-09	11181	23-Apr-09	10985
04-Apr-09	**11176,87**	14-Apr-09	11036	24-Apr-09	10872
05-Apr-09	**11041,34**	15-Apr-09	10934	25-Apr-09	**10638,95**
06-Apr-09	11402	16-Apr-09	10748	26-Apr-09	**10524,99**
07-Apr-09	11402	17-Apr-09	10754	27-Apr-09	10884
08-Apr-09	11437	18-Apr-09	**10542,13**	28-Apr-09	10894
09-Apr-09	**11060,48**	19-Apr-09	**10438,52**	29-Apr-09	10913
10-Apr-09	**10876,36**	20-Apr-09	10804	30-Apr-09	10767

Setelah didapatkan taksiran nilai data hilangnya maka akan diidentifikasi lagi apakah datanya stasioner atau tidak. *Scatter plot* data dengan menggunakan program Minitab tampak pada Gambar 4a. Hasil *scatter plot*-nya menunjukkan bahwa data tersebut membentuk pola *tren* turun. Pada Gambar 4b plot nilai autokorelasinya menggambarkan bahwa nilai autokorelasinya turun secara lambat.

Dengan menggunakan metode koreologram akan dihitung batas signifikansi dari nilai autokorelasi yang dibolehkan. Dengan mengambil $\alpha=0{,}05$ maka tingkat kepercayaannya sebesar 95%, dan dengan demikian $Z_{(1-\frac{\alpha}{2})}=Z_{(1-0{,}025)}=Z_{(0{,}975)}=1{,}96$. Karena datanya sebanyak 30 maka diperoleh kesalahan standar sebesar $\frac{1}{\sqrt{30}}=0{,}18$, sehingga batas signifikansi koefisien autokorelasi berada di antara rentang:

$$(-1{,}96)(0{,}18)\le r_k\le(1{,}96)(0{,}18)$$

$$-0{,}36 \le r_k \le 0{,}36$$



Gambar 4a Gambar 4b

Berdasarkan rentang di atas, dapat dilihat pada Tabel 6 menunjukkan bahwa masih banyak nilai autokorelasi dari data yang berada di luar batas signifikansinya. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa data tidak stasioner.

Tabel 6. Nilai Autokorelasi Data Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar USA.

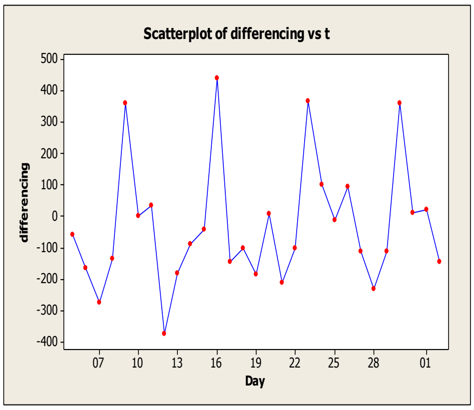
Lag	ACF	Lag	ACF	Lag	ACF	Lag	ACF	Lag	ACF
1	0,713556	6	0,350602	11	-0,132287	16	-0,268603	21	-0,112398
2	0,421009	7	0,337382	12	-0,113953	17	-0,339493	22	-0,165647
3	0,233491	8	0,105076	13	-0,152072	18	-0,299897	23	-0,222813
4	0,242929	9	-0,043838	14	-0,116205	19	-0,190630	24	-0,234467
5	0,333399	10	-0,108915	15	-0,195812	20	-0,138171	25	-0,152548

Karena data belum stasioner, maka dilakukan transformasi data dalam hal ini melakukan *differencing* orde pertama.

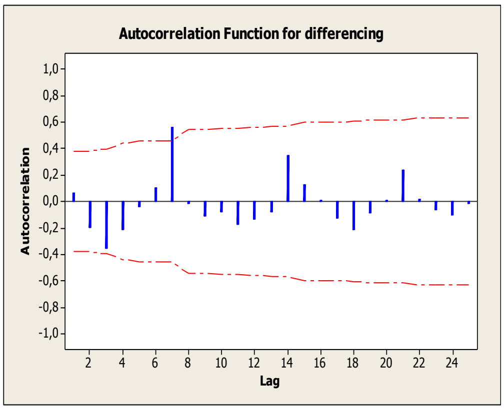
Tabel 7. Hasil *Differencing* Orde Pertama.

