

MODEL PERTUMBUHAN EKONOMI ANTAR KELOMPOK DAN SIMULASINYA

A. L. HERLIANI¹⁾, E. H. NUGRAHANI²⁾, DAN D. C. LESMANA²⁾

¹⁾Mahasiswa Program S2 Matematika Terapan
Sekolah Pascasarjana, IPB
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

²⁾Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, IPB
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

Abstract : Domar's economic growth model only considers capital as primary variable for production function. On the other hand, Solow's economic growth model has added the labor as variable in the production function. The aim of this paper is to study distribution model of economic growth among groups in two regions proposed by Zhang (2005). This model considers human capital productivity as one of parameters of the production function. It has been shown that the dynamical system has a unique equilibrium. Therefore, the changes of human capital and propensity to save will influence total capital stocks and capital stocks in each group. Analytically, it is found that an increase in human capital and propensity to save will increase total capital stocks and capital stocks in each group.

Keywords: economic growth model, human capital productivity, propensity to save, equilibrium.

1. PENDAHULUAN

Model pertumbuhan ekonomi yang dikemukakan oleh Domar pada tahun 1946 yang menyatakan bahwa *output* (produksi) secara eksplisit merupakan fungsi dari modal/*capital* saja tanpa memasukkan variabel tenaga kerja/*labor*. Hal ini terjadi karena tenaga kerja selalu dikombinasikan dengan modal dalam proporsi yang tetap. Solow pada tahun 1956 merevisi model pertumbuhan Domar dengan memasukkan tenaga kerja sebagai variabel, artinya bahwa tenaga kerja dapat dikombinasikan dengan modal dalam berbagai proporsi. Model pertumbuhan ini dikenal sebagai model pertumbuhan neoklasik Solow (Chiang & Wainwright, 2005).

Tahun 1990an Lucas dan Mankiw, Romer, dan Weil merevisi teori pertumbuhan neoklasik Solow dengan menambahkan teori modal manusia

(*human capital*) sebagai faktor produksi. Namun kesemuanya itu masih menekankan sebatas aspek keterampilan, keahlian, serta pengetahuan teknis yang terdapat pada tenaga kerja. Mereka hanya menganggap modal manusia sebagai penentu pertumbuhan ekonomi, bukan sebagai tujuan dari pembangunan.

Dalam karya ilmiah ini akan dikaji model distribusi pertumbuhan ekonomi antarkelompok pada dua daerah, seperti yang diajukan oleh Zhang (2005). Pada model ini, modal manusia (*human capital*) dimasukkan dalam fungsi produksi sebagai parameter pengukur produktivitas manusia. Diasumsikan kedua kelompok pada masing-masing daerah memiliki modal manusia (*human capital*) dan fungsi utilitas (*utility functions*) yang berbeda, dan diasumsikan pula tidak ada migrasi di antara kedua daerah.

Adapun karya ilmiah ini bertujuan untuk mengkaji model distribusi pertumbuhan ekonomi antarkelompok pada dua daerah, seperti yang diajukan oleh Zhang (2005) dan menentukan solusi ekuilibrium dari model tersebut.

Peranan Modal Manusia (*human capital*) dalam Pertumbuhan Ekonomi

Konsep modal manusia secara sederhana dapat diartikan sebagai modal yang terdapat dalam diri manusia untuk mencapai kesejahteraannya. Dua unsur utama modal manusia adalah kesehatan dan pendidikan (Bank Dunia 2007). Keduanya saling terkait satu dengan yang lainnya.

Pembentukan modal manusia merupakan suatu proses untuk memperoleh dan meningkatkan jumlah orang yang mempunyai keahlian, pendidikan, dan pengalaman yang menentukan bagi pertumbuhan ekonomi suatu negara. Pembentukan modal manusia dikaitkan dengan investasi pada manusia dan pengembangannya sebagai suatu sumber yang kreatif dan produktif. Hal ini juga berkaitan dengan pengembangan sumber daya manusia dan perencanaan tenaga kerja yang mengacu kepada pengembangan jangka panjang kebutuhan tenaga kerja terdidik bagi perekonomian (Jhingan, 1983).

2. MODEL-MODEL PERTUMBUHAN EKONOMI

2.1. Model Pertumbuhan Ekonomi Domar: Dalam model pertumbuhan ekonomi Domar, ekuilibrium didefinisikan sebagai situasi di mana faktor-faktor produksi digunakan sepenuhnya. Oleh karena itu untuk mencapai ekuilibrium diperlukan permintaan agregat yang tepat sama dengan *output* potensial yang dapat dihasilkan dalam satu tahun, yaitu $Y = \kappa$. Akan tetapi, bila sejak awal dimulai dari situasi ekuilibrium, persyaratannya akan berkurang menjadi menyeimbangkan perubahan kapasitas dan permintaan agregat (Chiang & Wainwright, 2005), yaitu

