J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 4, No.2, 90-96, Januari 2008

ISBN:1858-1382

Ketaksamaan *Gronwall*

A. Wahidah A.K*, Kasbawati**

Abstrak

Ada berbagai cara menentukan solusi persamaan diferensial biasa (PDB). Pada tulisan ini, kita menggunakan ketaksamaan *Gronwall* untuk menentukan solusi PDB dengan menghampiri perbedaan solusi dari dua persamaan diferensial $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ dan $\dot{z}(t) = g(t, z(t))$. PDB yang digunakan adalah PDB yang memiliki kondisi Lipschitz. Ketaksamaan *Gronwall* ini dapat diperluas kegunaannya untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde tinggi.

Kata Kunci : *Persamaan diferensial biasa (PDB), solusi PDB, kondisi Lipschitz, persamaan diferensial orde tinggi.*

1. Pendahuluan

Ada beberapa versi ketaksamaan *Gronwall* yang digunakan untuk menentukan keberadaan solusi dari persamaan diferensial yang dilengkapi dengan kondisi awal dari Masalah Nilai Awal (MNA). Pada kasus ini, kita akan menentukan keberadaan solusi dua MNA dengan menghampiri perbedaan solusi atau jarak dari kedua solusi MNA $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ dan $\dot{z}(t) = g(t, z(t))$. Pada persamaan tersebut, akan diperhatikan dua perbedaan, yakni perbedaan kondisi awal antara PDB, dan perbedaan fungsi f dan g. Pada versi biasa ketaksamaan *Gronwall* digunakan pada fungsi yang sama $f = g$, namun ketaksamaan ini tidak dapat diterapkan pada kasus-kasus umum.

2. Teorema Ketaksamaan *Gronwall*

Misal **X** ruang Banach dan $U \subset X$ suatu himpunan buka di **X.** Misal $f, g : [a, b] \times U \to X$ fungsi kontinu dan $y, z : [a, b] \to U$ memenuhi masalah nilai awal

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)); \quad y(a) = y_0 \qquad \ldots(1.1)$$

$$\dot{z}(t) = g(t, y(t)); \quad z(a) = z_0 \qquad \ldots(1.2)$$

Juga diasumsikan terdapat $C \geq 0$ sedemikian sehingga

$$\|g(t, x_2) - g(t, x_1)\| \leq C\|x_2 - x_1\| \qquad \ldots(1.3)$$

dan terdapat suatu fungsi kontinu $\varphi : [a, b] \to [0, \infty)$ sedemikian sehingga

---

* Staf Pengajar pada Jurusan Matematika Universitas Islam Negeri Makassar

** Staf Pengajar pada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar; e-mail : kasbawati_sains_98@yahoo.com

$$\|f(t, y(t)) - g(t, y(t))\| \leq \varphi(t) \qquad ...(1.4)$$

Maka untuk $t \in [a, b]$, berlaku

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{C|t-a|}\|y_0 - z_0\| + e^{C|t-a|}\int_a^t e^{C|t-a|}\varphi(s)\, ds \qquad ...(1.5)$$

Teorema di atas menyatakan bahwa jika salah satu MNA di atas memenuhi kondisi Lipschitz, maka ketaksamaan *Gronwall* dapat menjamin eksistensi solusi dari dua MNA pada interval waktu tertentu. Kondisi Lipschitz ini menjamin MNA tersebut memiliki solusi tunggal. Syarat ini ditunjukkan oleh persamaan (1.3). Selain itu, kedua persamaan diferensial di atas saling berkaitan (*nearby*). Seberapa dekat kedua PDB itu bergantung dari pemilihan $\varphi(t)$. Syarat ini ditunjukkan dari persamaan (1.4). Namun terdapat beberapa kelemahan pada teorema di atas, yakni

- Pada persamaan (1.4), berlaku ketaksamaan sepanjang solusi $y(t)$, sedangkan solusi $y(t)$ tersebut belum ketahui.
- Tidak ada asumsi bahwa f memenuhi kondisi Lipschitz. Akibatnya tidak bisa dijamin bahwa solusi untuk masalah nilai awal $\dot{y}(t) = f(t, y(t))$ dengan kondisi awal $y(a) = y_0$ tunggal.

