J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol.16, No. 1, 10-18, July 2019
doi: 10.20956/jmsk.v%vi%i.5788
e-ISSN: 2614-8811

NILAI TOTAL KETIDAKTERATURAN-H PADA GRAF C_n x P_3

Winda Aritonang[1*], Nurdin Hinding[2*], Amir Kamal Amir[3*]

Abstract

To determine of H-irregularity total strength in all graphs was not complete on graph classes. The research aims to determine alghorithm the H-irregularity total strength of graph C_n x P_3 for $n \geq 3$ with use H-covering, where H is isomorphic to C_4. The determine of H-irregularity total strength of graph C_n x P_3 was conducted by determining lower bound and smallest upper bound. The lower bound was analyzed based on graph characteristics and other supporting theorem, while the upper bound was analyzed by edge labeling and vertex labeling of graph C_n x P_3.The result show that the H-irregularity total strength of graph ths(C_n x P_3, C_4)=$\left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$ for $n \geq 3$.

Keywords : H-covering, H-irregularity total strength

Abstrak

Penentuan nilai total H- ketidakteraturan dari semua graf belum dapat dilakukan secara lengkap. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan nilai total ketidakteraturan-H pada graf C_n x P_3 untuk $n \geq 3$. Penentuan nilai total ketidakteraturan-H pada graf C_n x P_3 dengan menentukan batas bawah terbesar dan batas atas terkecil. Batas bawah dianalisis berdasarkan sifat-siat graf dan teorema pendukung lainnya. Sedangkan batas atas dianalisa dengan pemberian label pada titik dan sisi pada graf C_n x P_3.Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh nilai total ketidakteraturan-H pada graf (C_n x P_3, C_4)=$\left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$ dengan $n \geq 3$.

Kata kunci : Selimut-H, Nilai total ketidakteraturan-H

1. Pendahuluan

Graf adalah pasangan dua buah himpunan yaitu himpunan titik dan himpunan sisi, dinotasikan dengan $G = (V, E)$ di mana V menyatakan himpunan titik yang tak kosong dan E adalah himpunan sisi yang merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik V. Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan dengan titik dan sisi, dan himpunan bagian bilangan yang disebut label. Pelabelan graf adalah suatu fungsi dengan domain himpunan titik dan himpunan sisi atau keduanya dengan *range*nya bilangan riil.

Salah satu jenis pelabelan tidak teratur lainnya adalah pelabelan total tidak teratur$-H$(H-*Irreguler total labelling*). Pelabelan jenis ini melibatkan konsep selimut graf. Pelabelan ini di perkenalkan oleh Baca dkk. Secara umum pelabelan total tidak teratur-H dari suatu graf di definisikan sebagai berikut. Misal G adalah suatu graf, selimut sisi dari G (*edge covering*) adalah koleksi subgraf $H_1, H_2, \dots, H_t$ dari graf G sedemikian sehingga setiap sisi dari G termuat dalam paling sedikit satu subgraf H_i, dimana $i = 1,2, \dots, t$. Dalam hal ini, maka G disebut memiliki selimut (sisi)-

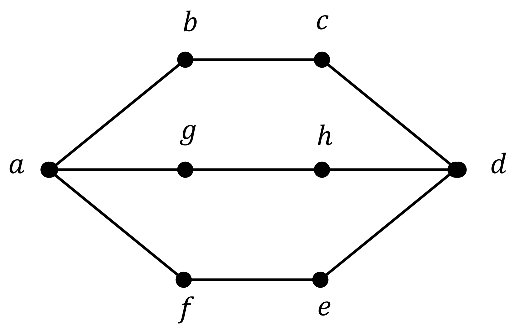
*Program Studi Pascasarjana (S2) Matematika, FMIPA-UNHAS
Email address: [1]winda.aritonang94@gmail.com, nurdin1701@unhas.ac.id, [3]amirkamalamir@yahoo.com

$(H_1, H_2, \dots, H_t)$ $((H_1, H_2, \dots, H_t)$-$(edgecovering)$. Jika setiap subgraf H_i isomorfik dengan suatu graf H, maka dikatakan G memiliki suatu selimut-H(H-$covering$).