$$\frac{dY}{dt} = \frac{d\kappa}{dt}. \quad (1)$$

2.2. Model Pertumbuhan Ekonomi Solow: Dalam model pertumbuhan neoklasik Solow (1956), tenaga kpg. 69 dan tenaga kerja dapat dikombinasikan dalam berbagai proporsi. Fungsi produksi model pertumbuhan ekonomi Solow ditunjukkan dengan persamaan berikut:

$$Y = F(K, L) \quad (K, L > 0) \quad (2)$$

dengan Y adalah *output* (setelah penyusutan), K adalah modal, dan L adalah tenaga kerja, yang semuanya digunakan dalam pengertian makro. Diasumsikan bahwa F_K dan F_L adalah positif (produk marginal yang positif), serta F_{KK} dan F_{LL} adalah negatif. Sedangkan fungsi produksi F yang digunakan adalah homogen secara linear, sehingga dapat ditulis:

$$Y = LF\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L\phi(k) \quad (3)$$

dengan $k \equiv \frac{K}{L}$. Karena Y bergantung pada K dan L , maka untuk menentukan kedua variabel, Solow berasumsi bahwa:

$$\dot{K} \equiv \frac{dK}{dt} = sY \quad (4)$$

$$\frac{\dot{L}}{L} \equiv \frac{dL/dt}{L} = n. \quad (5)$$

Simbol s menggambarkan kecenderungan menabung marginal (konstan), dan n adalah laju pertumbuhan tenaga kerja (konstan). Dengan memperhatikan asumsi tersebut bisa dilihat bahwa persamaan (4) dan (5) tidak menjelaskan bagaimana tingkat K dan L ditentukan, tetapi menjelaskan penentuan tingkat perubahan K dan L .

Persamaan (3), (4), dan (5) merupakan model yang lengkap. Untuk memecahkan model ini, pertama akan disederhanakan menjadi satu persamaan dalam satu variabel, yaitu dengan menyubstitusikan persamaan (3) ke dalam (4) sehingga diperoleh:

$$\dot{K} = sL\phi(k). \quad (6)$$

Karena $k = \frac{K}{L} \Leftrightarrow K = kL$, maka dengan mendiferensialkan $K = kL$ dan dengan menggunakan persamaan (5), diperoleh:

$$\dot{K} = L\dot{k} + k\dot{L} = L\dot{k} + knL. \quad (7)$$

Dari persamaan (6), (7), dan dengan menghilangkan L , maka akan diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\dot{k} = s\phi(k) - nk. \quad (8)$$

Persamaan (8) merupakan persamaan dasar dari model pertumbuhan ekonomi Solow, yang merupakan persamaan diferensial dari variabel k , dengan dua parameter s dan n .

2.3. Ekuilibrium: Ekuilibrium adalah suatu kumpulan variabel-variabel terpilih yang saling berhubungan (*interrelated*) dan disesuaikan satu dengan yang

lainnya dengan cara sedemikian rupa, sehingga tidak ada kecenderungan yang melekat (*inherent*) dalam model tersebut untuk berubah (Chiang & Wainwright, 2005).

Pernyataan terpilih menunjukkan kenyataan ada variabel yang tidak dimasukkan ke dalam model, sehingga apabila modelnya diperluas dengan memasukkan variabel tambahan maka ekuilibrium pada model semula tidak dapat digunakan lagi. Pernyataan saling berhubungan menunjukkan bahwa untuk dapat mencapai ekuilibrium, semua variabel dalam model harus secara bersamaan dalam keadaan tetap. Sedangkan pernyataan melekat menunjukkan bahwa dalam mendefinisikan ekuilibrium keadaan tetap variabel dalam model hanya didasarkan pada penyeimbangan kekuatan internal dari model tersebut, sedangkan faktor-faktor eksternal dianggap tetap.

Pada intinya, ekuilibrium untuk suatu model tertentu adalah suatu keadaan yang mempunyai ciri tidak adanya kecenderungan untuk berubah atau suatu keadaan yang ideal.

4. MODEL DISTRIBUSI PERTUMBUHAN EKONOMI ANTAR KELOMPOK PADA DUA DAERAH

4.1. Asumsi, Definisi, dan Fungsi: Misalkan sebuah sistem ekonomi terdiri atas dua daerah, masing-masing dinotasikan dengan indeks 1 dan 2, dan memproduksi sejumlah barang yang homogen. Barang tersebut diproduksi dengan menggunakan dua faktor produksi yaitu tenaga kerja dan modal. Masing-masing daerah memiliki dua kelompok dengan indeks 1 dan 2. Pada model ini diasumsikan kedua kelompok pada masing-masing daerah memiliki modal manusia (*human capital*) dan fungsi utilitas (*utility functions*) yang berbeda, dan diasumsikan pula tidak ada migrasi di antara kedua daerah (Zhang, 2005).