Untuk itu, dengan mengubah persamaan (1.4) menggunakan hipotesis

$$\forall x \in U \ni \|f(t, x) - g(t, x)\| \leq \varphi(t) \qquad ...(1.6)$$

Dengan demikian, dapat dipilih $\varphi(t)$ yang lebih besar. Namun, semakin besar $\varphi(t)$ maka semakin memungkinkan error yang kecil pula. Pada kelemahan yang kedua, ketaksamaan dapat digunakan untuk menghampiri solusi $y(t)$ dengan cara membandingkan solusi $y(t)$ dengan solusi masalah nilai awal $\dot{z}(t) = g(t, z(t))$, dengan kondisi awal yang sama yaitu $y(a) = y_0 = z(a)$. Hal ini dikarenakan $g(t, z(t))$ telah diketahui memenuhi kondisi Lipschitz, sehingga $g(t, z(t))$ memiliki ketunggalan solusi. Dengan demikian, diperolehketaksamaan

$$\|y(t) - z(t)\| \leq e^{C|t-a|}\int_a^t e^{-C|s-a|}\varphi(s)ds \qquad ...(1.7)$$

Berikutnya, jika diasumsikan bahwa ketaksamaan (1.6) terpenuhi, dan jika ada masalah nilai awal baru $\dot{y}_1(t) = f(t, y_1(t))$ dengan $\dot{y}_1(a) = y_1$ maka

$$\|y(t) - y_1(t)\| \leq \|y(t) - z(t)\| + \|z(t) - y_1(t)\| \qquad ...(1.8)$$

Dengan mensubstitusi persamaan (1.5) dan (1.7) ke (1.8), diperoleh ketaksamaan

$$\|y(t) - y_1(t)\| \leq e^{C|t-a|}\|y_0 - y_1\| + 2e^{C|t-a|}\int_a^t e^{-C|s-a|}\varphi(s)\, ds \qquad ...(1.9)$$

Ketaksamaan (1.9) merupakan versi ketaksamaan *Gronwall* untuk persamaan diferensial yang tidak memenuhi kondisi Lipschitz, namun berada di dekat (*nearby*) suatu persamaan diferensial yang memiliki konstanta Lipschitz. Kata “*nearby*” ini ditandai dengan ukuran $\varphi(t)$.

.

2.1 Bukti Teorema Ketaksamaan *Gronwall*

Pada fungsi $C^1\, x:[a,b]\to X$, berlaku ketaksamaan

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \le \|\dot{x}(t)\| \qquad \text{...(1.10)}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|y(t)-z(t)\| &\le \|\dot{y}(t)-\dot{z}(t)\| \\ &= \|f(t,y(t))-g(t,z(t))\| \\ &\le \|f(t,y(t))-g(t,y(t))\| + \|g(t,y(t))-g(t,z(t))\| \\ &\le \varphi(t) + C\|y(t)-z(t)\|\end{aligned}$$

Akibatnya

$$\frac{d}{dt}\|y(t)-z(t)\| - C\|y(t)-z(t)\| \le \varphi(t)$$

Masing-masing sisi dikalikan dengan faktor e^{-Ct}, sehingga

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Ct}\|y(t)-z(t)\|\right) \le e^{-Ct}\varphi(t)$$

kedua sisi diintegralkan dari *a* ke *t*, diperoleh

$$e^{-Ct}\|y(t)-z(t)\| - e^{-Ca}\|y_0 - z_0\| \le \int_a^t e^{-Cs}\varphi(s)ds$$

Masing-masing sisi dikalikan dengan e^{-Ca}, diperoleh

$$\|y(t)-z(t)\| \le e^{C(t-a)}\|y_0 - z_0\| + e^{C(t-a)}\int_a^t e^{-C(s-a)}\varphi(s)ds$$

Ketaksamaan di atas ekuivalen dengan ketaksamaan (1.5).

Akibat 1.4.

Misal X ruang Banach dan $U \subset X$ himpunan buka di X. Misal $f:[a,b]\times U \to X$ fungsi kontinu dan $y,z:[a,b]\to U$ memenuhi masalah nilai awal

$$\dot{y}(t) = f(t,y(t)); \quad y(a) = y_0 \qquad \text{...(1.11)}$$

$$\dot{z}(t) = g(t,z(t)); \quad z(a) = z_0 \qquad \text{...(1.l2)}$$

Diasumsikan terdapat konstanta $C \ge 0$ sedemikian sehingga memenuhi

$$\|f(t,x_2) - f(t,x_1)\| \le C\|x_2 - x_1\| \qquad \text{...(1.13)}$$

Maka untuk $t \in [a,b]$ berlaku

$$\|y(t)-z(t)\| \le e^{C\|t-a\|}\|y_0 - z_0\| \qquad ...(1.14)$$

Bukti :
Andaikan $f=g$, berdasarkan teorema Ketaksamaan Gronwall pada persaman (1.1) , maka $\varphi(t)\equiv 0$. Selanjutnya, $\varphi(t)\equiv 0$ disubstitusi ke ketaksamaan (1.5), akibatnya diperoleh