Terdapat beberapa hasil penelitian terkait dengan pelabelan total H tidak teratur antara lain [3]telah menentukan nilai total sisi (ehs) dan nilai total titik (vhs) pada graf kipas, lintasan dan ladder. [3] telah menentukan nilai total L_n dan F_n tidak teratur (ths) pada graf planar, menentukan nilai total P_m tidak teratur (ths) pada graf P_n dan nilai total C_m tidak teratur (ths) pada graf L_n dan C_m merupakan graf lingkaran dengan m titik $ths(F_n, C_3)$ dimana F_n merupakan graf Kipas dengan n titik dan C_3 graf Lingkaran dengan 3 titik. [1] telah menentukan $ths(Amal(C_3, v, n)$ dimana $Amal(C_3, v, n)$ merupakan banyaknya graf C_3 yang di amalgamasi, dan $ths(Shack(C_m, v, n)$.

2. Tinjauan Pustaka

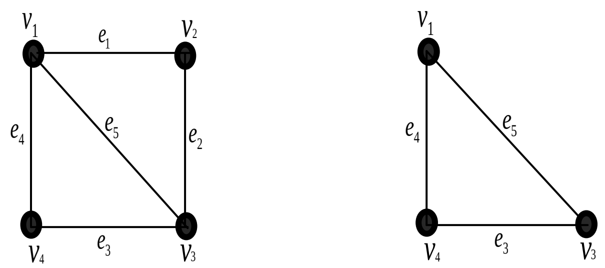
Graf G merupakan suatu pasangan himpunan (V, E) dinotasikan dengan $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ dengan V adalah himpunan tidak kosong dari objek-objek yang disebut titik dan E adalah himpunan pasangan tidak terurut dari titik-titik berbeda di V disebut sisi[4].



Gambar 1 Graf G

Himpunan titik pada Gambar 1 adalah $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ dan himpunan sisinya adalah $E = \{ab, bc, cd, de, ef, af, ag, gh, hd\}$. Selanjutnya diperoleh order dari G adalah 8 dan ukuran dari G adalah 9.

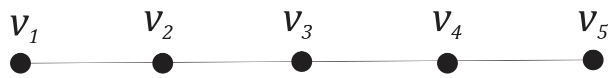
Misalkan $\mathrm{H} = \big(\mathrm{V(H)}, \mathrm{E(H)}\big)$ dan $\mathrm{G} = \big(\mathrm{V(G)}, \mathrm{E(G)}\big)$ adalah dua buah graf. Graf H disebut subgraf dari G, jika $\mathrm{V(H)} \subseteq \mathrm{V(G)}$ dan $\mathrm{E(H)} \subseteq \mathrm{E(G)}$ dan dinotasikan dengan $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$. Jika $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ tetapi $\mathrm{H} \neq \mathrm{G}$ maka H disebut subgraf sejati, dinotasikan dengan $\mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ [5]. Perhatikan Gambar 2



Gambar 2. (a) Graf G, (b) Graf H (subgraf dari graf G)

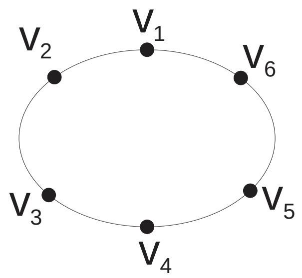
Pada Gambar 2, diketahui bahwa $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$. Sedangkan $V(H) = \{v_1, v_3, v_4\}$ dan $E(H) = \{e_3, e_4, e_5\}$. Karena $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$, maka H merupakan subgraf dari graf G.

Graf lintasan dengan n titik adalah graf terhubung yang terdiri atas tepat 2 titik berderajat 1 dan $\mathrm{n}-2$ titik berderajat dua [2].