Untuk menggambarkan model tersebut, didefinisikan:

$L(t)$ = banyaknya tenaga kerja keseluruhan pada waktu t ;

$L_j(t)$ = banyaknya tenaga kerja daerah j pada waktu t ;

$L_{jk}(t)$ = banyaknya tenaga kerja pada kelompok k di daerah j pada waktu t ,
 $k = 1, 2$;

$K(t)$ = cadangan modal keseluruhan pada waktu t ;

$K_j(t)$ = total cadangan modal daerah j pada waktu t ;

$K_{jk}(t)$ = cadangan modal yang dimiliki oleh kelompok k di daerah j pada waktu t ;

$E(t) > (<) 0$ = cadangan modal daerah 2 (1) yang digunakan oleh daerah 1 (2) pada waktu t ;

$F_j(t)$ = banyaknya *output* daerah j pada waktu t ;

z_{jk} = produktivitas manusia pada kelompok k di daerah j ;

$r(t)$ = suku bunga pada waktu t ;

$w_{jk}(t)$ = tingkat upah untuk kelompok k di daerah j pada waktu t ;

$Y_{jk}(t)$ = pendapatan bersih kelompok k di daerah j pada waktu t ;

$C_{jk}(t)$ = tingkat konsumsi kelompok k di daerah j pada waktu t ;

$S_{jk}(t)$ = tingkat tabungan bersih kelompok k di daerah j pada waktu t .

Fungsi produksi dari dua daerah adalah:

$$F_1(t) = (K_1 + E)^\alpha L_1^\beta, \quad F_2(t) = (K_2 - E)^\alpha L_2^\beta \quad (9)$$

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha, \beta > 0$$

dengan:

$$K_j = K_{j1} + K_{j2}, \quad K = K_1 + K_2,$$

$$L_j = z_{j1}L_{j1} + z_{j2}L_{j2}, \quad L = L_1 + L_2, \quad j = 1, 2 \quad (10)$$

dengan $K_1 + E$ dan $K_2 - E$ berturut-turut adalah cadangan modal yang digunakan oleh daerah 1 dan 2. Parameter z_{jk} merupakan parameter yang mengukur produktivitas manusia pada kelompok k di daerah j , dan untuk menyederhanakan dalam menganalisis model diasumsikan bahwa z_{jk} adalah konstan. Dengan asumsi bahwa tingkat suku bunga besarnya sama pada kedua daerah sedangkan tingkat upah dapat berbeda di antara masing-masing kelompok pada dua daerah, maka kondisi marjinal diberikan oleh,

$$r = \frac{\alpha F_1}{K_1 + E} = \frac{\alpha F_2}{K_2 - E}, \quad w_{jk} = \frac{\beta z_{jk} F_j}{L_j}. \quad (11)$$

Pendapatan bersih kelompok k di daerah j , Y_{jk} merupakan penjumlahan dari faktor-faktor produksi dalam perekonomian, yaitu tenaga kerja dan modal yang dinyatakan dengan

$$Y_{jk} = rK_{jk} + w_{jk}L_{jk}. \quad (12)$$

Diasumsikan bahwa tingkat utilitas (*utility level*), $U_{jk}(t)$, pada kelompok k di daerah j bergantung pada tingkat konsumsi $C_{jk}(t)$ dan tabungan bersih $S_{jk}(t)$. Fungsi utilitas (*utility functions*), $U_{jk}(t)$, diberikan oleh persamaan

$$U_{jk}(t) = C_{jk}^{\xi_{jk}} S_{jk}^{\lambda_{jk}}, \quad \xi_{jk} + \lambda_{jk} = 1, \quad (13)$$

dengan ξ_{jk} dan λ_{jk} berturut-turut adalah kecenderungan pada kelompok k di daerah j untuk mengonsumsi barang-barang dan untuk menabung.

Masing-masing daerah mempunyai dua variabel keputusan, C_{jk} dan S_{jk} . Kendala pembiayaan diberikan oleh:

$$C_{jk} + S_{jk} = T_{jk} \quad j, k = 1, 2, \quad (14)$$

dengan

$$T_{jk} = Y_{jk} + K_{jk} - \delta K_{jk} \quad (15)$$

dan δ adalah laju depresiasi kapital, $0 \leq \delta \leq 1$.

Keputusan optimal konsumen yang merupakan solusi dari optimasi fungsi utilitas dengan kendala (14) adalah tunggal, yaitu:

$$C_{jk} = \xi_{jk} T_{jk}, \quad S_{jk} = \lambda_{jk} T_{jk} \quad j, k = 1, 2. \quad (16)$$

Akumulasi modal kelompok k di daerah j diberikan oleh

$$\dot{K}_{jk} = S_{jk} - K_{jk}.$$

Dengan menggunakan persamaan (15) dan (16) ke dalam persamaan di atas, diperoleh

$$\dot{K}_{jk} = \lambda_{jk} Y_{jk} - \delta_{jk} K_{jk} \quad (17)$$

dengan

$$\delta_{jk} = \xi_{jk} + \delta \lambda_{jk}$$

yang merupakan persamaan dari model distribusi pertumbuhan ekonomi antarkelompok pada dua daerah, seperti yang diajukan oleh Zhang (2005).