T	ΔZ_t	T	ΔZ_t	T	ΔZ_t	T	ΔZ_t	T	ΔZ_t	T	ΔZ_t
1	-	6	360,66	11	-90,04	16	-186	21	100	26	-113,96
2	-59	7	0	12	-44,03	17	6	22	-12	27	359,01
3	-165	8	35	13	438,71	18	-211,87	23	93	28	10
4	-277,13	9	-376,52	14	-145	19	-103,61	24	-113	29	19
5	-135,53	10	-184,12	15	-102	20	365,48	25	-233,05	30	-146

Hasil plot data *differencing* tampak pada Gambar 5a, yang secara visual menunjukkan bahwa data sudah berfluktuasi disekitar rata-ratanya dan data sudah tidak membentuk pola *tren* namun, dicoba untuk menguji kestasioneran melalui plot autokorelasi. Pada Gambar 5b, hasil plot autokorelasinya menunjukkan bahwa hanya ada satu data yang keluar dari batas signifikan.



Gambar 5a



Gambar 5b

Berdasarkan rentang $-0{,}36 \leq r_k \leq 0{,}36$ dapat dilihat pada Tabel 8 yang tampak bahwa hanya pada *lag* 7 yang berada di luar batas signifikansinya. Dengan demikian, data hasil pembedaan pertama ini sudah stasioner sehingga dapat digunakan untuk pemodelan data.

Tabel 8. Nilai Autokorelasi Data Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar USA.

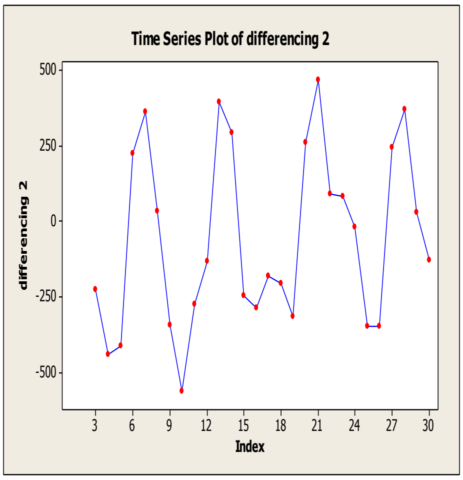
Lag	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**
1	0,010859	6	0,097043	11	-0,25556	16	0,045626	21	0,08631
2	-0,18324	7	0,431857	12	-0,06953	17	-0,17623	22	0,145524
3	-0,20082	8	0,198822	13	-0,12916	18	-0,1536	23	-0,06956
4	-0,29414	9	-0,13517	14	0,210161	19	-0,05389	24	-0,0483
5	-0,07602	10	-0,05737	15	0,234552	20	-0,03676	25	-0,0581

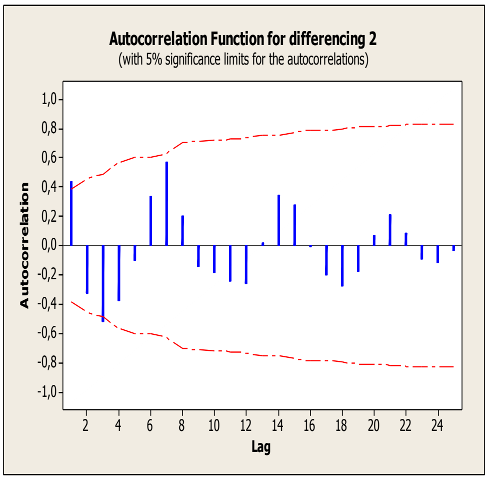
Selanjutnya akan dicoba untuk melakukan *differencing* orde kedua dan *differencing* orde ketiga untuk mengetahui dan mencari data stasioner secara visual maupun melalui plot ACF.

Berikut ini hasil pengolahan data untuk *differencing* orde kedua.

Tabel 9. Hasil *Differencing* Orde Kedua

T	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t
1	-	6	225,13	11	-274,16	16	-288	21	465,48	26	-347,01
2	-	7	360,66	12	-134,68	17	-180	22	88	27	245,05
3	-224,0	8	35,00	13	394,68	18	-205,87	23	81	28	369,01
4	-442,13	9	-341,52	14	293,71	19	-315,48	24	-20	29	29
5	-412,66	10	-560,64	15	-247	20	261,87	25	-346,05	30	-127





Gambar 6a

Gambar 6b

Tabel 10. Nilai Autokorelasi Data Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar USA.

