

MODEL MATEMATIKA PENYEBARAN PENYAKIT DEMAM BERDARAH *DENGUE* TIPE SEIR INFEKSI GANDA

E. N. BANO¹, P. SIANTURI², JAHARUDDIN³

Abstrak

Dengue adalah salah satu penyakit infeksi yang ditularkan ke manusia oleh gigitan nyamuk *Aedes aegypti* atau *Aedes albopictus*. Infeksi virus *dengue* berupa demam *dengue*, demam berdarah *dengue* dan *Dengue Shock Syndrome* (DSS). Virus *dengue* mempunyai empat jenis serotipe yaitu: DEN_1, DEN_2, DEN_3, DEN_4. Pada model, akan dipelajari dinamika penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* yang terjadi akibat adanya infeksi ganda yang disebut infeksi I dan infeksi II. Dari model kemudian akan ditentukan titik tetap. Selanjutnya dianalisis kestabilan dari masing-masing titik tetap dengan mempertimbangkan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0). Untuk menunjukkan perilaku populasi yang muncul dalam proses infeksi I dan infeksi II pada kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$, maka dilakukan simulasi. Selain itu, simulasi juga dilakukan untuk melihat pengaruh laju kematian nyamuk dan vaksinasi terhadap penyebaran penyakit. Hasil penelitian menunjukkan dengan meningkatnya laju kematian nyamuk, populasi manusia dan nyamuk pada kelas rentan semakin meningkat dan populasi manusia dan nyamuk pada kelas lainnya semakin menurun. Sementara untuk vaksinasi, semakin meningkatnya efektivitas vaksin, manusia pada kelas rentan sudah semakin berkurang sehingga menyebabkan manusia pada kelas terpapar dan terinfeksi semakin berkurang. Hal ini disebabkan karena sudah banyak manusia yang sembuh.

Kata kunci: model matematika, titik tetap, bilangan reproduksi dasar, simulasi numerik.

1 PENDAHULUAN

Dengue masih menjadi masalah yang dibicarakan saat ini. *Dengue* ditularkan ke manusia oleh gigitan nyamuk *Aedes aegypti* atau *Aedes albopictus*. Infeksi virus *dengue* berupa demam *dengue*, Demam Berdarah *Dengue* (DBD) dan *Dengue Shock Syndrome* (DSS) yang mempunyai empat jenis serotipe virus yaitu: DEN_1, DEN_2, DEN_3, DEN_4 [1].

¹ Mahasiswa S2, Program Studi Matematika Terapan, Sekolah Pascasarjana IPB, Jalan Meranti Kampus IPB, Dramaga Bogor, 16680. Email: iranaikteas@gmail.com

² Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB, Dramaga Bogor, 16680. Email: psianturi15@gmail.com

³ Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Matematika dan Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB, Dramaga Bogor, 16680. Email: jaharipb@yahoo.com

Manusia yang telah terinfeksi oleh salah satu dari empat jenis serotipe akan mungkin terinfeksi lagi oleh serotipe yang sama (*imunitas homolog*) atau serotipe lain (*imunitas heterolog*). Perlindungan terhadap jenis serotipe terinfeksi akan bertahan lama, sementara perlindungan terhadap infeksi dari serotipe lain (*imunitas heterolog*) berlangsung rata-rata 2 tahun [7]. Model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* yang dikenalkan oleh Derouich [2] tanpa memperhatikan tahap terpapar pada manusia dan nyamuk. Pada pembahasan ini, tahap terpapar (*exposed*) pada manusia dan nyamuk diperhatikan untuk mempelajari dinamika penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* pada infeksi ganda.