Sistem ini terdiri atas 30 variabel endogen, K_{jk} , C_{jk} , S_{jk} , Y_{jk} , w_{jk} , U_{jk} ($j, k = 1, 2$), K_1 , K_2 , F_1 , F_2 , E , dan r .

Untuk menentukan variabel-variabel endogen tersebut, langkah pertama adalah dengan menyubstitusikan persamaan (9) ke dalam persamaan berikut

$$r = \frac{\alpha F_1}{K_1 + E} = \frac{\alpha F_2}{K_2 - E},$$

sehingga diperoleh E yang merupakan sebuah fungsi dari K_1 dan K_2 sebagai berikut

$$E(t) = \frac{L_1 K_2 - L_2 K_1}{L}. \quad (18)$$

Dengan menyubstitusikan persamaan (11), (9), dan (18) ke dalam persamaan (12), maka akan diperoleh persamaan Y_{jk} , yaitu

$$Y_{jk} = \frac{\alpha L K_{jk} / K + \beta z_{jk} L_{jk}}{L^\alpha} K^\alpha,$$

(19)

yang merupakan sebuah fungsi dari K_{jk} . Dari persamaan (19) dan (17) dinamika keempat variabel $K_{jk}(t)$ ditentukan oleh sistem persamaan diferensial empat dimensi.

$$\dot{K}_{jk} = \lambda_{jk} Y_{jk} (K_{jk}) - \delta_{jk} K_{jk}. \quad (20)$$

4.2. Ekuilibrium Sistem Dinamik: Selanjutnya akan ditentukan syarat keberadaan ekuilibrium dari sistem dinamik, yaitu persamaan diferensial (20).

Ekuilibrium terjadi pada saat $\frac{dK_{jk}}{dt} = \dot{K}_{jk} = 0$, sehingga dari persamaan (19),

(20), dan pada saat ekuilibrium, maka diperoleh

$$Y_{jk} = \frac{\alpha L K_{jk} / K + \beta z_{jk} L_{jk}}{L^\alpha} K^\alpha = \frac{\delta_{jk} K_{jk}}{\lambda_{jk}}.$$

(21)

Dengan menyubstitusikan $Y_{jk} = \frac{\delta_{jk} K_{jk}}{\lambda_{jk}}$ dari persamaan (21) dan persamaan (15)

ke persamaan (16) menghasilkan:

$$C_{jk} = \frac{\xi_{jk}}{\lambda_{jk}} K_{jk}, \quad S_{jk} = K_{jk} \cdot \tag{22}$$

Persamaan tersebut menjelaskan bahwa pada saat ekuilibrium, tingkat konsumsi kelompok k di daerah j adalah proporsional dengan cadangan modal yang dimiliki oleh kelompok k di daerah j , dan tingkat tabungan bersih kelompok k di daerah j adalah sama dengan cadangan modal yang dimiliki oleh kelompok k di daerah j .

Dengan menyubstitusikan persamaan (22) ke dalam fungsi utilitas (13) diperoleh

$$U_{jk}(t) = \left(\frac{\xi_{jk}}{\lambda_{jk}} K_{jk} \right)^{\xi_{jk}} (K_{jk})^{\lambda_{jk}}. \tag{23}$$

Untuk menentukan K_{jk} pada saat ekuilibrium, dengan menggunakan persamaan (21), diperoleh persamaan

$$K_{jk} = \frac{\beta z_{jk} L_{jk} K}{(\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha) L},$$

(24) yang merupakan fungsi dari K . Karena $K_{jk} \geq 0$, dari persamaan (24) diperoleh

$$K \geq K_0 \equiv \min_{jk} \left\{ \left(\frac{\alpha \lambda_{jk}}{\delta_{jk}} \right)^{1/\beta} L, \text{ dengan } j, k = 1, 2 \right\} > 0. \tag{25}$$

Dengan menggunakan persamaan (24) dan persamaan

$$\sum_{jk} K_{jk} = K,$$

maka diperoleh

$$H(K) \equiv \frac{L}{\beta} - \sum_{jk} \frac{z_{jk} L_{jk}}{\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha}. \tag{26}$$

Karena $H(K_0) < 0$, $\lim_{K \rightarrow \infty} H(K) > 0$ dan $\frac{dH}{dK} = H' > 0$ untuk $K_0 < K < \infty$, maka persamaan,

$$H(K) = 0, \quad K_0 < K < \infty,$$

mempunyai sebuah solusi tunggal. Artinya bahwa cadangan modal keseluruhan, K ditentukan secara tunggal. Persamaan di atas dibuktikan dengan menggunakan Teorema Nilai Antara yang menyatakan bahwa jika fungsi f kontinu pada selang tertutup $[a, b]$ dan N adalah bilangan di antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f(c) = N$. Karena $H' > 0$, maka fungsi tersebut merupakan fungsi naik sehingga persamaan $H(K) = 0$, $K_0 < K < \infty$ mempunyai sebuah solusi tunggal. Karena cadangan modal keseluruhan (K) tunggal maka cadangan modal masing-masing kelompok pada setiap daerah (K_{jk}) juga adalah tunggal.