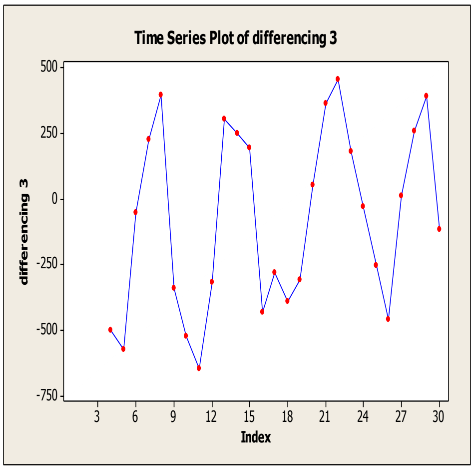
Lag	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**
1	0,434002	6	0,331882	11	-0,241983	16	-0,008041	21	0,213093
2	-0,325570	7	0,569804	12	-0,255922	17	-0,204154	22	0,086347
3	-0,516018	8	0,200206	13	0,014162	18	-0,274548	23	-0,095719
4	-0,372413	9	-0,144591	14	0,343350	19	-0,177266	24	-0,113035
5	-0,097352	10	-0,184710	15	0,274332	20	0,068055	25	-0,034034

Hasil plot data *differencing* tampak pada Gambar 6a, yang secara visual menunjukkan bahwa data sudah tidak membentuk *tren*, namun selanjutnya dicoba untuk menguji kestasioneran melalui plot ACF. Pada Gambar 6b, hasilnya menunjukkan bahwa plot autokorelasinya terdapat dua data yang keluar dari batas signifikan.

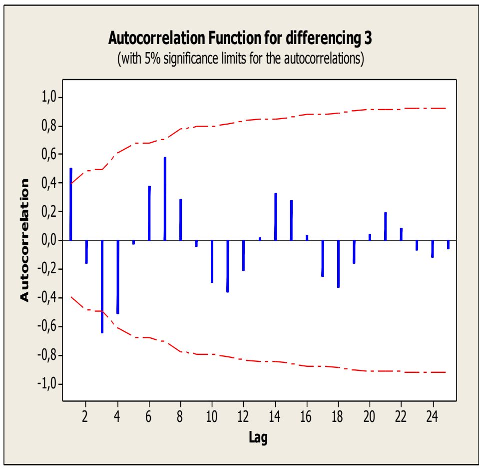
Berdasarkan rentang $-0{,}36 \leq r_k \leq 0{,}36$ dapat dilihat pada Tabel 10 yang tampak bahwa pada *lag* 1 dan *lag* 3 berada di luar batas signifikansinya. Kemudian akan dilakukan lagi *differencing* yakni *differencing* orde ketiga. Berikut ini hasil pengolahan datanya.

Tabel 11. Hasil *Differencing* Orde Ketiga

T	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t	**T**	ΔZ_t
1	-	6	-52,00	11	-650,68	16	-433,00	21	361,87	26	-460,01
2	-	7	225,13	12	-318,19	17	-282,00	22	453,48	27	12,00
3	-	8	395,66	13	304,64	18	-391,87	23	181,00	28	255,05
4	-501,13	9	-341,52	14	249,68	19	-309,48	24	-32,00	29	388,01
5	-577,66	10	-525,64	15	191,71	20	50,00	25	-253,05	30	-117,00



Gambar 7a



Gambar 7b

Tabel 12. Nilai Autokorelasi Data Nilai Tukar Rupiah terhadap Dollar USA

Lag	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**	**Lag**	**ACF**
1	0,50420	6	0,372640	11	-0,360627	16	0,029903	21	0,191820
2	-0,160869	7	0,574681	12	-0,208158	17	-0,246636	22	0,079753
3	-0,642220	8	0,284400	13	0,018901	18	-0,326196	23	-0,065161
4	-0,510029	9	-0,043713	14	0,327755	19	-0,155746	24	-0,120116
5	-0,023450	10	-0,289227	15	0,276790	20	0,043712	25	-0,057312

Hasil plot data *differencing* tampak pada Gambar 7a, yang secara visual menunjukkan bahwa data sudah tidak membentuk *tren* namun, selanjutnya dicoba untuk menguji kestasioneran melalui plot ACF. Pada Gambar 7b, hasilnya menunjukkan bahwa plot autokorelasinya terdapat dua data yang keluar dari batas signifikan. Berdasarkan rentang $-0{,}36 \leq r_k \leq 0{,}36$ dapat dilihat pada Tabel 12 yang tampak bahwa pada *lag* 1 dan *lag* 3 berada di luar batas signifikansinya.