$$\|y(t)-z(t)\| \le e^{C\|t-a\|}\|y_0 - z_0\|$$

2.2 Ketaksamaan *Gronwall* pada Persamaan Diferensial Orde Tinggi

Pandang masalah nilai awal orde n^{th} berikut

$$y^{(n)}(t)=f\left(t, y(t), y^{(1)}(t),..., y^{(n-1)}(t)\right) \qquad ...(1.15)$$

$$z^{(n)}(t)=g\left(t, z(t), z^{(1)}(t),..., z^{(n-1)}(t)\right) \qquad ...(1.16)$$

Dengan kondisi awal

$$y(0) = y_0,\ y^{(1)}(0) = y_1,..., y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$
$$z(0) = z_0,\ z^{(1)}(0) = z_1,..., z^{(n-1)}(0) = z_{n-1}$$

Persamaan (1.15)-(1.6) dapat direduksi ke dalam bentuk persamaan orde pertama.
Misal

$$y(t)=x_0$$
$$y^{(1)}(t)=y_*(t)=x_1$$
$$y^{(2)}(t)=y_*^{(1)}(t)=x_2$$
$$\vdots$$
$$y^{(n)}(t)=y_*^{(n-1)}(t)=f(t, y(t), y^1(t),..., y^{(n-1)}(t))=x_{n-1}$$

atau dapat dituliskan

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y^{(1)}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = Y(t)$$

dengan

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ f(t, x_0, x_1,..., x_{n-1}) \end{pmatrix} = F(t, Y(t))$$

dengan kondisi awal $Y_0 = [y_0, y_1, ..., y_{n-1}]^T$. Perilaku yang sama juga diterapkan pada persamaan (1.15), akibatnya diperoleh dua masalah nilai awal orde pertama untuk vektor $Y(t)$ dan $Z(t)$

$$\dot{Y}(t) = F(t, Y(t)); \quad Y(0) = Y_0 \qquad ...(1.17)$$

$$\dot{Z}(t) = G(t, Z(t)); \quad Z(0) = Z_0 \qquad ...(1.18)$$

Apakah teorema ketaksamaan *Gronwall* dapat diterapkan untuk kedua persamaan vektor orde pertama (16)-(17).

Misal X ruang Banach dan $U \subset X$ suatu himpunan buka di X. Misal $F, G : [a,b] \times U \to X$ fungsi kontinu dan $Y, Z : [a,b] \to U$ memenuhi masalah nilai awal (16)-(17).

Pilih $C \geq 0$ sedemikian sehingga

$$\|G(t, X_2) - f(t, X_1)\| \leq C\|X_2 - X_1\| \qquad ...(1.19)$$

Selanjutnya pilih fungsi $\varphi : [a,b] \to [0, \infty)$ sedemikian sehingga

$$\|F(t, Y(t)) - G(t, Y(t))\| \leq \varphi(t) \qquad ...(1.20)$$

Pada persamaan vektor juga berlaku ketaksamaan $\frac{d}{dt}\|X(t)\| \leq \|X(t)\|$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|Y(t) - Z(t)\| &\leq \|\dot{Y}(t) - \dot{Z}(t)\| \\
&= \|F(t, Y(t)) - G(t, Z(t))\| \\
&\leq \|F(t, Y(t)) - G(t, Y(t))\| + \|G(t, Y(t)) - G(t, Z(t))\| \\
&\leq \varphi(t) + C\|Y(t) - Z(t)\|
\end{aligned}$$

Akibatnya

$$\frac{d}{dt}\|Y(t) - Z(t)\| - C\|Y(t) - Z(t)\| \leq \varphi(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-Ct}\|Y(t) - Z(t)\|\right) \leq e^{-Ct}\varphi(t)$$

$$e^{-Ct}\|Y(t) - Z(t)\| - e^{-Ca}\|Y_0 - Z_0\| \leq \int_a^t e^{-Ct}\varphi(s)ds$$

$$\begin{aligned}
\|Y(t) - Z(t)\| &\leq e^{-C(t-a)}\|Y_0 - Z_0\| \\
&\quad + e^{-C(t-a)}\int_a^t e^{-C(s-a)}\varphi(s)ds
\end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapat mengatakan bahwa ketaksamaan *Gronwall* juga dapat diaplikasikan ke persamaan diferensial orde tinggi.

