J M S K
Jurnal Matematika, Statistika, & Komputasi
http://journal.unhas.ac.id/index.php/jmsk
Vol. 10, No. 2, 92-101, Januari 2014
ISBN:1858-1382

Identifikasi Faktor Signifikan pada Rancangan Faktorial Fraksional 2^4 dan 2^5

Fachrun Arifianto S., M. Saleh AF., Anisa

Abstrak

Rancangan faktorial dengan jumlah faktor yang besar cukup sulit diterapkan pada bidang industri, dikarenakan besarnya jumlah kombinasi perlakuan. Untuk mengatasi hal tersebut digunakan rancangan faktorial fraksional, dimana pada rancangan ini mengurangi jumlah kombinasi perlakuan. Pada penelitian ini, digunakan rancangan faktorial fraksional dua-level untuk tiap faktornya mempunyai taraf masing-masing dua. Selain itu, untuk menentukan faktor yang signifikan diantara beberapa faktor pada rancangan faktorial fraksional akan semakin sulit jika data yang diamati tanpa pengulangan. Hal tersebut disebabkan oleh tidak adanya rata-rata kuadrat error yang dapat diperoleh pada sebagian besar rancangan faktorial fraksional tanpa pengulangan. Untuk mengatasi hal tersebut, dalam penelitian ini metode lenth yang memberikan suatu analisis formal tentang bagaimana menentukan suatu faktor signifikan atau tidak dalam rancangan faktorial fraksional tanpa pengulangan.

Kata kunci : faktorial fraksional, faktorial fraksional dua-level, data tanpa pengulangan, metode Lenth

1. Pendahuluan

Pengertian rancangan percobaan (eksperimen) adalah suatu tes atau serangkaian tes dengan maksud mengamati dan mengidentifikasi perubahan-perubahan pada output respon yang disebabkan oleh perubahan-perubahan yang dilakukan pada variabel input dari suatu proses (Montgomery, 2005).

Eksperimen yang didasarkan pada rancangan faktorial, dimaksudkan untuk menentukan faktor mana diantara sejumlah faktor yang secara potensial memberikan efek pada respon. Namun, pada rancangan faktorial dengan jumlah faktor yang besar dan diikuti oleh jumlah kombinasi perlakuan yang besar, eksperimen menjadi tidak efisien untuk dilakukan. Sebagai contoh apabila digunakan rangcangan faktorial 2^k (dengan k adalah jumlah faktor dan 2 adalah taraf/level), maka akan dibutuhkan sebanyak 2^k unit eksperimen untuk satu ulangan. Hal ini membutuhkan, waktu, tenaga, dan dana yang cukup banyak. Untuk menurunkan jumlah kombinasi perlakuan, digunakan rancangan faktorial fraksional.

Kelemahan eksperimen tanpa pengulangan adalah tidak terdapat derajat bebas untuk mengestimasi σ^2, tidak ada *error* dalam setiap perlakuan, yang berakibat pada sulitnya melakukan interpretasi terhadap efek yang dimungkinkan berpengaruh dan semua yang berkaitan dengan rata-rata kuadrat untuk uji signifikan statistik. Dalam menaksir efek faktor yang signifikan dari rancangan faktorial fraksional tanpa pengulangan digunakan Metode Lenth. Lenth (1989) menggunakan nilai *margin of error* atau batas kesalahan, *simultan margin error* dan *pseudo sparsity of error* untuk menentukan faktor yang signifikan.[1]

[1,2,3] *Jurusan Matematika FMIPA Universitas Hasanuddin Makassar, Jl. Perintis Kemerdekaan Km.10 Makassar*

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk mengidentifikasi Faktor Signifikan pada Rancangan Faktorial Fraksional 2^{k-p}. Penelitian dibatasi pada masalah pada rancangan faktorial fraksional 2^4 dan 2^5. Penggunaan k faktor sama dengan empat dan lima dengan masing-masing fraksi $1/2$ *(one-half fraction)* dan fraksi $1/4$ *(one-fourth fraction).* Data yang digunakan adalah data tanpa pengulangan, dan metode yang digunakan ialah metode Lenth.

2. Tinjauan Pustaka

2.1 Rancangan Faktorial

Rancangan faktorial adalah rancangan yang menggunakan lebih dari satu faktor, dimana setiap taraf dari faktor dikombinasikan dengan taraf-taraf faktor lain (Halim, 1992). Pengaruh (efek) suatu faktor pada rancangan faktorial didefinisikan sebagai perubahan nilai respon yang disebabkan oleh perubahan taraf faktor.Adapun jenis–jenis dari efek faktorial, yaitu Pengaruh (efek) sederhana (Simple effects), Pengaruh utama (*Main effects*), dan Pengaruh interaksi (*Interaction effects*).