Cadangan modal daerah 2 yang digunakan oleh daerah 1 atau cadangan modal daerah 1 yang digunakan oleh daerah 2 yaitu E pada saat ekuilibrium diperoleh dengan menyubstitusikan persamaan (10) dan (24) ke dalam persamaan (18). Sehingga E pada saat ekuilibrium dapat diselesaikan dengan persamaan berikut

$$E = \frac{\beta L_1 L_2 K}{L^2} \left\{ \sum_k \frac{z_{2k} L_{2k}}{(\delta_{2k} K^\beta / \lambda_{2k} L^\beta - \alpha) L_2} - \sum_k \frac{z_{1k} L_{1k}}{(\delta_{1k} K^\beta / \lambda_{1k} L^\beta - \alpha) L_1} \right\} \quad (27)$$

Karena tidak mudah untuk diinterpretasikan secara eksplisit pada kondisi di atas, maka akan diuji beberapa kasus khusus. Hal tersebut dapat dilihat bahwa E adalah positif jika

$$\frac{z_{2k} L_{2k}}{(\delta_{2k} K^\beta / \lambda_{2k} L^\beta - \alpha) L_2} > \frac{z_{1k} L_{1k}}{(\delta_{1k} K^\beta / \lambda_{1k} L^\beta - \alpha) L_1}, \quad k = 1, 2.$$

Dalam kasus $z_{2k} L_{2k} = z_{1k} L_{1k}$, E adalah positif jika $\delta_{2k} / \lambda_{2k} < \delta_{1k} / \lambda_{1k}$, yaitu $1 / \lambda_{2k} < 1 / \lambda_{1k}$. Dapat disimpulkan bahwa dalam kasus ini, banyaknya tenaga kerja kelompok k ($k=1$ dan 2) di daerah 2 adalah sama dengan kelompok k di daerah 1. Kemudian jika kelompok k di daerah 2 lebih tinggi kecenderungan untuk menabungnya daripada daerah 1, daerah 1 akan menggunakan cadangan modal daerah 2.

Dalam kasus $\lambda_{2k} = \lambda_{1k}$, $k = 1, 2$, E adalah positif jika $z_{2k} L_{2k} > z_{1k} L_{1k}$. Dapat disimpulkan bahwa dalam kasus ini, kecenderungan untuk menabung kelompok k ($k=1$ dan 2) di daerah 2 adalah sama dengan kelompok k di daerah 1. Kemudian jika kelompok k di daerah 2 memiliki banyaknya tenaga kerja yang lebih besar dibandingkan dengan daerah 1, daerah 1 akan menggunakan cadangan modal daerah 2. Hal ini sulit untuk diinterpretasikan pada kasus lain.

E adalah negatif jika

$$\frac{z_{2k} L_{2k}}{(\delta_{2k} K^\beta / \lambda_{2k} L^\beta - \alpha) L_2} < \frac{z_{1k} L_{1k}}{(\delta_{1k} K^\beta / \lambda_{1k} L^\beta - \alpha) L_1}, \quad k = 1, 2.$$

Dalam kasus $z_{2k} L_{2k} = z_{1k} L_{1k}$, E adalah negatif jika $\delta_{2k} / \lambda_{2k} > \delta_{1k} / \lambda_{1k}$, yaitu $1 / \lambda_{2k} > 1 / \lambda_{1k}$. Dapat disimpulkan bahwa dalam kasus ini, banyaknya tenaga kerja kelompok k ($k=1$ dan 2) di daerah 2 adalah sama dengan kelompok k pada daerah 1. Kemudian jika kelompok k di daerah 2 lebih rendah kecenderungan untuk menabungnya daripada daerah 1, daerah 2 akan menggunakan cadangan modal daerah 1.

Dalam kasus $\lambda_{2k} = \lambda_{1k}$, $k = 1, 2$, E adalah negatif jika $z_{2k} L_{2k} < z_{1k} L_{1k}$. Dapat disimpulkan bahwa dalam kasus ini, kecenderungan untuk menabung kelompok k ($k=1$ dan 2) di daerah 2 adalah sama dengan kelompok k di daerah 1. Kemudian jika kelompok k di daerah 2 memiliki banyaknya tenaga kerja yang lebih kecil dibandingkan dengan daerah 1, daerah 2 akan menggunakan cadangan modal daerah 1. Hal ini sulit untuk diinterpretasikan pada kasus lain.

Dari pengambilan beberapa kasus di atas, dapat disimpulkan bahwa nilai E ditentukan oleh perbedaan produktivitas manusia dan kecenderungan untuk menabung di antara dua daerah.