2.3 Aplikasi Ketaksamaan *Gronwall* pada PDB Orde Satu

Diberikan Masalah Nilai Awal pada interval waktu $0.01 \leq t \leq 10$,

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)) = \frac{1}{\sqrt{y+2}}; \quad y(0.01) = 0 \qquad ...(1.21)$$

$$\dot{z}(t) = g(t, z(t)) = e^{-z}; \quad z(0.01) = 1 \qquad ...(1.22)$$

Akan ditunjukkan apakah teorema ketaksamaan *Gronwall* berlaku pada kedua masalah nilai awal yang diberikan.

Pilih $C = \frac{1}{2} \geq 0$, dan ambil $x_1, x_2 \in U$ sedemikian sehingga

$$\left|\frac{1}{\sqrt{x_2+2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1+2}}\right| = \left|\frac{\sqrt{x_2+2} - \sqrt{x_1+2}}{\sqrt{x_1+2}\sqrt{x_2+2}}\right|$$

$$= \left|\frac{x_2 - x_1}{(x_2+2)\sqrt{x_1+2} + (x_1+2)\sqrt{x_2+2}}\right|$$

$$\leq \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$$

Dengan demikian persamaan $f(t, y(t))$ memenuhi kondisi Lipschitz.

Berikut akan ditunjukkan kedua masalah nilai awal (20)-(21) saling berdekatan. Pilih $\varphi(t) = \frac{k}{t}$ dengan $k > 1$ sedemikian sehingga,

$$\|g(t, z(t)) - f(t, z(t))\| \leq \left\|e^{-z} - \frac{1}{\sqrt{z+2}}\right\|$$

$$\leq |e^{-z}| + \left|\frac{1}{\sqrt{z+2}}\right|$$

$$\leq ke^{-z} = ke^{-\log(t)-3}$$

$$\leq ke^{-\log(t)} - \frac{k}{t}$$

Jadi, $\|g(t, z(t)) - f(t, z(t))\| \leq \varphi(t)$. Dengan demikian masalah nilai awal (1.20)-(1.21) saling berdekatan (*nearby*).

Berikut, akan diselidiki apakah jarak kedua solusi MNA di atas terpenuhi oleh teorema ketaksamaan *Gronwall*.

$$\frac{d}{dt}\|y(t) - z(t)\| \leq \|\dot{y}(t) - \dot{z}(t)\|$$

$$= \|f(t, y(t)) - g(t, z(t))\|$$

$$\leq \|f(t, y(t)) - g(t, y(t))\| + \|g(t, y(t)) - g(t, z(t))\|$$

$$\leq \varphi(t) + C\|y(t) - z(t)\|$$

$$\leq \frac{k}{t} + \frac{1}{2}\|y(t) - z(t)\|$$

Akibatnya,

$$\frac{d}{dt}\|y(t)-z(t)\|-\frac{1}{2}\|y(t)-z(t)\|\leq\frac{k}{t}$$

Diperoleh

$$\|y(10)-z(10)\|\leq ke^{5}\int_{0.01}^{10}\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{t}dt+e^{\frac{4,99}{2}}$$

Karena solusi dari kedua MNA (20)-(21) adalah

$$y(t)=\left(\frac{3}{2}t\right)^{\frac{2}{3}}-0.0001 \quad ...(1.23)$$

$$z(t)=\log(t)+3 \quad ...(1.24)$$

Akibatnya

$$\|y(10)-z(10)\|=\|2.0821\|\leq 6.664\times 10^{3}k+12.1217$$

dengan $k>1$. Ini menunjukkan teorema ketaksamaan *Gronwall* berlaku pada kedua MNA di atas.

3. Kesimpulan

Ketaksamaan *Gronwall* menjamin keberadaan solusi dari dua MNA, baik yang fungsinya berbeda dengan kondisi awalnya sama, maupun fungsi yang sama dengan kondisi awal berbeda. Demikian juga ketaksamaan *Gronwall* dapat menjamin keberadaan solusi persamaan diferensial orde tinggi.

Daftar Pustaka

[1] O. Neswan, 2006, "Ketunggalan solusi", *Literatur Persamaan Diferensial Biasa*, Jurusan Matematika FMIPA ITB, Bandung.