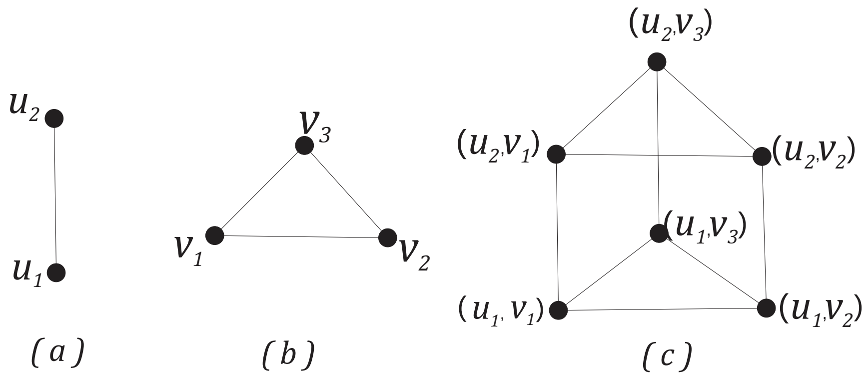
Gambar 3. Graf Lintasan P_5

Graf lingkaran adalah graf terhubung dengan n buah titik yang setiap titiknya berderajat dua. Graf lingkaran dinotasikan dengan $\mathrm{C_n}$ dimana $\mathrm{n} \geq 3$ [7].



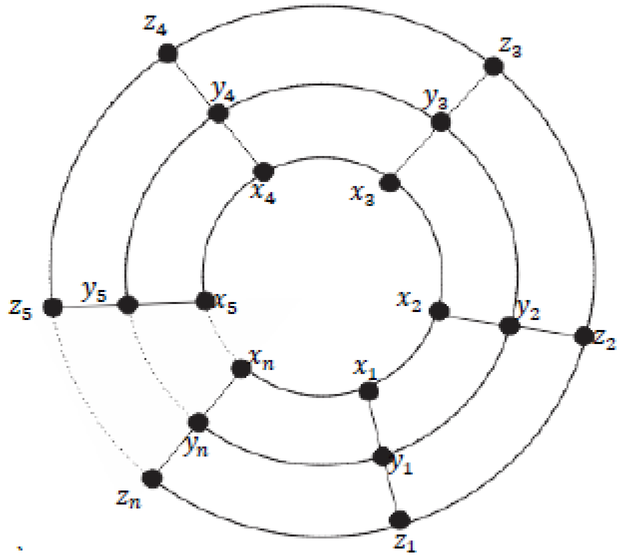
Gambar 4 Graf Lingkaran C_6

Misalkan G dan H adalah graf dengan $\mathrm{V(G)} = \{\mathrm{u_1, u_2, \ldots, u_m}\}$ dan $\mathrm{V(H)} = \{\mathrm{v_1, v_2, \ldots, v_m}\}$ maka $\mathrm{G \times H}$ adalah graf dengan himpunan titik $\mathrm{V(G \times H) = V(G) \times V(H)}$ dan e= $\mathrm{(u_i, v_j)(u_k, v_l)}$ adalah sisi dari $\mathrm{G \times H}$ jika dan hanya jika memenuhi satu dari dua item berikut i= k dan $\mathrm{v_j v_l \in E(H)}$ atau $\mathrm{j = l}$ dan $\mathrm{u_i u_k \in E(G)}$[6].



Gambar 5 (a) Graf P_2(b) Graf K_3 (C) Graf $P_2 \times K_3$

Misal G merupakan suatu graf dengan $H_1, H_2, \ldots, H_t$, untuk suatu bilangan bulat positif t, merupakan subgraf-subgraf dari G. Koleksi $H_1, H_2, \ldots, H_t$, ditulis $(H_1, H_2, \ldots, H_t)$ disebut selimut sisi (*edge covering*) dari G, jika setiap sisi dari G termuat dalam paling sedikit satu subgraf H_i, dimana $i = 1, 2, \ldots, t$, dan dikatakan G mempunyai suatu selimut sisi-$(H_1, H_2, \ldots, H_t)$ ($(H_1, H_2, \ldots, H_t)$-*edge covering*). Misalkan G mempunyai suatu selimut sisi-$(H_1, H_2, \ldots, H_t)$, jika setiap subgraf $H_i (i = 1, 2, \ldots, t)$ isomorfik dengan graf H, maka dikatakan G mempunyai selimut-H (H-*covering*) [3].