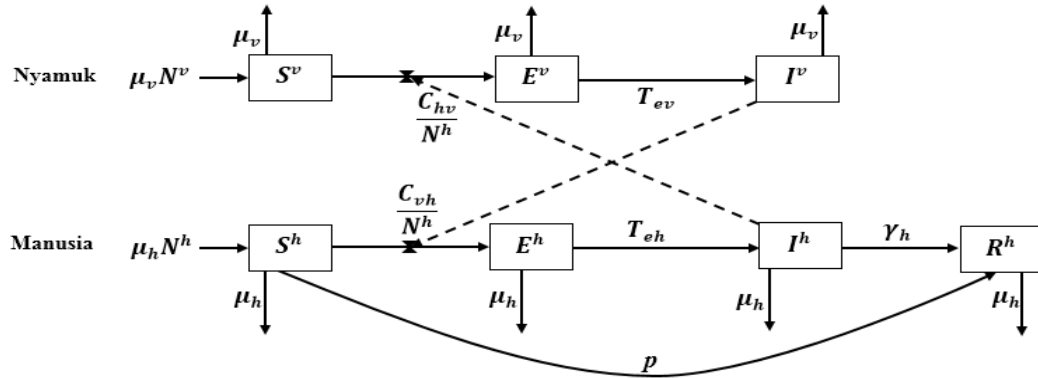
Strategi penanggulangan penyakit yang digunakan yaitu dengan memperhatikan kondisi kematian nyamuk di lingkungan dan vaksinasi (p). Strategi ini, digunakan untuk mempelajari adanya penyakit *dengue* infeksi ganda yaitu berkembang dari demam *dengue* dan demam berdarah *dengue* ke *Dengue Shock Syndrome* (DSS). Dalam artikel ini akan dibahas kestabilan dan simulasi pada populasi SEIR infeksi ganda berdasarkan besaran bilangan reproduksi dasarnya. Langkah-langkah yang dilakukan yaitu memodifikasi model matematika penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* tipe SEIR infeksi ganda, menentukan titik tetap, bilangan reproduksi dasar, melakukan analisis kestabilan dan melakukan simulasi.

2 MODEL PENYEBARAN PENYAKIT

Model penyebaran penyakit demam berdarah *dengue* ini memperhatikan adanya tahap terpapar (*exposed*) pada manusia dan nyamuk, sehingga disebut model SEIR. Populasi manusia dibagi menjadi empat kelas, yaitu populasi manusia rentan (*Susceptible*) S^h , populasi manusia terpapar (*Exposed*) E^h , populasi manusia terinfeksi (*Infected*) I^h dan populasi manusia sembuh (*Recovered*) R^h . Manusia rentan adalah manusia yang belum terkena virus. Manusia terpapar adalah manusia yang di dalam tubuhnya telah terinfeksi virus tapi belum bisa menularkannya. Manusia terinfeksi adalah manusia yang telah terkena virus dan dapat menularkannya. Manusia sembuh adalah manusia yang kebal.

Populasi nyamuk dibagi dalam tiga kelas, yaitu populasi nyamuk rentan (*Susceptible*) S^v , populasi nyamuk terpapar (*Exposed*) E^v , dan populasi nyamuk terinfeksi (*Infected*) I^v . Nyamuk rentan adalah nyamuk yang belum terkena virus. Nyamuk terpapar adalah nyamuk yang telah terinfeksi virus tapi belum bisa menularkannya. Nyamuk terinfeksi adalah nyamuk yang telah terkena virus dan dapat menularkannya.

Secara skematis, pola penyebaran penyakit DBD dapat digambarkan dalam diagram kompartemen pada Gambar 1, dengan (\rightarrow) menyatakan perpindahan individu dan (\leftrightarrow) menyatakan pengaruh antar kompartemen.



Gambar 1 Diagram kompartemen penyakit

Laju kelahiran populasi manusia diasumsikan sama dengan laju kematian ditulis μ_h . Jika b_s adalah rata-rata gigitan dari nyamuk rentan dan P_{hv} adalah efektivitas penularan dari manusia terinfeksi ke nyamuk rentan, maka tingkat penularan dari manusia terinfeksi ke nyamuk rentan yaitu: $P_{hv}I^h b_s / N^h$. Sehingga peluang nyamuk rentan menjadi terinfeksi yaitu $C_{hv} = P_{hv}b_s$. Manusia yang berada di kelas terinfeksi dapat berpindah ke kelas sembuh R^h karena pengaruh kekebalan alami dalam tubuhnya dengan laju γ_h .

Laju kelahiran populasi nyamuk diasumsikan sama dengan laju kematian ditulis μ_v . Newton dan Reiter [5] menunjukkan bahwa infeksi meningkat ada kaitannya dengan banyaknya gigitan nyamuk terinfeksi dengan nyamuk rentan. Jika diasumsikan bahwa rata-rata gigitan nyamuk terinfeksi b_i lebih besar dari rata-rata gigitan nyamuk rentan b_s dan P_{vh} adalah efektivitas penularan dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan, maka tingkat penularan dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan yaitu: $P_{vh}I^v b_i / N^h$. Sehingga peluang manusia rentan menjadi terinfeksi yaitu $C_{vh} = P_{vh}b_i$.

