J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol.14, No. 2, 180-186, Januari 2018

p-ISSN: 1858-1382
e-ISSN: 2614-8811

Solusi Problem Dirichlet pada Daerah Persegi dengan Metode Pemisahan Variabel

M. Saleh AF*

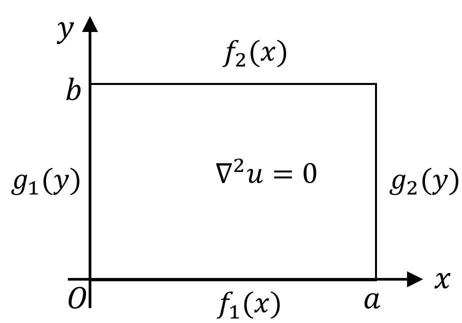
Abstrak

Dalam keadaan distribusi temperatur setimbang (tidak tergantung pada waktu) pada daearah persegi $a \times b$, pandang persamaan $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ 0 < x < a\ ,\ 0 < y < b$. Persamaan ini dikenal sebagai persamaan Laplace dalam dua variabel, yang diperoleh dari persamaan panas dengan membuat turunan terhadap waktu sama dengan nol. Persamaan Laplace dalam dua variabel beserta syarat-syarat batas yang diberikan, disebut masalah Dirichlet daerah Persegi. Dalam tulisan ini akan diuraikan pemecahan masalah yang didasarkan pada metode pemisahan variabel, dengan asumsi solusi berbentuk $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Penyelesaian masalah Dirichlet di bagi ke dalam empat sub-bagian yang masing-masing memiliki satu syarat tak homogen. Solusi yang diperoleh merupakan jumlah dari ke empat solusi sub-bagian.

Kata Kunci: Masalah Dirichlet, persamaan Laplace, metode pemisahan variabel, nilai batas persegi.

1. Pendahuluan

Pandanglah konduksi panas dalam keadaan mantap pada daerah dua dimensi. Dalam hal ini temperatur diasumsikan setimbang (*steady-state*) dalam bidang persegi $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b)$ dimana temperatur merupakan fungsi dari posisi (tidak tergantung pada waktu) pada batas-batas yang diberikan, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Problem Dirichlet pada Daerah Persegi.

Dalam keadaan temperatur setimbang maka $u(x,y)$ memenuhi persamaan Laplace dengan syarat-syarat batas berikut:

* *Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Hasanuddin, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10, Tamalanrea, Makassar.*

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0, \forall\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b, \quad (1)$$

dengan syarat-syarat batas:

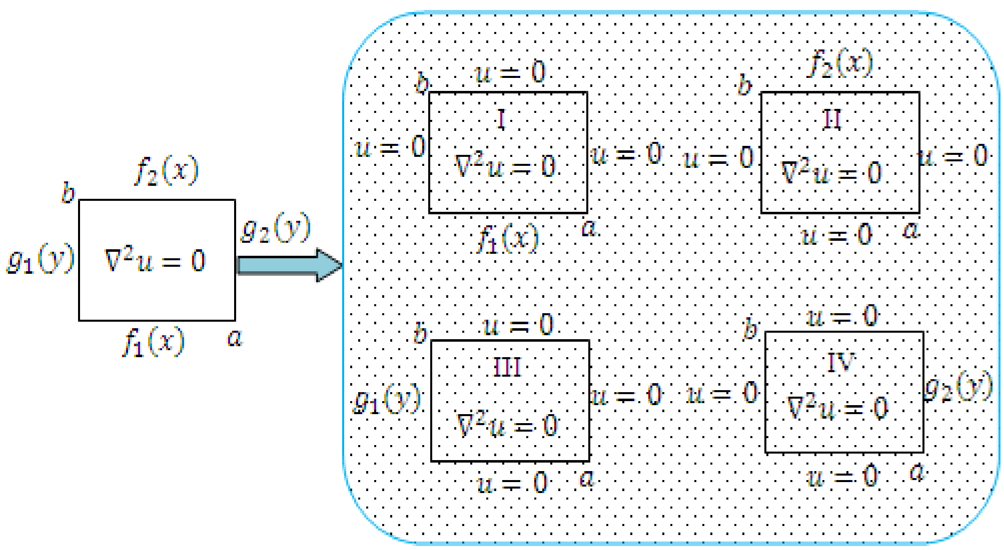
$$u(x,0) = f_1(x)\ ;\ u(x,b) = f_2(x) \quad (2)$$
$$u(0,y) = g_1(y)\ ;\ u(a,y) = g_2(y)$$

dimana f_1, f_2 adalah fungsi-fungsi dalam x dan g_1, g_2 adalah fungsi-fungsi dalam y yang diberikan.