2.2 Rancangan Faktorial 2^k

Seringkali dalam suatu rancangan faktorial, ditemui kondisi di mana percobaan melibatkan *k* faktor dan setiap faktor terdiri atas 2 level. Rancangan dengan kondisi demikian disebut dengan rancangan faktorial 2^k. Misalnya sebuah rancangan percobaan yang terdiri atas faktor A dan B dimana masing-masing faktor tersebut terdiri atas dua buah taraf akan ditulis sebagai rancangan faktorial 2^2. contohnya pada rancangan faktorial 2^k yang paling sederhana yaitu rancangan faktorial 2^2 yang menghasilkan 4 kombinasi perlakuan yang dapat dilambangkan dengan A_0B_0 (1), A_1B_0 (*a*), A_0B_1*(b)*, A_1B_1*(ab)*. Jumlah dari perkalian tanda dalam kolom suatu efek dengan kombinasi perlakuan yang bersesuaian akan menghasilkan suatu kombinasi linear yang disebut kontras. Kontras dari suatu efek dapat juga diperoleh dengan cara sebagai berikut :

$$Kontras_{AB\dots K} = (a \pm 1)(b \pm 1)\dots(k \pm 1) \qquad (1)$$

Tanda *plus* dan *minus* $(\pm)$ dalam kurung akan dipilih *minus* jika faktor yang bersangkutan termasuk dalam kontras efek yang akan dihitung dan sebaliknya, akan dipilih *plus* jika faktor yang bersangkutan tidak termasuk dalam kontras efek yang akan dihitung. Sementara angka “1” pada hasil akhir penyelesaian persamaan (1) di atas menunjukkan kombinasi perlakuan (1). Selanjutnya, untuk menghitung estimasi efek sebagai berikut :

$$\widehat{AB\dots K} = \ell_{A\dots K} = \frac{1}{2^{k-1}} Kontras_{AB\dots K} \qquad (2)$$

(Montgomery, 2005).

2.3 Rancangan Faktorial Fraksional (FF)

Rancangan faktorial fraksional dilakukan jika peneliti dapat mengasumsikan bahwa interaksi orde tinggi (interaksi yang memuat lebih dari dua faktor) tertentu diabaikan, kemudian informasi efek utama dan interaksi orde rendah (interaksi yang memuat dua atau tiga faktor) dapat diperoleh dengan mengerjakan hanya sebagian dari rancangan faktorial lengkap, akibatnya akan ada faktor-faktor yang mempunyai sifat yang sama dengan faktor lainnya (Montgomery, 2005).

Dalam rancangan faktorial fraksional, karena hanya sebagian perlakuan yang dicoba, tidak seluruh kombinasi, maka ada sesuatu yang harus dibayar atau dikorbankan, sesuatu tersebut adalah pembauran (*confounding*) antar pengaruh.

2.4 Rancangan Faktorial Fraksional Dua-Level

Rancangan faktorial fraksional dengan dua taraf atau level dinotasikan dengan 2^{k-p}, yang artinya rancangan ini mencobakan hanya 2^{k-p} (dimana *k* adalah banyaknya factor dan *p* adalah banyaknya fraksi) kombinasi perlakuan dari seluruh 2^{k} kombinasi perlakuan lengkap (*full-factorial design*). Fraksi percobaan dapat diartikan sebagai seberapa besar proporsi total atau jumlah perlakuan yang akan dicobakan dalam rancangan faktorial fraksional. Struktur rancangan faktorial fraksional ditentukan oleh banyaknya faktor yang dicobakan dan fraksi percobaan yang digunakan. Dengan jumlah faktor dan fraksi tertentu, dapat dibentuk beberapa struktur rancangan faktorial fraksional yang berbeda.

2.4.1 Fraksi $1/2$ (*One – Half Fraction*) dari Rancangan 2^{k}

Jika dalam suatu percobaan tidak semua kombinasi perlakuan dapat dilakukan maka digunakan replikasi fraksional yang hanya melakukan sebagian atau setengah saja dari replikasi penuh. Fraksi yang dilakukan hanya $1/2$ bagian saja dari seluruh kombinasi perlakuan. Jadi secara umum rancangan faktorial fraksional ini dapat ditulis 2^{k-1}. Pada rancangan FF 2^{k-1} diperlukan generator sebanyak satu.

2.4.2 Fraksi $1/4$ (One-Quarter Fraction) dalam Rancangan faktorial 2^{k}

Untuk $p = 2$ dilakukan eksperimen faktorial fraksional seperempat dari rancangan faktorial 2^{k} atau biasanya ditulis dengan rancangan faktorial fraksional 2^{k-2}.
Untuk rancangan faktorial fraksional 2^{k-2} diperlukan 2 pembangkit (generator). Jika P dan Q adalah pembangkit yang dipilih maka I = P dan I = Q disebut pembangkit relasi (*generating relation*). Relasi penentu selengkapnya dapat dituliskan sebagai berikut : I = P = Q = PQ. Alias dari berbagai efek faktor diperoleh dari perkalian efek faktor tersebut dengan P, Q, dan PQ menggunakan relasi modulus 2. Jadi setiap pengaruh memiliki 3 alias.