Dari diagram kompartemen tersebut, diperoleh sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS^h}{dt} = \mu_h N^h - \left(\mu_h + p + \frac{C_{vh}I^v}{N^h} \right) S^h, \\ \frac{dE^h}{dt} = \left(\frac{C_{vh}I^v}{N^h} \right) S^h - (T_{eh} + \mu_h) E^h, \\ \frac{dI^h}{dt} = T_{eh} E^h - (\gamma_h + \mu_h) I^h, \\ \frac{dR^h}{dt} = p S^h + \gamma_h I^h - \mu_h R^h, \\ \frac{dS^v}{dt} = \mu_v N^v - \left(\mu_v + \frac{C_{hv}I^h}{N^h} \right) S^v, \\ \frac{dE^v}{dt} = \frac{C_{hv}I^h}{N^h} S^v - (T_{ev} + \mu_v) E^v, \\ \frac{dI^v}{dt} = T_{ev} E^v - \mu_v I^v. \end{cases} \quad (1)$$

Kemudian dengan melakukan penyederhanaan dan penskalaan, diperoleh sistem persamaan diferensial berikut:

$$\begin{cases} \frac{dS_h}{dt} = \mu_h - (\mu_h + p + nC_{vh}I_v)S_h, \\ \frac{dE_h}{dt} = (nC_{vh}I_v)S_h - (T_{eh} + \mu_h)E_h, \\ \frac{dI_h}{dt} = T_{eh}E_h - (\gamma_h + \mu_h)I_h, \\ \frac{dE_v}{dt} = C_{hv}I_h(1 - E_v - I_v) - (T_{ev} + \mu_v)E_v, \\ \frac{dI_v}{dt} = T_{ev}E_v - \mu_vI_v, \end{cases} \quad (2)$$

dengan $n = \frac{N^v}{N^h}$ dan $S_h = \frac{S^h}{N^h}, E_h = \frac{E^h}{N^h}, I_h = \frac{I^h}{N^h}, R_h = \frac{R^h}{N^h}, S_v = \frac{S^v}{N^v}, E_v = \frac{E^v}{N^v}, I_v = \frac{I^v}{N^v}$.

Semua parameter pada persamaan (2) adalah positif dan keterangan parameter disajikan pada Tabel 1.

Tabel 1
Nilai Parameter dalam Model yang Ditunjukkan pada Gambar 1

| Simbol | Keterangan | Nilai Parameter | Satuan |
|------------|--|-----------------|--------------|
| p | Efektivitas penggunaan vaksin | (0,1) | Tanpa satuan |
| P_{hv} | Efektivitas penularan dari manusia terinfeksi ke nyamuk rentan | 0.75 | Tanpa satuan |
| P_{vh} | Efektivitas penularan dari nyamuk terinfeksi ke manusia rentan | 0.75 | Tanpa satuan |
| b_s | Rata-rata gigitan nyamuk rentan | 0.5 | Per hari |
| b_i | Rata-rata gigitan nyamuk terinfeksi | 1.0 | Per hari |
| μ_h | Laju kelahiran manusia dianggap sama dengan laju kematian | 0.00004 | Per hari |
| μ_v | Laju kelahiran nyamuk dianggap sama dengan laju kematian | [0.15,0.55] | Per hari |
| C_{hv} | Peluang nyamuk rentan dapat terinfeksi | 0.375 | Tanpa satuan |
| C_{vh} | Peluang manusia rentan dapat terinfeksi | 0.75 | Tanpa satuan |
| γ_h | Proporsi manusia terinfeksi yang sembuh karena pengaruh kekebalan alami dalam tubuhnya | 0.3333 | Per hari |
| T_{eh} | Waktu inkubasi intrinsik | 0.2 | Per hari |
| T_{ev} | Waktu inkubasi ekstrinsik | 0.1 | Per hari |
| T_{id} | Durasi manusia terinfeksi | 3 | Hari |

3 KESTABILAN SISTEM

Titik Tetap

Titik tetap diperoleh dengan syarat: $\frac{dS_h}{dt} = 0$, $\frac{dE_h}{dt} = 0$, $\frac{dI_h}{dt} = 0$, $\frac{dE_v}{dt} = 0$ dan $\frac{dI_v}{dt} = 0$, sehingga menghasilkan:

$\Omega = \{(S_h, E_h, I_h, E_v, I_v) \in \mathbb{R}_+^5 : E_v + I_v \leq 1 \text{ dan } (1 + p/\mu_h)S_h + E_h + I_h \leq 1\}$, dan memiliki dua titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit (T_1) dan titik tetap endemik (T_2) yang masing-masing berbentuk:

$$T_1(S_h, E_h, I_h, E_v, I_v) = (\mu_h/(\mu_h + p), 0, 0, 0, 0), \text{ dan} \\ T_2(S_h^*, E_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*),$$

dimana

$$S_h^* = \frac{(T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)\mu_v)}{C_{hv}T_{eh}(C_{vh}nT_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v))}, \\ E_h^* = \frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h - (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v)}{C_{hv}T_{eh}(T_{eh} + \mu_h)(C_{vh}nT_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v))}, \\ I_h^* = \frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h - (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v)}{C_{hv}(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)(C_{vh}nT_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v))}, \\ E_v^* = \frac{\mu_v(-C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h + (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v))}{C_{vh}nT_{ev}(T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v)}, \\ I_v^* = \frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h - (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v)}{C_{vh}nT_{ev}(T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v)}.$$

Sifat kestabilan di sekitar titik tetap T_1 dan T_2 dianalisis menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz* [4] dan bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0).

Bilangan Reproduksi Dasar (\mathcal{R}_0)

Bilangan reproduksi dasar adalah nilai harapan banyaknya populasi rentan menjadi terinfeksi. Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang dari populasi. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah. Bilangan reproduksi dasar untuk persamaan (2), diperoleh menggunakan metode *the next generation matrix* [3], yakni:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h}{(p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v)}. \quad (3)$$

Analisis Kestabilan Titik Tetap Tanpa Penyakit (T_1)

Untuk menentukan kestabilan di sekitar titik tetap tanpa penyakit (T_1), terlebih dahulu dilakukan pelinearan [6] terhadap persamaan (2), untuk memperoleh matriks Jacobi berikut:

$$J_{T_1} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & D_2 \\ 0 & D_3 & 0 & 0 & D_4 \\ 0 & D_5 & D_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_7 & D_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_9 & D_{10} \end{bmatrix},$$

dengan

$$D_1 = -(p + \mu_h), D_2 = -\frac{C_{vh}n\mu_h}{p + \mu_h}, D_3 = -(T_{eh} + \mu_h), D_4 = \frac{C_{vh}n\mu_h}{p + \mu_h}, D_5 = T_{eh},$$

$$D_6 = -(\gamma_h + \mu_h), D_7 = C_{hv}, D_8 = -(T_{ev} + \mu_v), D_9 = T_{ev}, D_{10} = -\mu_v.$$

Selanjutnya nilai eigen diperoleh berdasarkan persamaan karakteristik berikut:

$$(-p - \lambda - \mu_h) \left(-\frac{C_{hv}C_{vh}nT_{eh}T_{ev}\mu_h}{p + \mu_h} + (\lambda + T_{eh} + \mu_h)(\lambda + \gamma_h + \mu_h)(\lambda + \mu_v)(\lambda + T_{ev} + \mu_v) \right) = 0.$$

Berdasarkan persamaan di atas diperoleh:

$$\lambda = -(p + \mu_h),$$

dan persamaan karakteristik:

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \quad (4)$$

dengan

$$a_1 = (\gamma_h + \mu_h) + (T_{eh} + \mu_h) + \mu_v + (T_{ev} + \mu_v) > 0,$$

$$a_2 = (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h) + \mu_v((\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)) + (T_{ev} + \mu_v)((\gamma_h + \mu_h) + (T_{eh} + \mu_h) + \mu_v) > 0,$$

$$a_3 = \mu_v(\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h) + (T_{ev} + \mu_v)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h) + \mu_v(T_{ev} + \mu_v)(\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h) > 0,$$

$$a_4 = \mu_v(T_{ev} + \mu_v)(\gamma_h + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(1 - \mathcal{R}_0). \quad (\mathcal{R}_0 \text{ ada pada persamaan 3})$$

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, persamaan karakteristik (4) pada titik tetap T_1 stabil jika memenuhi syarat-syarat kestabilan berikut:

$$a_1 > 0 \text{ dan } a_2 > 0 \text{ dan } a_3 > 0 \text{ dan } a_4 > 0 \text{ dan } a_1a_2a_3 > (a_3^2 + a_1^2a_4), \quad (5)$$

karena semua parameter bernilai positif, maka nilai a_1, a_2 dan a_3 bernilai positif. Koefisien a_4 akan bernilai positif, negatif atau nol bergantung pada nilai \mathcal{R}_0 . Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka $a_4 > 0$. Jika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka $a_4 = 0$. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $a_4 < 0$.