Gambar 6 Graf $C_n \times P_3$

Pada tahun 2017 [3] telah menentukan batas bawah nilai total ketidakteraturan-H untuk sebarang graf G, seperti yang ditulis pada Teorema 1.

Teorema 1: Misalkan G adalah graf yang mempunyai selimut-Hdengan banyaknya t subgraf yang isomorfik dengan H, maka

$$ths(G,H) \geq \left\lceil 1 + \frac{t-1}{|V(H)| + |E(H)|} \right\rceil,$$

Dimana $|V(H)|$ dan $|E(H)|$ masing-masing merupakan banyaknya titik dan banyaknya sisi pada subgraf H. Misalkan G suatu graf yang memuat H-selimut dengan banyaknya subgraf t yang isomorfik dengan H. φ dinyatakan sebagai pelabelan-k total tidak teratur H dari graf G dengan $ths\ (G,H) = k$. Bobot subgraf terkecil H dari pelabelan-k total adalah $|V(H)| + |E(H)|$.

3. Nilai Total Ketidakteraturan-H pada Graf $C_n \times P_3$

Himpunan titik dan himpunan sisi graf $C_n \times P_3$, untuk n bilangan bulat positif $n \geq 3$ adalah sebagai berikut :

$$V(C_n \times P_3) = \{x_i, y_i, z_i | i = 1,2,\dots,n\}$$

$$E(C_n \times P_3) = \{x_i x_{i+1}, x_i x_n \ \cup \ y_i y_{i+1}, y_n \cup \ z_i z_{i+1}, z_1 z_n \ | i = 1,2,\dots,n\}$$
$$\cup \{x_i y_i \cup y_i z_i \ | i = 1,2,\dots,n\}$$

Dengan menggunakan himpunan titik dan himpunan sisi tersebut, maka didefinisikan himpunan titik dan himpunan sisi dari subgraf $H_i \cong C_4$ di $C_n \times P_3$ sebagai berikut:

Untuk $i = 1,\cdots,n-1$

$$V(H_i) = \{x_i, y_i, x_{i+1}, y_{i+1}\}$$
$$E(H_i) = \{x_i y_i,\ x_i x_{i+1}, x_{i+1} y_{i+1}, y_i y_{i+1}\}$$

$$V(H_n) = \{x_1, y_1, x_n, y_n\}$$

$$E(H_n) = \{x_1x_n, y_1y_n, x_ny_n, x_1y_1\}$$

Untuk $i = n + j$ dengan $j = 1, \cdots, n-1$

$$V(H_i) = \{y_i, z_i, y_{i+1}, z_{i+1}\}$$

$$E(H_i) = \{y_iz_i,\ y_iy_{i+1}, y_{i+1}z_{i+1}, z_iz_{i+1}\}$$

$$V(H_{2n}) = \{y_1, z_1, y_n, z_n\}$$

$$E(H_{2n}) = \{y_1z_1, y_1y_n, y_nz_n, y_1z_1\}$$

Teorema 2.6.2 *Misalkan $C_n \times P_3$ adalah graf dengan $n \geq 3$ maka,*

$$ths\ (C_n \times P_3, C_4) = \left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil.$$

Bukti :

Untuk membuktikan bahwa $\mathrm{ths}\,(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4}) = \left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$ maka akan dibuktikan $\mathrm{ths}\,(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4}) \leq \left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$. Untuk membuktikan $\mathrm{ths}\,(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4}) \leq \left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$, maka digunakan Teorema 2.6.1 yaitu $\mathrm{ths}\,(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4} \geq \left\lceil 1 + \frac{t-1}{|V(H)|+|E(H)|} \right\rceil$ dengan t adalah banyaknya subgraf H.