2.4.3 Jenis Khusus Rancangan Fraksional Faktorial 2^{k}

Menurut Montgomery (2001), suatu rancangan dikatakan beresolusi R, jika tidak ada pengaruh *p*-faktor yang beralias dengan pengaruh – pengaruh yang mengandung lebih kecil dari $R - p$ faktor. Terdapat rancangan beresolusi III, IV dan V.

2.5 Penggunaan Metode Lenth pada Rancangan FF

Diberikan model rancangan faktorial fraksional untuk k variabel input

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\epsilon}$$

masing-masing faktor terdiri dari dua level dan pada tiap-tiap kombinasi perlakuan hanya dilakukan satu kali pengamatan. Hipotesis yang berkaitan dengan suatu faktor signifikan atau tidak dalam memberikan pengaruh terhadap variabel respon, dirumuskan sebagai berikut :

$$H_0 : \beta_i = 0 \,;\, H_1 : \beta_i \neq 0 \qquad i = 1,2,\ldots,k$$

Untuk menguji hipotesis tersebut, sebelum mengkonstruksi statistik uji terlebih dahulu ditentukan penaksir. Dalam metode Lenth, dikemukakan dua bentuk penaksir untuk mengidentifikasi kontras yang signifikan, yaitu penaksir awal dan penaksir akhir. Untuk hal tersebut digunakan definisi yang dikemukakan oleh Halaand dan O'Connell (1995) yaitu :

$$a_0(q) = \frac{1}{\Phi_0^{-1}(q)} \qquad (3)$$

dimana

$$\Phi_0^{-1}(q) = \Phi^{-1}\left(\frac{q+1}{2}\right)$$

dan Φ adalah fungsi distribusi kumulatif dari distribusi normal standar.

a. Estimasi Awal, s_0

Dengan menggunakan definsi tersebut, dapat diperoleh penaksir awal, s_0, dari metode Lenth sebagai berikut :

$$s_0(q) = 1{,}5\ x\ median\{|\hat{\beta}_i|\};\ \ i = 1{,}2, \dots, k \qquad (4)$$

b. Estimasi Akhir,

Untuk mendapatkan estimasi akhir dari metode Lenth, langkah selanjutnya adalah menentukan nilai $\hat{\sigma}_{PSE}$ -

$$\hat{\sigma}_{PSE} = 1{,}5\ x\ median\ |\hat{\beta}_i|\ (|\hat{\beta}_i| < 2.50);\quad i = 1{,}2, \dots, k$$

Pengujian hipotesis di bawah Ho :

$$\frac{\hat{\beta}_i}{se(\beta)} \sim t_k;\qquad i = 1{,}2{,}3, \dots, k \qquad (5)$$

dengan persamaan (3) sebagai estimasi varian Metode Lenth, sedemikian hingga statistik uji sebagaimana diberikan pada persamaan (5) menjadi :

$$t_{\hat{\sigma}_{PSE}} = \frac{|\hat{\beta}_i|}{\hat{\sigma}_{PSE}};\qquad i = 1{,}2{,}3, \dots, k$$

c. Batas Kesalahan (Margin Error (ME))

Untuk menentukan batas kesalahan dari metode Lenth, yaitu ME, terlebih dahulu ditentukan nilai kritis berdasar pemilihan α dan jumlah k. Untuk $\alpha = 0.05$, didapatkan batas kesalahan (*margin of error*) ditulis

$$ME = \hat{\sigma}_{PSE} \times\ t_{0.025;d} \qquad (6)$$

d. Batas Kesalahan Simultan, (Simultan Margin Error (SME))

SME dari metode Lenth dinyatakan sebagai berikut :

$$SME =\ t_{\gamma;d} \times \hat{\sigma}_{PSE} \qquad (7)$$

Batas kesalahan simultan (SME) merupakan statistik yang digunakan untuk menentukan apakah suatu faktor signifikan atau tidak, yaitu estimasi efek faktor yang lebih besar dari SME dinyatakan sebagai faktor yang signifikan. (Adnan Sauddin, 2006).

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Rancangan Faktorial Fraksional 2^4 dan 2^5 dengan Masing-Masing Fraksi $1/2$ dan $1/4$

Pada bagian ini akan dijelaskan langkah-langkah dalam membuat rancangan faktorial fraksional 2^4 dan 2^5 dengan masing-masing fraksi $1/2$ dan $1/4$.