Dengan demikian, apabila suatu data yang tidak stasioner kemudian dilakukan *differencing* orde pertama dan menghasilkan data yang stasioner maka tak perlu dilakukan lagi *differencing* orde kedua maupun *differencing* orde selanjutnya karena akan menghasilkan data yang kurang baik. Oleh karena itu, data yang digunakan untuk pemodelan adalah data hasil *differencing* orde pertama.

Suatu model *Autoregressive* yang baik yang dapat menggambarkan suatu kejadian adalah model yang salah satunya menunjukkan bahwa penaksiran parameternya signifikan berbeda dengan nol. Uji signifikansi parameter *Autoregressive* pada data hilang dilakukan untuk mengetahui apakah semua parameter signifikan atau tidak. Cara pengujiannya bisa dengan menggunakan uji *t* atau bisa juga menggunakan nilai *p-value*. Pada tugas akhir ini digunakan nilai *p-value* dari taksiran parameter *Autoregressive* pada data hilang untuk menguji tingkat signifikansi dari parameternya. Hipotesis ujinya yaitu:

$$H_0 : \phi_1 = 0$$
$$H_1 : \phi_1 \neq 0$$

Hipotesis nolnya adalah parameter *Autoregressive* sama dengan nol atau tidak cukup signifikan dalam model, sedangkan hipotesis tandingannya adalah parameter *Autoregressive* tidak sama dengan nol atau cukup signifikan dalam model. Agar parameter *Autoregressive* cukup signifikan maka diharapkan akan ditolak hipotesis nol. Kriteria keputusan: terima H_0 jika $p - value \geq \alpha$ dan tolak H_0 jika $p - value < \alpha$.

Dengan menggunakan software Minitab maka diperoleh bahwa taksiran parameter AR(1) pada data hilang dari $\emptyset_1$ yaitu $\hat{\emptyset}_1 = 0{,}8719$ dan taksiran parameter konstanta adalah $1416{,}11$.

Tabel 13. Hasil Taksiran Parameter.

```
Final Estimates of Parameters
Type          Coef   SE Coef       T
P
AR   1      0,8719   0,1065   8,19
0,000
Constant  1416,11     35,32  40,09
0,000
Mean      11054,8     275,7
Number of observations:  30
```

Untuk parameter AR(1) yaitu $\emptyset_1$, nilai *t* = 8,19 dengan nilai *p-value* = 0,000, dan parameter konstanta yaitu $\emptyset_0$, nilai *t* = 40,09 dengan nilai *p-value* = 0,000. Karena nilai *p-value* lebih kecil dari $\alpha = 0{,}05$ maka, dapat disimpulkan bahwa hipotesis nol ditolak pada taraf signifikansi $\alpha = 0{,}05$. Maka parameter untuk model AR(1) sudah signifikan.

Setelah mendapatkan parameter model *Autoregressive* yang signifikan, maka langkah selanjutnya adalah menggunakan nilai parameter tersebut untuk membangun model *Autoregressive* pada data hilang. Model yang akan digunakan dalam melakukan pemodelan data nilai tukar rupiah terhadap dollar Amerika Serikat adalah:

$$Z_t = 0{,}8719 Z_{t-1}\ .$$

Uji kelayakan model *Autoregressive* terdiri atas dua bagian yaitu uji *White Noise* sisaan dan kenormalan sisaan. Uji *White Noise* sisaan dapat dituliskan sebagai berikut:

$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$

H_1: minimal ada satu $\rho_j \neq 0,\ j = 0,1,2,\ldots,k$

Statistik Uji : *Ljung-Box statistics (Modified Box-Pierce)*

$$Q^* = n(n+2)\sum_k^K \frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k}$$

Kriteria keputusan: terima H_0 jika $p - value \geq \alpha$ dan tolak H_0 jika $p - value < \alpha$. Untuk model AR(1) diperoleh hasil *Ljung-Box statistics (Modified Box-Pierce)* dari software Minitab.