Kemudian diasumsikan bahwa populasi pada keempat kelompok adalah identik, yaitu $L_{jk} = L_{ih}$ untuk $j, k, i, h = 1, 2$. Dari persamaan (24), perbandingan cadangan modal yang dimiliki oleh kelompok k di daerah j dan cadangan modal yang dimiliki oleh kelompok h di daerah i diberikan oleh:

$$\frac{K_{jk}}{K_{ih}} = \left(\frac{\delta_{ih} K^\beta / \lambda_{ih} L^\beta - \alpha}{\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha} \right) \left(\frac{z_{jk}}{z_{ih}} \right), \quad j, k, i, h = 1, 2. \quad (28)$$

Dapat dilihat bahwa $K_{jk} > K_{ih}$ jika $z_{jk} > z_{ih}$ dan $\lambda_{jk} > \lambda_{ih}$, yang artinya bahwa tingkat cadangan modal yang dimiliki oleh kelompok k di daerah j adalah lebih tinggi dari pada yang dimiliki oleh kelompok h di daerah i jika kelompok k di daerah j memiliki produktivitas manusia yang lebih tinggi dan kecenderungan untuk menabung yang lebih tinggi dari pada kelompok h di daerah i . Sebaliknya $K_{jk} < K_{ih}$ jika $z_{jk} < z_{ih}$ dan $\lambda_{jk} < \lambda_{ih}$. Yang artinya bahwa tingkat cadangan modal yang dimiliki oleh kelompok k di daerah j adalah lebih rendah dari pada yang dimiliki oleh kelompok h di daerah i jika kelompok k di daerah j memiliki produktivitas manusia yang lebih rendah dan kecenderungan untuk menabung yang lebih rendah dari pada kelompok h di daerah i .

Dari persamaan $\lambda_{jk} Y_{jk} = \delta_{jk} K_{jk}$ dan persamaan (16) diperoleh:

$$\begin{aligned} \frac{Y_{jk}}{Y_{ih}} &= \frac{\delta_{jk} \lambda_{ih} K_{jk}}{\lambda_{jk} \delta_{ih} K_{ih}} \\ &= \frac{\delta_{jk} \lambda_{ih}}{\lambda_{jk} \delta_{ih}} \left(\frac{\delta_{ih} K^\beta / \lambda_{ih} L^\beta - \alpha}{\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha} \right) \left(\frac{z_{jk}}{z_{ih}} \right) \\ \frac{C_{jk}}{C_{ih}} &= \frac{\xi_{jk} \lambda_{ih} K_{jk}}{\lambda_{jk} \xi_{ih} K_{ih}} \\ &= \frac{\xi_{jk} \lambda_{ih}}{\lambda_{jk} \xi_{ih}} \left(\frac{\delta_{ih} K^\beta / \lambda_{ih} L^\beta - \alpha}{\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha} \right) \left(\frac{z_{jk}}{z_{ih}} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

Dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa $Y_{jk} > Y_{ih}$ jika $z_{jk} > z_{ih}$ dan $\lambda_{jk} > \lambda_{ih}$, sebaliknya $Y_{jk} < Y_{ih}$ jika $z_{jk} < z_{ih}$ dan $\lambda_{jk} < \lambda_{ih}$. Dalam kasus $\delta = 0$, maka diperoleh: $C_{jk} > C_{ih}$ jika $z_{jk} > z_{ih}$ dan $\lambda_{jk} > \lambda_{ih}$, sebaliknya $C_{jk} < C_{ih}$ jika $z_{jk} < z_{ih}$ dan $\lambda_{jk} < \lambda_{ih}$. Dalam kasus-kasus lain, sulit untuk menduga secara eksplisit tanda-tanda untuk $Y_{jk} - Y_{ih}$ dan $C_{jk} - C_{ih}$.

4.3. Pengaruh Perubahan Tingkat Produktivitas Manusia Kelompok k di daerah j: Selanjutnya akan ditentukan pengaruh perubahan beberapa parameter yaitu yang pertama adalah pengaruh perubahan produktivitas manusia (z_{jk}), dalam ekonomi keseluruhan. Pada bagian ini hanya ditekankan pada perubahan

produktivitas manusia kelompok 1 di daerah 1 (z_{11}) dan pengaruhnya terhadap cadangan modal keseluruhan (K).