3.2.1. Rancangan Faktorial 2^4 dan 2^5

Seperti yang dibahas pada bab 2 sebelumnya (bagian 2.2), sebelum membuat rancangan faktorial terlebih dahulu ditentukan pengaruh utama tiap-tiap faktor dan pengaruh interaksi faktor-faktor.

3.2.2. Rancangan FF 2^4 dengan Fraksi $1/2$

Untuk rancangan 2^4 dengan fraksi $1/2$, dapat dituliskan dalam bentuk 2^{4-1}. Maka jumlah kombinasi yang terbentuk adalah 8 kombinasi. Langkah pertama yang dilakukan adalah membentuk generator yang terbaik untuk rancangan ini.

Menurut Winarni, 2006 Sebelum kita membentuk generator, ada beberapa hal yang perlu kita perhatikan dalam membentuk generator yaitu :

- Generator yang dibentuk tidak hanya dengan satu huruf sehingga akan membentuk *defining relation* yang terdiri dari dua huruf. Hal ini dilakukan agar faktor utama tidak saling terpaut.
- Generator kedua yang dibentuk (untuk fraksi yang lebih kecil dari $\frac{1}{2}$) tidak melibatkan faktor pada generator pertama karena akan menghasilkan struktur yang sama dengan struktur yang lain.

Ada 4 generator yang terpilih selanjutnya kita akan mencari defining relation dan alias tiap generator untuk mendapatkan rancangan yang terbaik. Untuk generator D = AB, yang dimana untuk mendapatkan nilai faktor D dengan mengalikan faktor A dan faktor B, maka *defining relation* :

$$I = ABD$$

Untuk mendapatkan alias, kita kalikan faktor (faktor-faktor beserta interaksinya) dengan *defining relation*. Yang selatnjutnya diselesaikan dengan aljabar modulo 2. Sehingga faktor-faktor yang beralias sebagai berikut :

$$A = A.I = A.ABD = A^2BD = BD$$
$$\vdots$$
$$CD = CD.I = CD.ABD = ABCD^2 = ABC$$

Generator $D = AB$ ini kita sebut dengan rancangan I, selanjutnya dengan cara yang sama kita akan melakukan hal yang sama untuk generator yang lainnya. Selanjutnya kita akan memilih rancangan yang terbaik untuk rancangan FF 2^{4-1}. Pemilihan struktur rancangan berdasarkan kriteria rancangan terbaik memiliki dua kriteria yang harus dipenuhi, yaitu : 1. Resolusi maksimum, 2. *Minimum aberration* (Montgomery, 2005). Resolusi maksimum diberikan agar pengaruh faktor yang penting dapat diduga. Hal ini berkaitan dengan *clear effet*, yaitu pengaruh faktor penting yang tidak terpaut dengan pengaruh faktor penting lainnya. Rancangan dengan resolusi tinggi adalah rancangan terbaik karena semakin tinggi resolusi sebuah rancangan maka akan semakin banyak *clear effect*. Secara umum, resolusi dari sebuah rancangan sama dengan jumlah huruf terkecil pada *defining relation*. Pada rancangan yang memenuhi kriteria *minimum aberation, defining relation* terpendek merupakan penentu tingkat resolusi. Meminimumkan *defining relation* terpendek berarti meminimumkan banyaknya pengaruh interaksi tingkat rendah yang saling terpaut.

Dari kriteria pemilihan rancangan terbaik didapatkan resolusi maksimum dengan generator $D = ABC$. Selanjutnya ditentukan nilai taksiran pengaruh utama dan interaksi dua factor. Maka sesuai pada persamaan 1 dan 2, nilai taksiran pengaruh utama sebagai berikut :

$$\ell_A = 1/4(-(1) + ad - bd + ab - cd + ac - bc + abcd) \quad (8)$$
$$\ell_B = 1/4(-(1) - ad + bd + ab - cd - ac + bc + abcd) \quad (9)$$
$$\ell_C = 1/4(-(1) - ad - bd - ab + cd + ac + bc + abcd) \quad (10)$$
$$\ell_D = 1/4(-(1) + ad + bd - ab + cd - ac - bc + abcd) \quad (11)$$

Demikian pula halnya untuk pengaruh interaksi dua faktor yaitu :

$$\ell_{AB} = 1/4\big((1) - ad - bd + ab + cd - ac - bc + abcd\big) \quad (12)$$
$$\ell_{AC} = 1/4\big((1) - ad + bd - ab - cd + ac - bc + abcd\big) \quad (13)$$
$$\ell_{AD} = 1/4\big((1) + ad - bd - ab - cd + ac + bc + abcd\big) \quad (14)$$

Untuk nilai taksiran yang lainnya, baik interaksi dua faktor maupun interaski tiga faktor, nilainya taksirannya sama dengan taksiran pengaruh utama dan interaksi dua faktor diatas karena telah beralias atau dibaurkan dengan pengaruh utama dan interaksi dua faktor.