Tabel 14. Hasil *Ljung-Box statistics (Modified Box-Pierce) Chi-Square Statistic.*

```
Modified Box-Pierce (Ljung-Box) Chi-Square
Statistic

Lag              12      24
Chi-Square     24,0    46,1
DF               10      22
P-Value       0,008   0,002
```

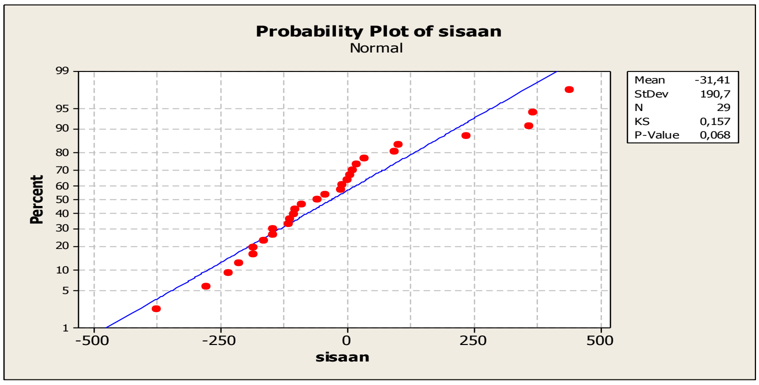
Berdasarkan hasil pengolahan dengan menggunakan program minitab di atas untuk model AR(1) maka, dapat dibuat ringkasan hasil Uji Ljung-Box pada Tabel 15.

Tabel 15. Hasil Uji Ljung-Box untuk Model AR(1).

Lag (K)	**Df (K-m)**	**Statistik Ljung-Box (Q^*)**	***p-value***
12	12-2= 10	24	0,008
24	24-2=22	46,1	0,002

Dari Tabel 13 menunjukkan bahwa pada pada lag 12 nilai *p-value* = 0,008 dan pada lag 24 nilai *p-value* = 0,002. Artinya hanya pada lag 24 yaitu nilai *p-value* lebih kecil dari $\alpha = 0{,}05$. Hal ini berarti bahwa H_0 ditolak yang artinya sisanya sudah memenuhi syarat *White Noise*.

Uji sisa kenormalan dapat dilakukan dengan menggunakan uji Kolmogorov-Smirnov seperti tampak pada Gambar 8 yang diketahui bahwa nilai *p-value* $= 0{,}058 > 0{,}05 = \alpha$, hal ini menyimpulkan bahwa data sudah memenuhi asumsi kenormalan.



Gambar 8

Karena asumsi *White Noise* dan kenormalan sudah terpenuhi maka model ini dianggap layak untuk digunakan dalam pemodelan data nilai tukar rupiah terhadap dollar Amerika Serikat.

5. Kesimpulan

Nilai-nilai data hilang pada data nilai tukar kurs mata uang rupiah terhadap dollar Amerika Serikat berdasarkan model AR(1) melalui metode OLS, adalah menggunakan model

$$\widehat{Z_t} = \frac{0{,}81}{1{,}6564} Z_{t+1} + \frac{0{,}81}{1{,}6564} Z_{t-1}$$

Karena asumsi *White Noise* dan kenormalan sudah terpenuhi melalui model AR (1), maka model ini dianggap layak untuk digunakan dalam pemodelan data nilai tukar rupiah terhadap dollar Amerika Serikat.

Daftar Pustaka

[1] Aswi dan Sukarna, 2006. *Analisis Deret Waktu.* Andira Publisher, Makassar.

[2] Chi Fung D.S., 2006. *Methods for the Estimation of Missing Values in Time Series.* Perth, Western Australia.

[3] Ferreiro O., 1987. *Methodologies for the Estimation of Missing Observation in Time Series*. Chile.

[4] Little R.J.A. dan Rubin D.B., 1987. *Statistical Analysis with Missing Data*. John Wiley & Sons., New York.

[5] Mulyana, 2004. *Analisis Data Deret Waktu*. Universitas Padjadjaran, Bandung.

[6] Wei W.W.S., 1990. *Time Series Analysis, Univariate and Multivariate Methods.* Addison-Wesley Company Inc., New York.