Dengan mendiferensialkan persamaan (26) yaitu

$$H(K) = \frac{L}{\beta} - \sum_{jk} \frac{z_{jk} L_{jk}}{\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha},$$

terhadap z_{11} maka diperoleh

$$\frac{dH}{dK} \frac{dK}{dz_{11}} = \frac{(\lambda_{11} L^\beta - \delta_{11} K^\beta) L_{11}}{(\delta_{11} K^\beta - \alpha \lambda_{11} L^\beta) \beta} + K \frac{L_{11}}{L} \frac{dH}{dK}, \quad (30)$$

dengan

$$\frac{dH}{dK} = \sum_{jk} \frac{\beta \delta_{jk} z_{jk} L_{jk}}{\lambda_{jk} K^\alpha L^\beta (\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha)^2} > 0.$$

Dalam kasus $\lambda_{11} L^\beta \geq \delta_{11} K^\beta$, peningkatan produktivitas manusia kelompok 1 di daerah 1 akan menyebabkan peningkatan cadangan modal keseluruhan. Untuk kasus $\delta_{11} K^\beta / \lambda_{11} L^\beta > 1$ sulit untuk menduga pengaruh dari K . Karena nilai ekuilibrium cadangan modal keseluruhan, K tidak secara eksplisit diselesaikan, hal ini sulit untuk menentukan $1 \geq \delta_{11} K^\beta / \lambda_{11} L^\beta$.

Dengan mendiferensialkan persamaan (24) yaitu

$$K_{jk} = \frac{\beta z_{jk} L_{jk} K}{(\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha) L}$$

terhadap z_{11} dan dengan mengasumsikan bahwa K adalah konstan, maka pengaruh produktivitas manusia kelompok 1 di daerah 1 (z_{11}) terhadap cadangan modal kelompok 1 di daerah 1 (K_{11}) diberikan oleh:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_{11} K^\beta - \alpha \lambda_{11} L^\beta}{K_{11}} \frac{dK_{11}}{dz_{11}} &= \frac{\delta_{11} K^\beta - \alpha \lambda_{11} L^\beta}{z_{11}} + \left(\frac{-\alpha \delta_{11} K^\beta L_{11} + \alpha \lambda_{11} L_{11} L^\beta}{L} \right) \\ &\quad - \alpha L_{11} \left(\frac{\delta_{11} K^\beta - \lambda_{11} L^\beta}{L} \right). \end{aligned}$$

(31)

Untuk menyederhanakan dalam menganalisis model, di dalam menentukan pengaruh produktivitas manusia kelompok 1 di daerah 1 (z_{11}) maka diasumsikan masing-masing kelompok pada setiap daerah mempunyai pilihan yang sama mengenai kecenderungan untuk mengonsumsi barang-barang dan untuk menabung yaitu, $\lambda = \lambda_{jk}$ ($\xi = \xi_{jk}$ dan $\delta = \delta_{jk}$) untuk semua j, k . Dengan menggunakan persamaan (25) dan (24) maka diperoleh

$$K^\beta = \frac{\lambda L^\beta}{\delta}, \quad K_{jk} = \left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^{1/\beta} z_{jk} L_{jk},$$

Selanjutnya dengan mendiferensialkan persamaan di atas maka diperoleh:

$$\frac{dK}{dz_{11}} = \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^{1/\beta} L_{11} > 0, \quad \frac{dK_{11}}{dz_{11}} = \frac{K_{11}}{z_{11}} > 0, \quad \frac{dK_{jk}}{dz_{11}} = 0. \tag{32}$$

Dari persamaan di atas dapat dilihat bahwa peningkatan produktivitas manusia kelompok 1 di daerah 1 (z_{11}) akan memperbesar cadangan modal keseluruhan (K), dan cadangan modal kelompok 1 di daerah 1 (K_{11}) tetapi tidak memiliki pengaruh pada cadangan modal untuk ketiga kelompok lainnya.

4.4. Pengaruh Perubahan Tingkat Kecenderungan untuk Menabung Kelompok k di daerah j: Pengaruh perubahan parameter lain yang akan ditentukan adalah pengaruh kecenderungan untuk menabung kelompok k di daerah j (λ_{jk}), dalam ekonomi keseluruhan. Pada bagian ini hanya ditekankan pada perubahan kecenderungan untuk menabung kelompok 1 di daerah 1 (λ_{11}), dan pengaruhnya terhadap cadangan modal keseluruhan (K).

Dengan mendiferensialkan persamaan (26) yaitu

$$H(K) = \frac{L}{\beta} - \sum_{jk} \frac{z_{jk} L_{jk}}{\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha},$$

terhadap λ_{11} maka diperoleh

$$\frac{dH}{dK} \frac{dK}{d\lambda_{11}} = \frac{z_{11} L_{11} K^\beta}{\lambda_{11}^2 L^\beta (\delta_{11} K^\beta / \lambda_{11} L^\beta - \alpha)^2}, \tag{33}$$

dengan

$$\frac{dH}{dK} = \sum_{jk} \frac{\beta \delta_{jk} z_{jk} L_{jk}}{\lambda_{jk} K^\alpha L^\beta (\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha)^2} > 0.$$

Karena $\frac{dH}{dK} > 0$ dan $\frac{z_{11} L_{11} K^\beta}{\lambda_{11}^2 L^\beta (\delta_{11} K^\beta / \lambda_{11} L^\beta - \alpha)^2} > 0$, maka dapat disimpulkan

bahwa $\frac{dK}{d\lambda_{11}} > 0$, yang artinya bahwa jika kecenderungan untuk menabung kelompok 1 di daerah 1 (λ_{11}) meningkat, maka cadangan modal keseluruhan (K) akan meningkat.