3.2.3. Rancangan FF 2^4 dengan Fraksi $1/4$

Untuk rancangan 2^4 dengan fraksi $1/4$, dapat dituliskan dalam bentuk 2^{4-2}. Maka jumlah kombinasi yang terbentuk adalah 4 kombinasi. Cara pengerjaan fraksi $1/4$ hampir sama dengan pengerjaan fraksi $1/2$. Bedanya, untuk rancangan faktorial fraksional 2^{k-2} diperlukan 2 pembangkit. Jika P dan Q adalah pembangkit yang dipilih maka I = P dan I = Q disebut pembangkit relasi (*generating relation*). Relasi penentu selengkapnya dapat dituliskan sebagai berikut : I = P = Q = PQ. Alias dari berbagai efek faktor diperoleh dari perkalian efek faktor tersebut dengan P, Q, dan PQ menggunakan relasi modulus 2. Jadi setiap pengaruh memiliki 3 alias. Untuk bentuk 2^{4-2}, mempunyai generator C dan D.

Dengan mengikuti syarat pemilihan generator, maka yang tersisa untuk generator $C = AB$ dan $D = AB$. Dengan demikian faktor C dan D menyebabkan pengaruh utama tertentu terpaut dengan pengaruh utama lain padahal faktor utama tersebut yang ingin diduga. Pendugaan terhadap kedua pengaruh faktor utama tersebut tidak dapat dilakukan karena kedua pengaruh utama saling terpaut. Sehingga untuk pengerjaan FF 2^{4-2} tidak dapat dilakukan.

3.2.4. Rancangan FF 2^5 dengan Fraksi $1/2$

Untuk rancangan 2^5 dengan fraksi $1/2$, dapat dituliskan dalam bentuk 2^{5-1}. Maka jumlah kombinasi yang terbentuk adalah 16 kombinasi. Sama halnya dengan 2^4 dengan fraksi $1/2$, terlebih dahulu dicari generator, defining relation, dan alias yang sesuai dengan rancangan. Selanjutnya dipilih rancangan terbaik dengan melihat resolusi maksimum dari tiap rancangan. Maka terpilihlah generator dengan $E = ABCD$ dengan *defining relation* $I = ABCDE$, karena mempunyai Rancangan resolusi V yang merupakan resolusi maksimum dari rancangan FF 2^{5-1}. Pada rancangan ini faktor utama dan pengaruh interaksi dua faktor adalah *clear effect*, yang artinya pengaruh faktor utama dan pengaruh interaksi dua faktor dapat diduga.

Maka sesuai pada persamaan 1 dan 2, nilai taksiran pengaruh utama sebagai berikut :

$$\ell_A = 1/8(-e + a - b + abe - c + ace - bce + abc - d + ade - bde + abd - cde + acd - bcd + abcde) \quad (15)$$

$$\ell_B = 1/8(-e - a + b + abe - c - ace + bce + abc - d - ade + bde + abd - cde - acd + bcd + abcde) \quad (16)$$

$$\ell_C = 1/8(-e - a - b - abe + c + ace + bce + abc - d - ade - bde - abd + cde + acd + bcd + abcde) \quad (17)$$

$$\ell_D = 1/8(-e - a - b - abe - c - ace - bce - abc + d + ade + bde + abd + cde + acd + bcd + abcde) \quad (18)$$

$$\ell_E = 1/8(e - a - b + abe - c + ace + bce - abc - d + ade + bde - abd + cde - acd - bcd + abcde) \quad (19)$$

Demikian pula halnya untuk pengaruh interaksi dua faktor yaitu :

$$\ell_{AB} = 1/8(e - a - b + abe - c + ace - bce + abc - d + ade - bde + abd - cde + acd - bcd + abcde) \quad (20)$$

$$\ell_{AC} = 1/8(e - a + b - abe - c + ace - bce + abc + d - ade + bde - abd - cde + acd - bcd + abcde) \quad (21)$$

$$\ell_{BC} = 1/8(e + a - b - abe - c - ace + bce + abc + ade - bde - abd - cde - acd + bcd + abcde) \quad (22)$$

$$\ell_{AD} = 1/8(e - a + b - abe + c - ace + bce - abc - d + ade - bde + abd - cde + acd - bcd + abcde) \quad (23)$$

$$\ell_{BD} = 1/8(e + a - b - abe + c + ace - bce - abc - d - ade + bde + abd - cde - acd + bcd + abcde) \quad (24)$$

$\ell_{CD} = 1/8(e + a + b + abe - c - ace - bce - abc - d - ade - bde - abd + cde + acd + bcd + abcde)$ (25)
$\ell_{AE} = 1/8(-e - a + b + abe + c + ace - bce - abc + d + ade - bde - abd - cde - acd + bcd + abcde)$ (26)
$\ell_{BE} = 1/8(-e + a - b + abe + c - ace + bce + abc - d + ade + bde - abd - cde + acd - bcd + abcde)$ (27)
$\ell_{CE} = 1/8(-e + a + b - abe - c + ace + bce - abc + d - ade - bde + abd + cde - acd - bcd + abcde)$ (28)
$\ell_{DE} = 1/8(-e + a + b - abe + c - ace - bce + abc - d + ade + bde - abd + cde - acd - bcd + abcde)$ (29)

Untuk nilai taksiran yang lainnya telah beralias atau dibaurkan dengan pengaruh utama dan interaksi dua faktor.