Perhatikan bahwa banyaknya subgraf C_4 dari $C_n \times P_3$ adalah 2n dan $|V(C_4)| = 4$ dan $|E(C_4)| = 4$. Jadi $\mathrm{ths}\,(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4}) \leq \left\lceil 1 + \frac{2n-1}{8} \right\rceil$

$$\mathrm{ths}\,(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4}) \leq \left\lceil \frac{2+7}{8} \right\rceil$$

Selanjutnya akan ditentukan bahwa $(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4}) \leq \left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$. Untuk membuktikan bahwa $(\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}, \mathrm{C_4}) \leq \left\lceil \frac{2n+7}{8} \right\rceil$, maka akan dikonstruksi suatu fungsi pelabelan ketidakteraturan C_4 total pada $\mathrm{C_n} \times \mathrm{P_3}$ sebagai berikut:

$$f(x_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil; & i = 1, 2, .., \left\lfloor \frac{n+9}{3} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{n+2-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n \end{cases}$$

$$f(z_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil; & i = 1, 2, .., \left\lfloor \frac{n+9}{3} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{n+3-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n \end{cases}$$

$$f(x_iy_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil; & i = 1, 2, .., \left\lfloor \frac{n+9}{3} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{n+2-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n \end{cases}$$

$$f(y_i z_i) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil; & i = 1,2,..,\left\lfloor \frac{n+9}{3} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{n+2-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n \end{cases}$$

- Untuk n ganjil

$$f(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil; & i = 1,2,..,\left\lceil \frac{n}{2} - 1 \right\rceil \\ \left\lceil \frac{n+2-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{n+1-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n-1 \\ f(x_n x_1) = 1 \end{cases}$$

$$f(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil; & i = 1,2,..,\left\lfloor \frac{n+9}{3} \right\rfloor \\ \left\lceil \frac{n+2-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n \\ y_n y_1 = 1 \end{cases}$$

$$f(z_i z_{i+1}) \begin{cases} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil; & i = 1,2,..,\left\lceil \frac{n}{2} - 1 \right\rceil \\ \begin{cases} \left\lfloor \frac{i+1}{2} \right\rfloor; \\ \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1; \end{cases} & \begin{matrix} i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil genap \\ i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil ganjil \end{matrix} \\ \left\lceil \frac{n+1-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n-1 \\ f(z_n z_1) = 1 \end{cases}$$

- Untuk n genap

$$f(x_i x_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil; & i = 1,2,..,\left\lceil \frac{n}{2} - 1 \right\rceil \\ \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil; \\ \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1; \end{cases} & \begin{matrix} i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\ genap \\ i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil ganjil \end{matrix} \\ \left\lceil \frac{n+1-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lfloor \frac{n+12}{3} \right\rfloor, \dots, n-1 \\ f(x_n x_1) = 1 \end{cases}$$

$$f(y_i y_{i+1}) = \begin{cases} f(y_1 y_2) = 1 \\ \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil; & i = \ 2,..,\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \\ \left\lceil \frac{n+2-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil, \dots, n \\ y_n y_1 = 1 \end{cases}$$

$$f(z_i z_{i+1}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil; & i = 1, 2, .., \left\lceil \frac{n}{2} - 1 \right\rceil \\ \begin{cases} \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil; & i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil genap \\ \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil + 1; & i = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil ganjil \end{cases} \\ \left\lceil \frac{n+1-i}{2} \right\rceil; & i = \left\lceil \frac{n+12}{3} \right\rceil, \dots, n-1 \\ f(z_n z_1) = 1 \end{cases}$$

selanjutnya akan ditunjukkan bahwa bobot setiap subgraf berbeda untuk pada $C_n \times P_3$ sebagai berikut :