Persamaan Laplace dua dimensi beserta syarat-syarat batas yang diberikan, di sebut problem *Dirichlet* pada daerah bidang persegi. Untuk menyelesaikan masalah ini, problem Dirichlet dibagi atas empat sub-bagian Dirichlet seperti pada Gambar 2, masing-masing memiliki satu syarat non-homogen. Solusi yang diperoleh merupakan jumlah dari empat sub-bagian, yang berbentuk:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y) \quad (3)$$

dimana setiap $u_i(x,y), i = 1,2,3,4$ memenuhi persamaan Laplace dengan satu syarat batas tak homogen dan tiga syarat batas homogen. Metode penyelesaian untuk setiap $u_i(x,y)$ adalah sama, yaitu metode variabel terpisah dengan detail yang berbeda.



Gambar 2. Dekomposisi Problem Dirichlet ke Dalam Empat Sub-Bagian.

Bentuk persamaan dan syarat-syarat batas dari ke empat masalah ini adalah

(i) $\nabla^2 u(x,y) = 0$ atau $\frac{\partial^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{dy^2}u(x,y) = 0$,
dengan syarat batas: $u(x,0) = f_1(x)$; $u(x,b) = 0$; $u(0,y) = 0$; $u(a,y) = 0$.

(ii) $\frac{\partial^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{dy^2}u(x,y) = 0$,
dengan syarat batas: $u(x,0) = f_2(x)$; $u(x,b) = u(0,y) = (a,y) = 0$.

(iii) $\frac{\partial^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{dy^2}(x,y) = 0$, dengan syarat batas: $u(0,y) = g_1(y);\ (x,0) = \ u(x,b) = \ u(a,y) = 0.$

(iv) $\frac{\partial^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{dy^2}u(x,y) = 0,$

dengan syarat batas: $u(x,0) = \ u(x,b) = u(0,y) = 0\ ;\ (a,y) = g_2(y).$

2. Pencarian Solusi dengan Metode Pemisahan Variabel

Pertama-tama, akan diselesaikan salah satu bagian, yaitu dimulai dengan sub bagian II, yaitu

$$\frac{\partial^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{dy^2}u(x,y) = 0, \qquad (4)$$

dengan satu syarat batas tak homogen dan tiga syarat batas homogeny, yaitu

$$u(x,0) = f_2(x) \quad \text{dan} \quad u(x,b) = \ u(0,y) = \ u(a,y) = 0. \qquad (5)$$

Pandang solusi dalam bentuk perkalian

$$u(x,y) = X(x)Y(y), \qquad (6)$$

yang merupakan perkalian dua fungsi, masing-masing hanya tergantung pada satu variabel *x* dan y. Persamaan (6) diturunkan secara parsial dua kali, diperoleh:

$$\frac{\partial^2}{dx^2}u(x,y) = X"(x)\,Y(y) \ \text{ dan } \ \frac{\partial^2}{dy^2}u(x,y) = X\,(x)Y"(y). \qquad (7)$$

Subtitusi (7) ke (4), diperoleh $X"(x)\,Y(y) \ + \ X\,(x)Y"(y) = 0$. Selanjutnya, kedua ruas dibagi dengan *X*(*x*)*Y*(*y*) menjadi,

$$\frac{X"}{X} + \frac{Y"}{Y} = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{Y"}{Y} = -\frac{X"}{X}. \qquad (8)$$

Ekspresi di ruas kiri dan ruas kanan masing-masing hanya tergantung dari satu variabel, maka kedua ekspresi tersebut haruslah sama dengan sebuah konstanta *k*, dan diperoleh dua persamaan differensial parsial orde dua:

$$-\frac{X"}{X} = k \ \text{ atau } \ X" + kX = 0 \ \text{ dan } \ \frac{Y"}{Y} = k \ \text{ atau } \ Y" - kY = 0, \qquad (9)$$

yang memenuhi syarat-syarat batas dengan syarat-syarat batas (5). Tinjau persamaan berikut:

- $X" + kX = 0.$
  Jika $k \leq 0$, solusi trivial. Untuk $k > 0$, katakanlah $k = \mu^2 > 0$, persamaan differensial tersebut berbentuk $X" + \mu^2 X = 0$ dan persamaan karakteristiknya $\lambda^2 + \mu^2 = 0$, dengan akar-akar karakteristik $\lambda = i\mu$ dan $\lambda = -i\mu$, sehingga solusi persamaan tersebut adalah

$$\begin{aligned} X(x) &= Ae^{i\mu x} + Be^{-i\mu x} = A(\cos\mu x + i\sin\mu x) + B(\cos\mu x - i\sin\mu x) \\ &= (A+B)\cos\mu x + (iA - iB)\sin\mu x = c_1\cos\mu x + c_2\sin\mu x \quad (10) \end{aligned}$$

- $Y" - kY = 0.$
  Jika $k = \mu^2 > 0$, persamaan karakteristiknya adalah $\lambda^2 - \mu^2 = 0$, dengan akar-akar karakteristik $\lambda = \mu$ dan $\lambda = -\mu$, sehingga solusi persamaan tersebut adalah

$$Y(y) = C_1 e^{\mu y} + C_2 e^{-\mu y} \qquad (11)$$

$$= \left(\frac{A+B}{2}\right) e^{\mu y} + (\frac{A-B}{2}) e^{-\mu y} \; = \frac{A}{2}(e^{\mu y} + e^{-\mu y}) + \frac{B}{2}(e^{\mu y} - e^{-\mu y})$$
$$= A\left(\frac{e^{\mu y}+e^{-\mu y}}{2}\right) + B\left(\frac{e^{\mu y}-e^{-\mu y}}{2}\right) \; = A \cosh \mu y + B \sinh \mu y.$$

Aplikasikan syarat-syarat batas (5) ke dalam solusi (6), yaitu:

- $u(x, 0) = X(x)Y(0) = 0.$
  Jelas bahwa jika $X(x) = 0$, maka $u \equiv 0$, hal ini tidak menarik (karena masalah selesai sampai disini saja atau solusi menjadi trivial). Jadi pilih $X(x) \neq 0$, akibatnya $Y(0) = 0$.
- $u(0, y) = X(0)Y(y) = 0.$
  Dengan alasan serupa, jika $Y(y) = 0$, masalah selesai, jadi pilih $Y(y) \neq 0$, akibatnya $X(0) = 0$.
- $u(a, y) = X(a)Y(y) = 0$, dimana $Y(y) \neq 0$, akibatnya $X(a) = 0$.
  Jadi syarat-syarat batas untuk $X(x)$ dan $Y(y)$ adalah:
  $$X(0) = 0,\; X(a) = 0 \;\; dan \;\; Y(0) = 0. \qquad (12)$$

Aplikasikan syarat-syarat batas (12) ke dalam solusi (10) dan (11), yaitu

$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x$, memenuhi syarat-syarat batas:

- $X(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0\;, \Longrightarrow c_1 = 0.$
- $X(a) = c_1 \cos \mu a + c_2 \sin \mu a = 0$, karena $c_1 = 0 \Longrightarrow c_2 \sin \mu a = 0$. Agar solusi tak trivial, haruslah $c_2 \neq 0$. Akibatnya $\sin \mu a = 0$, tetapi $\mu a \neq 0$, maka $\mu a = n\pi$ sehingga $\mu = u_n = \frac{n\pi}{a}$. Jadi solusi untuk $X(x)$ adalah:

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{a} x\;. \qquad (13)$$

Dengan cara serupa, $(y) = A \cosh \mu x + B \sinh \mu x$, memenuhi syarat batas (12).

- $Y(0) = A \cosh 0 + B \sinh 0 = 0 \;\Longrightarrow A = 0$, sehingga solusi untuk $Y(y)$ adalah

$$Y(y) = B \sinh \frac{n\pi}{a} y\;. \qquad (14)$$

Karena diinginkan solusi dalam bentuk perkalian maka berdasarkan persamaan (6), (13), dan (14), diperoleh:

$$u(x, y) = f_2(x) = B_n \sin \frac{n\pi}{a} x \;\sinh \frac{n\pi}{a} y\;, \qquad (15)$$

yang merupakan fungsi dari *x* saja, dengan konstanta $B_n = c_2 B$. Berdasarkan prinsip superposisi, solusi umum dari sub II atau persamaan (4) yang memenuhi syarat-syarat batas (5), dapat dituliskan sebagai:

$$f_2(x) = u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{a} x \;\sinh \frac{n\pi}{a} y \qquad (16)$$

dengan

$$B_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_2(x) \sin \frac{n\pi}{a} x \, dx \qquad (17)$$

yang disebut koefisien deret Fourier. Perhitungannya koefisien B_n dilakukan sebagai berikut. Kalikan $\sin\frac{m\pi}{a}x$, (m bilangan bulat positif) pada kedua ruas persamaan (16) kemudian integralkan dari 0 sampai a:

$$\int_0^a f_2(x)\, sin\frac{m\pi}{a}x\, dx = \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ sin\frac{n\pi}{a}x\ sinh\frac{n\pi}{a}y\left(sin\frac{m\pi}{a}x\right)\, dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\ \ sinh\frac{n\pi}{a}y\int_0^a\ sin\frac{n\pi}{a}x\ sin\frac{m\pi}{a}x\ dx\ .$$

Dengan mengaplikasikan rumus jumlah sudut trigonometri:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos\,(n+m)\,x],$$

maka

$$\int_0^a f_2(x)\, sin\frac{m\pi}{a}x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, sinh\frac{n\pi}{a}y\int_0^a \frac{1}{2}\left[cos\left(\frac{n\pi}{a}-\frac{m\pi}{a}\right)x - cos(\frac{n\pi}{a}+\frac{m\pi}{a})x\right]\ dx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}B_n\, sinh\frac{n\pi}{a}y\left[\int_0^a cos\left(\frac{n\pi}{a}-\frac{m\pi}{a}\right)x\, dx - \int_0^a cos(\frac{n\pi}{a}+\frac{m\pi}{a})x\ dx\right],$$

dimana integral kedua di ruas kanan bernilai nol, sedangkan integral pertama ruas kanan juga bernilai nol ketika $n \neq m$, dan bernilai a jika $n = m$, $\forall\, n = 1,2,\cdots$.
Pilih $n = m$, integral pertama di ruas kanan menjadi

$$\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a}-\frac{m\pi}{a}\right) x\, dx = \int_0^a \cos 0\, dx = \int_0^a dx = a\ ,$$

dan diperoleh

$$\int_0^a f_2(x)\, sin(\frac{n\pi}{a}x)\, dx = (a)\left(\frac{1}{2}B_n\right)\ sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

Untuk $y = b$, (syarat batas tak homogen $u(x,b) = f_2(x)$) diperoleh

$$B_n = \frac{2}{a\, sinh\frac{n\pi b}{a}}\ \int_0^a f_2(x)\, sin\frac{n\pi}{a}x\, dx.$$

Perhitungan Solusi Masalah Dirichlet Sub-Bagian III

Tinjau masalah untuk sub bagian III, yaitu

$$\frac{\partial^2}{dx^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{dy^2}u(x,y) = 0, \tag{18}$$

dengan syarat batas:

$$u(0,y) = g_1(y)\ dan\ \ u(x,0) =\ u(x,b) = u(a,y) = 0. \tag{19}$$

Bentuk solusi yang diinginkan adalah

$$u(x,y) = X(x)Y(y). \tag{20}$$

Setelah didifferensialkan secara parsial dua kali dan disubtitusi pada problem (18), diperoleh dua persamaan diferensial parsial orde 2:

$$\frac{X"}{X} = \mu^2 \Leftrightarrow x" - \mu^2 x = 0, \tag{21}$$

dengan solusi $X(x) = A\, cosh\,\mu x + B\, sinh\,\mu x$. Dan

$$-\frac{Y''}{Y} = \mu^2 \Leftrightarrow Y'' + \mu^2 Y = 0, \quad (22)$$

dengan solusi $Y(y) = c_1 \cos \mu y + c_2 \sin \mu y$. Kedua solusi terakhir ini memenuhi syarat-syarat batas:

(a) $u(x,0) = X(x)Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$
(b) $u(x,b) = X(x)Y(b) = 0 \Rightarrow Y(b) = 0$
(c) $u(a,y) = X(a)Y(y) = 0 \Rightarrow X(a) = 0$