3.2.5. Rancangan FF 2^5 dengan Fraksi $1/4$

Rancangan faktorial fraksional 2^5 dengan fraksi $1/4$, biasa disebut rancangan FF 2^{5-2}. Pada rancangan ini memakai dua generator yaitu D dan E. Faktor D memiliki 4 kemungkinan generator dan faktor E juga memiliki 4 kemungkinan generator yang bisa dibentuk, dengan demikian maka ada $4 \times 4 = 16$ kemungkinan struktur rancangan yang bisa dibentuk. Seleksi pertama dengan melihat resolusi maksimum. Dari 16 rancangan hanya 12 rancangan yang mempunya resolusi III. Ini dilihat dari pengaruh faktor utama masing-masing rancangan yang beralias atau dibaurkan dengan interaksi dua faktor. Karena pada seleksi pertama tidak didapatkan rancangan terbaik maka dilanjutkan pada tahap seleksi kedua. Dan tahap seleksi kedua untuk memilih rancangan terbaik dapat dilihat pada *Minimum aberration.* Rancangan *minimum-aberration* (MA) adalah rancangan yang meminimalkan banyaknya kata dalam *defining relation* yang panjangnya minimum. Rancangan minimum aberration meminimalkan banyaknya interaksi tingkat rendah (dua faktor) yang saling berbaur atau beralias. Untuk banyaknya interaksi tingkat rendah (dua faktor) yang saling berbaur atau beralias pada ke-12 rancangan adalah sama yaitu 3. Maka *Minimum aberration* 12 rancangan sama, sehingga 12 rancangan ini dikatakan rancangan yang terbaik. Selanjutnya untuk pemilihan rancangan berdasarkan faktor-faktor yang ingin diidentufikasi, contohnya pada tugas akhir ini ingin diidentifikasi faktor siginifikan pada faktor utama A, B, C, D, dan E serta interaksi BC dan BE maka kita menggunakan generator $D = AB$ dan $E = AC$.

Maka sesuai persamaan 1 dan 2, nilai taksiran pengaruh utama sebagai berikut :

$$\ell_A = 1/4(-de + a - be + abd - cd + ace - bc + abcde)$$
$$\ell_B = 1/4(-de - a + be + abd - cd - ace + bc + abcde)$$
$$\ell_C = 1/4(-de - a - be - abd + cd + ace + bc + abcde)$$
$$\ell_D = 1/4(de - a - be + abd + cd - ace - bc + abcde)$$
$$\ell_E = 1/4(de - a + be - abd - cd + ace - bc + abcde)$$

Demikian pula halnya untuk pengaruh interaksi dua faktor yaitu :

$$\ell_{BC} = 1/4(de + a - be - abd - cd - ace + bc + abcde)$$
$$\ell_{BE} = 1/4(-de + a + be - abd + cd - ace - bc + abcde)$$

3.2. Penggunaan Metode Lenth pada Rancangan FF 2^4 dan 2^5

Metode lenth merupakan metode yang digunakan untuk menganalisa data faktorial tanpa pengulangan. Metode ini memiliki kemampuan yang baik dalam mendeteksi efek yang signifikan dalam data faktorial tanpa pengulangan. Pada tugas akhir ini metode lenth digunakan dalam sebuah contoh kasus faktorial fraksional 2^4 dan 2^5.

3.2.1. Metode Lenth pada kasus Rancangan FF 2^4

Pada kasus rancangan FF 2^4 , data yang digunakan adalah, panjang tanaman kacambah kacang ijo (cm) yang merupakan variabel respon dan adapun faktor-faktor yang mempengaruhi yaitu media tumbuh (*A*), cahaya (*B*), Frekuensi Penyiraman *(C)*, kadar Air (*D*). Pada kasus ini ingin diketahui faktor-faktor mana saja yang signifikan mempengaruhi panjang tanaman kecambah. Untuk FF 2^4 fraksi yang akan digunakan adalah fraksi $\frac{1}{2}$ dengan generator $D = ABC$ dan jumlah run 8 dengan model sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \ \beta_{14} x_1 x_4 + \varepsilon$$