Dengan mendiferensialkan persamaan (24) yaitu

$$K_{jk} = \frac{\beta z_{jk} L_{jk} K}{(\delta_{jk} K^\beta / \lambda_{jk} L^\beta - \alpha)L}$$

terhadap λ_{11} dan dengan mengasumsikan bahwa K adalah konstan, maka pengaruh kecenderungan untuk menabung kelompok 1 di daerah 1 (λ_{11}), terhadap cadangan modal kelompok 1 di daerah 1 (K_{11}) diberikan oleh:

$$\frac{K(\delta_{11} K^\beta - \alpha \lambda_{11} L^\beta)}{K_{11}} \frac{dK_{11}}{d\lambda_{11}} = \frac{K^{\beta+1}}{\lambda_{11}}, \tag{34}$$

dengan $\delta_{11}K^\beta - \alpha\lambda_{11}L^\beta > 0$. $dK_{11}/d\lambda_{11}$ adalah positif jika $\delta_{11}K^\beta / \lambda_{11}L^\beta > 1$. Untuk kasus $\delta_{11}K^\beta / \lambda_{11}L^\beta < 1$ tidak mudah secara eksplisit untuk menentukan tanda dari $dK_{11}/d\lambda_{11}$.

5. SIMPULAN

Dari kajian terhadap model distribusi pertumbuhan ekonomi antarkelompok pada dua daerah, seperti yang diajukan oleh Zhang (2005). Pada model tersebut modal manusia (*human capital*) dimasukkan ke dalam fungsi produksi sebagai parameter yang mengukur produktivitas manusia. Dari kajian model, maka dapat disimpulkan bahwa:

1. model distribusi pertumbuhan ekonomi antarkelompok pada dua daerah ditentukan oleh sistem persamaan diferensial empat dimensi;
2. pada saat ekuilibrium sistem dinamik memiliki solusi yang tunggal. Semua variabel-variabel endogen dapat diselesaikan dengan terlebih dahulu menentukan nilai cadangan modal keseluruhan (K) pada saat ekuilibrium;
3. dengan menggunakan solusi analitik, peningkatan kedua parameter yaitu produktivitas manusia dan kecenderungan untuk menabung dapat meningkatkan cadangan modal keseluruhan dan cadangan modal dari masing-masing kelompok pada setiap daerah;
4. pengaruh perubahan tingkat produktivitas manusia kelompok 1 di daerah 1 (z_{11}) akan berpengaruh terhadap cadangan modal keseluruhan (K), dan cadangan modal kelompok 1 di daerah 1 (K_{11}). Peningkatan produktivitas manusia akan menyebabkan peningkatan secara linear cadangan modal keseluruhan dan cadangan modal kelompok tersebut, tetapi tidak mempunyai pengaruh pada cadangan modal ketiga kelompok yang lain;
5. pengaruh perubahan tingkat kecenderungan untuk menabung kelompok 1 di daerah 1 (λ_{11}) akan berpengaruh terhadap cadangan modal keseluruhan (K), dan cadangan modal kelompok 1 di daerah 1 (K_{11}). Peningkatan kecenderungan untuk menabung akan menyebabkan peningkatan secara eksponensial cadangan modal keseluruhan dan cadangan modal kelompok tersebut.
6. cadangan modal akan meningkat lebih cepat dengan peningkatan kecenderungan untuk menabung dibandingkan dengan peningkatan produktivitas manusia.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chiang A.C., Wainwright K. 2005. *Dasar-dasar matematika ekonomi*. Sudigno S, Nartanto, penerjemah; Jakarta: Erlangga Ed IV. Terjemahan dari: *Fundamental methods of mathematical economics*.
- [2] Emji. 2007. *Tentang modal manusia*. <http://www.iotas.web.id/?p=7>.
- [3] Jhingan, M.L. 1983. *Ekonomi pembangunan dan perencanaan*. D. Guritno, penerjemah; Jakarta: PT Rajagrafindo Persada Ed XVI. Terjemahan dari: *The economics of development and planning*.
- [4] Kutha Ardana, N.K. 2004. *Panduan penggunaan mathematica*. Bogor: Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor.

- [5] **Nugrahani, E.H.** 2007. *Kalkulus bahan matrikulasi S2 matematika terapan*. Bogor: Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor.
- [6] **Solow, R.M.** 1956. *A contribution to the economic growth*. The Quarterly Journal of Economic 70(1):65-94.
- [7] **Tajau, M.T.N.** 2008. *Model pertumbuhan ekonomi dua daerah berdasarkan modal dan knowledge*. [tesis]. Bogor: Sekolah Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.
- [8] **Zhang, W.B.** 2005. *Differential equations, bifurcations, and chaos in economic*. World Scientific.
- [9] **Zhang, W. B.** 1995. *A two-country dynamic trade model with multiple groups*. International Economic Journal 9(3).