Aplikasikan syarat-syarat batas ini pada solusi $X(x)$ dan $Y(y)$, yaitu

(a) $Y(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 \Rightarrow c_1 = 0$
(b) $Y(b) = c_1 \cos \mu b + c_2 \sin \mu b = 0$, karena $c_1 = 0$, maka $c_2 \sin \mu b = 0$. Agar solusi tak singulir, haruslah $c_2 \neq 0$, akibatnya, $\sinh \mu b = 0$, akan tetapi $\mu b \neq 0$, maka $\mu b = n\pi$ atau $\mu = \mu_n = \frac{n\pi}{b}$, sehingga solusi $Y(y) = c_2 \sin \frac{n\pi}{b} y$.
(c) $X(a) = A \cosh \mu a + B \sinh \mu a = 0$

sehingga solusi (20) menjadi $u(x,y) = \left(A \cosh \frac{n\pi}{b} x + B \sinh \frac{n\pi}{b} x\right) c_2 \sin \mu y,\ c_2 \neq 0$.
Dengan menerapkan rumus jumlah sudut fungsi hiperbolik, diperoleh

$$u(x,y) = c_2 \left(A^* \cosh \frac{n\pi}{b}(a-x) + B^* \sinh \frac{n\pi}{b}(a-x)\right) \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

dengan *a* bilangan tertentu, yang memenuhi syarat batas $u(a,y) = 0$, yaitu

$$u(a,y) = \left(A^* \cosh \frac{n\pi}{b}(a-a) + B^* \sinh \frac{n\pi}{b}(a-a)\right) \sin \frac{n\pi}{b} y = 0$$

$$(A^*.1 + B^* 0) \sin \frac{n\pi}{b} y = 0 \Rightarrow A^* = 0 .$$

Jadi solusi persamaan (18) yang memenuhi syarat-syarat batas (19) adalah

$$g_1(y) = u_3(x,y) = C_n \sinh \frac{n\pi}{b}(a-x) \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

atau berdasar prinsip superposisi menjadi:

$$g_1(y) = u_3(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{b}(a-x) \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (23)$$

dengan

$$C_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g_1(y) \sin \frac{n\pi}{b} y \, dy. \quad (24)$$

Penurunan rumus untuk sub-bagian (i) dan (iv) diperoleh dengan cara serupa, terutama untuk sub bagian (iv), hanya mempertukarkan *a* dan *b* serta *x* dan *y*, sehingga diperoleh solusi (iv) dan (i) masing-masing adalah:

$$u_4(x,y) = g_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh \frac{n\pi}{b} x \sin \frac{n\pi}{b} y , \quad (25)$$

dengan

$$D_n = \frac{2}{b\, sinh\frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g_2(y)\, sin\frac{n\pi}{b} y\, dy,$$

$$u_1(x,y) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \; sin\frac{n\pi}{a} x \; sinh\frac{n\pi}{a}(b-y)\ , \tag{26}$$

dengan

$$A_n = \frac{2}{a\, sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_1(x)\, sin\frac{n\pi}{a} x\, dx\ .$$

Jadi solusi komplit dari masalah Dirichlet pada Gambar 1 adalah jumlah dari solusi sub-sub bagian yaitu:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \; \sin\frac{n\pi}{a} x \; \sinh\frac{n\pi}{a}(b-y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \; \sin\frac{n\pi}{a} x \; \sinh\frac{n\pi}{a} y \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \; \sinh\frac{n\pi}{b}(a-x) \sin\frac{n\pi}{b} y + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \; \sinh\frac{n\pi}{b} x \sin\frac{n\pi}{b} y \end{aligned} \tag{27}$$

dengan koefisin-koefisien

$$A_n = \frac{2}{a\, sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_1(x)\, sin\frac{n\pi}{a} x\, dx \;\; ; \;\; B_n = \frac{2}{a\, sinh\frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f_2(x)\, sin\frac{n\pi}{a} x\, dx$$

$$C_n = \frac{2}{b\, sinh\frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g_1(y)\, sin\frac{n\pi}{b} y\, dy \;\; ; \;\; D_n = \frac{2}{b\, sinh\frac{n\pi a}{b}} \int_0^b g_2(y)\, sin\frac{n\pi}{b} y\, dy$$

Daftar Pustaka

Kreyszig, E., 1983. *Advanced Enggineering Mathematics*. John Wiley & Sons Inc., New York.

Asmar, N., 2004. *Partial Differential Equation with Fourier Series*. Pearson-Prentice Hall, USA.

Kartono, 2001. *Maple untuk Persamaan Differensial*. J & J Learning, Yogyakarta.