Pengujian dengan menggunakan metode klasik tidak memungkinakan untuk mendapatkan faktor-faktor yang signifikan mempengaruhi variabel respon, hal ini dikarenakan tidak adanya nilai dari jumlah kuadrat error. Tanda (**) yang muncul pada tabel anova disebabkan oleh tidak adanya pengulangan untuk tiap kombinasi perlakuan dan derajat bebas *error* adalah 0. Untuk itu pengujian selanjutnya menggunakan metode lenth. Dengan hipotesa sebagai berikut :

$H_0 = \beta_i = 0$; $H_1 = \beta_i \neq 0$ dimana $i = 1,2,3, \dots .7$

Untuk mendapatkan nilai estimasi awal s_0, terlebih dahulu dicari nilai taksiran pengaruh faktor utama dan interaksi yang diberikan pada persamaan 9 sampai 15. Adapun nilai taksirannya setelah dimutlakkan dan diurutkan dari yang terbesar ke yang terkecil:

AC	0,325	AB	0,975	B	15,325
AD	0,475	A	4,625		
D	0,625	C	5,325		

Median dari nilai yang telah diurutkan adalah 0,975. Maka didapatkan nilai estimasi awal s_0 sesuai pada persamaan 4 yaitu :

$$s_0 = 1{,}5\ x\ median\{|\hat{\beta}_i|\} = 1{,}5\ x\ 0{,}975 = 1{,}4625$$

Untuk menghilangkan nilai pengaruh-pengaruh yang lebih besar daripada s_0, maka s_0 ditingkatkan 2,5 kali dari semula untuk mendapatkan nilai median $|\hat{\beta}_i| < 2{,}5 s_0$.

$$2{,}5 \times 1{,}4625 = 3{,}65625$$

Maka didapatkan nilai estimasi akhir $\hat{\sigma}_{PSE}$ sesuai persamaan 5 yaitu

$$\hat{\sigma}_{PSE} = 1{,}5\ x\ median\ |\hat{\beta}_i|_{|\hat{\beta}_i|<2{,}5s_0} = 1{,}5 \times |(0{,}475 + 0{,}625)/2| = 0{,}825$$

Dengan nilai $d = 7/3 = 2{,}33$ (lihat tabel distribusi-t), sehingga nilai margin error (ME) sesuai persamaan 2.7 yaitu :

$$ME = \hat{\sigma}_{PSE} \times\ t_{0.025;d} = 0{,}825 \times 3{,}76 = 3{,}102$$

dan nilai simultan margin error (SME) sesuai persamaan 8 yaitu :

$$SME =\ t_{\gamma;d} \times \hat{\sigma}_{PSE} = 9{,}01 \times 0{,}825 = 7{,}932$$

Untuk menyatakan faktor yang signifikan dari metode lenth adalah nilai taksiran pengaruh utama dan interaksi yang lebih besar dari SME, faktor tersebut adalah cahaya (B). Sehingga H_0 ditolak dan H_1 diterima.

3.2.2. Metode Lenth pada kasus Rancangan FF 2^5

Pada kasus rancangan FF 2^5 , data yang digunakan adalah, panjang tanaman kacambah (cm) yang merupakan variabel respon dan adapun faktor-faktor yang mempengaruhi sama dengan pada kasus rancanagan FF 2^4 yaitu Media Tumbuh (*A*), Cahaya (*B*), Frekuensi Penyiraman *(C)*, kadar Air (*D*) dan ditambahkan satu faktor yaitu Kelembapan (*E)*. Untuk FF 2^5 fraksi yang akan digunakan adalah fraksi $\frac{1}{2}$. Pada fraksi $\frac{1}{2}$ digunakan generator $E = ABCD$ dan jumlah run 16 dengan model sebagai berikut :

$$\boldsymbol{y} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_4 x_4 + \beta_{12} x_1 x_2 + \qquad \beta_{13} x_1 x_3 + \cdots + \varepsilon$$

Pengujian dengan menggunakan metode klasik (Anova) tidak memungkinakan untuk mendapatkan faktor-faktor yang signifikan mempengaruhi variabel respon, hal ini dikarenakan tidak adanya nilai dari jumlah kuadrat error. Kasus ini sama dengan rancangan FF 2^4, dikarenakan data yang digunakan tanpa pengulangan sehingga derajat bebas *error* adalah 0. Pengujian selanjutnya menggunakan metode lenth, dengan hipotesa sebagai berikut :

$$H_0 = \beta_i = 0;\ \ H_1 = \beta_i \neq 0 \text{ dimana } i = 1,2,3, \dots .15$$

Untuk mendapatkan nilai estimasi awal s_0, terlebih dahulu dicari nilai taksiran pengaruh faktor utama dan interaksi yang diberikan pada persamaan 21 sampai 29. Adapun nilai taksirannya setelah dimutlakkan dan diurutkan dari yang terbesar ke yang terkecil :