1. Untuk n genap

$$W_1 = W_t(H_n) = \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n-1}{2} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$< \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+3-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1-n}{2} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = W_t(H_{2n})$$

$$W_2 = W_t(H_{2n}) = \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n-1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+2-n-1}{2} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil$$

$$< \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = w_t(H_1)$$

$$W_3 = W_t(H_1) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil$$

$$< \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = W_t(H_{n+1})$$

$$W_4 = W_t(H_{n+1}) = \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{i+2}{2} \right\rceil$$

$$= 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil + 1 + \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil$$

$$< \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) + \left(\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1}{2} \right\rceil \right) = W_t(H_{3n})$$

2. Untuk n ganjil

$$W_1 = W_t(H_n) = \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n-1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n-1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil$$
$$= 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil$$
$$< \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil$$
$$= 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil = W_t(H_{2n})$$

$$W_2 = W_t(H_{2n}) = \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+3-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+2-n}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{n+1-n}{2}\right\rceil$$
$$= 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil$$
$$< \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+2}{2}\right\rceil$$
$$= \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil = w_t(H_1)$$

$$W_3 = W_t(H_1) = \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+2}{2}\right\rceil$$
$$= \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil$$
$$< \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+2}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+2}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil$$
$$= 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil = W_t(H_{n+1})$$

$$W_4 = W_t(H_{n+1}) = \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+2}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+2}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil + \left\lceil\frac{i+1}{2}\right\rceil$$
$$= 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{1}{2}\right\rceil + 1 + \left\lceil\frac{3}{2}\right\rceil$$
$$< \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1}{2}\right\rceil\right) + \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1}{2}\right\rceil\right) + \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1}{2}\right\rceil\right) + \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1}{2}\right\rceil\right) + \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1}{2}\right\rceil\right) + \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1}{2}\right\rceil\right) + \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+1}{2}\right\rceil\right) + \left(\left\lceil\frac{\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil+2}{2}\right\rceil\right) = W_t(H_{3n})$$

Berdasarkan w_1, w_2, w_3, w_4 maka diperoleh bahwa bobot setiap subgraf berbeda. Karena itu graf $C_n \times P_3$ dimana $n \geq 3$ memiliki suatu pelabelan-*k* total tidak teratur sisi, dimana $K = \left\lceil\frac{2n+7}{8}\right\rceil$. Dengan demikian, diperoleh $ths(C_n \times P_3, C_4) \leq \left\lceil\frac{2n+7}{8}\right\rceil$.

Karena $ths(C_n \times P_3, C_4) \geq \left\lceil 1 + \frac{t-1}{8}\right\rceil$ dan $ths(C_n \times P_3, C_4) \leq \left\lceil\frac{2n+7}{8}\right\rceil$, maka $ths(C_n \times P_3, C_4) = \left\lceil\frac{2n+7}{8}\right\rceil$ ■

Daftar Pustaka

[1] Agustin, I.H., 2017. On H-Irregulerity Strengh of Graph: A New Notion. *Journal of Physic*: Confrens Series 855.

[2] Ahmad, A., 2014. Irregular Total Labeling of Disjoint Union of Prisms and Cycles. *Australasian Journal of Combinatorics*. 59 : 98-106.

[3] Bača, M., dkk., 2017. On H-Irregulerity Strengh of Graph. Discucsiones Mathematics. *Graph Theory* 37(2017) 1067-1078.

[4] Baca, M., Jendrol., Miller, M. dan Ryan, J., 2007. *On Irregular total Labelings*. *Discrere Mathematics*. 307 : 1378-1388.

[5] Indriati D, Widodo, Indah IE dan Sugeng KA., 2015. On Total Irregularity Strength of Double-Star and Related Graphs. *Procedia Computer Science 74* Hal 118-123. Elsevier: Indonesia.

[6] Ramdani R dan Salman ANM., 2013. On The Total Irregularity Strength of Some Cartesians Product Graphs. *Int.J.Graphs Comb*.,10 No.2.Page 199-209. AKCE. Bandung : Indonesia.

[7] Tarawneh I, Hasni R. dan Ahmad A., 2016. On the Edge Irregularity Strength of Corona Product of Cyccle with Isolated Vertices. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics 13.Page 213-217*. Elsevier. Mathematics Science.