BC	0,231	BD	0,556	AB	2,019
AE	0,356	D	0,731	AD	2,481
DE	0,419	BE	1,069	C	4,144
AC	0,506	E	1,394	A	4,944
CD	0,519	CE	2,806	B	16,869

Median dari nilai yang telah diurutkan adalah 1,069. Maka didapatkan nilai-nilai dari metode lenth sebagai berikut :

$$s_0 = 1,5\ x\ median\{|\hat{\beta}_i|\} = 1,5\ x\ 1,069 = 1,604$$

$$2,5\ \times\ 1,604 = 4,01$$

$$\hat{\sigma}_{PSE} = 1,5\ x\ median\ |\hat{\beta}_i|_{|\hat{\beta}_i|<2,5s_0} = 1,5 \times |(0,556 + 0,731)/2| = 0,965$$

Dengan nilai $d = \frac{15}{3} = 5$ (lihat tabel distribusi-t), sehingga nilai margin error (ME) sesuai persamaan 2.7 yaitu :

$$ME = \hat{\sigma}_{PSE} \times\ t_{0.025;d} = 0,965 \times 2,57 = 2,481$$

dan nilai simultan margin error (SME) sesuai persamaan 8 yaitu :

$$SME =\ t_{\gamma;d} \times \hat{\sigma}_{PSE} = 0,965 \times 5,22 = 5,037$$

Untuk menyatakan faktor yang signifikan dari metode lenth adalah nilai taksiran pengaruh utama dan interaksi yang lebih besar dari SME, faktor tersebut adalah cahaya (B) dan interaksi antara cahaya dan kelembapan (BE). Sehingga H_0 ditolak dan H_1 diterima.

5. Kesimpulan dan Saran

5.1. Kesimpulan

Dari hasil pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Rancangan Faktorial Fraksional (FF) digunakan untuk mengurangi jumlah kombinasi pada rancangan faktorial dan bertujuan untuk memberikan informasi penting tentang pengaruh utama dan pengaruh interaksi dua faktor yang berpengaruh pada variabel respon dimana melibatkan banyak *k* faktor. Hal ini memberikan efisiensi biaya dan waktu.
2. Pemilihan rancangan terbaik berdasarkan resolusi maksimum dan *minimum abberation*.
3. Metode Lenth baik digunakan untuk mengidentifikasi faktor yang signifikan pada data tanpa pengulangan. Adapun faktor signifikan yang diperoleh sebagai berikut:
   - Untuk rancanagan FF 2^{4-1}, faktor signifikan yaitu Cahaya *(B)*
   - Untuk rancanagan FF 2^{5-1}, faktor signifikan yaitu Cahaya *(B)* dan interaksi antara Cahaya (*B*) dan Kelembapan (*E*).

   Dari hasil tersebut dapat dilihat bahwa faktor Cahaya (*B*) mempunyai pengaruh yang signifikan terhadap pertumbuhan panjang tanaman kecambah kacang ijo (cm).

5.2. Saran

Dalam rancangan faktorial fraksional yang telah dibahas, ada baiknya menggunakan faktor yang lebih besar untuk mengidentifikasi faktor yang signifikan pada rancanagan tersebut. Dan menggunakan metode lenth untuk menguji faktor signifikan pada faktorial lengkap (*full factorial*).

DAFTAR PUSTAKA

[1] Halim, Citra.1992. "Replikasi Fraksional dalam Eksperimen 2^k". Jurusan [1]Matematika, UNHAS

[2] Halaand, D.P dan O'Connell, M.A."Inference for Effect-Saturated Fractional Factorials".*Statistics Sinica 3*, pp 209-217

[2] Lenth, R.V.1989."Quick and Easy Analysis of Unreplicated Factorial". *Technometrics 31,* pp 469-473.

[4] Mattjik, Ahmad A. dan Sumertajaya, Made. "Perancangan percobaan jilid 1". Intstitut Pertanian Bogor (IPB), Bogor.

[5] Montgomery, D.C.2005. " Design and Analysis of Experiment 5th Edition".John Wiley & Sons Inc., New York

[6] Nurhayati, Nunung. 2008. "Biologi Bilingual untuk SMA/MA Kelas XII Semester 1 dan 2". Yrama Widya, Bandung.

[7] Sartono, Bagus.2008."Rancangan Faktorial Pecahan".JurusanStatistika, IPB.

[8] Sauddin, A. 2006." Identifikasi Faktor Signifikan Rancangan Faktorial Fraksional Tanpa Pengulangan dengan Metode Bissell, Lenth, dan Fang". Jurusan Statistika, ITS.

[9] Winarni, Sri. 2006. "Kajian pada Rancangan Frfactional Factorial dan Fractional Factorial Split-Plot". Jurusan Statistika, IPB.