Berdasarkan kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ yaitu $a_4 > 0$, diperoleh $a_1a_2a_3 > (a_3^2 + a_1^2a_4)$. Sehingga untuk $\mathcal{R}_0 < 1$, kondisi (5) terpenuhi. Sedangkan untuk kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ yaitu $a_4 < 0$ dan $\mathcal{R}_0 = 1$ yaitu $a_4 = 0$, berlawanan dengan kondisi (5) akibatnya kriteria *Routh-Hurwitz* tidak terpenuhi.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa karena nilai $\lambda < 0$ dan jika $\mathcal{R}_0 < 1$ kriteria *Routh-Hurwitz* telah ditunjukkan terpenuhi, maka titik tetap tanpa penyakit (T_1) stabil manakala $\mathcal{R}_0 < 1$.

Analisis Kestabilan Titik Tetap Endemik (T_2)

Untuk menentukan kestabilan di sekitar titik tetap endemik (T_2), terlebih dahulu dilakukan pelinearannya [6] terhadap persamaan (2), untuk memperoleh matriks Jacobi berikut:

$$J_{T_2} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & D_2 \\ D_3 & D_4 & 0 & 0 & D_5 \\ 0 & D_6 & D_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_8 & D_9 & D_{10} \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} \end{bmatrix},$$

dengan

$$D_1 = -\frac{C_{hv}T_{eh}\mu_h(C_{hv}nT_{ev}+(p+\mu_h)(T_{ev}+\mu_v))}{(T_{ev}+\mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h+(T_{eh}+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h)\mu_v)},$$

$$D_2 = -\frac{C_{vh}n(T_{ev}+\mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h+(T_{eh}+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h)\mu_v)}{C_{hv}T_{eh}(C_{vh}nT_{ev}+(p+\mu_h)(T_{ev}+\mu_v))},$$

$$D_3 = \frac{(p+\mu_h)(T_{eh}+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h)\mu_v(\mathcal{R}_0-1)}{C_{hv}T_{eh}\mu_h+(T_{eh}+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h)\mu_v}, D_4 = -(T_{eh} + \mu_h),$$

$$D_5 = \frac{C_{vh}n(T_{ev}+\mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h+(T_{eh}+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h)\mu_v)}{C_{hv}T_{eh}(C_{vh}nT_{ev}+(p+\mu_h)(T_{ev}+\mu_v))}, D_6 = T_{eh}, D_7 = -(\gamma_h + \mu_h),$$

$$D_8 = \frac{C_{hv}(T_{eh}+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h)\mu_v(C_{vh}nT_{ev}+(p+\mu_h)(T_{ev}+\mu_v))}{C_{hv}nT_{ev}(C_{hv}T_{eh}\mu_h+(T_{eh}+\mu_h)(\gamma_h+\mu_h)\mu_v)},$$

$$D_9 = -\left((T_{ev} + \mu_v) + \frac{(p+\mu_h)\mu_v(T_{ev}+\mu_v)(\mathcal{R}_0-1)}{C_{vh}nT_{ev}+(p+\mu_h)(T_{ev}+\mu_v)} \right), D_{10} = -\frac{(p+\mu_h)\mu_v(T_{ev}+\mu_v)(\mathcal{R}_0-1)}{C_{vh}nT_{ev}+(p+\mu_h)(T_{ev}+\mu_v)},$$

$$D_{11} = T_{ev}, D_{12} = -\mu_v. (\mathcal{R}_0 \text{ ada pada persamaan 3})$$

Kemudian nilai eigen diperoleh dari persamaan karakteristik berikut:

$$\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 = 0, \tag{6}$$

dengan

$$b_1 = C_{hv}T_{eh}\mu_h \left(C_{vh}^2n^2T_{ev}^2 + C_{vh}nT_{ev}(T_{ev} + \mu_v)(2p + T_{eh} + T_{ev} + \gamma_h + 4\mu_h + 4\mu_v) + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v)^2(p + T_{eh} + T_{ev} + \gamma_h + 3\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v) \left((p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v)(T_{eh} + T_{ev} + \gamma_h + 2\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) + C_{vh}nT_{ev}(T_{eh} + T_{ev} + \gamma_h + 2(\mu_h + \mu_v)) \right) \right) / \left((T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v)(C_{vh}nT_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v)) \right) > 0,$$

$$b_2 = \left((T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v) \left(C_{vh}nT_{ev}(\mu_h(\gamma_h + \mu_h) + 2(\gamma_h + \mu_h)\mu_v + \mu_v^2 + T_{ev}(\gamma_h + 2\mu_h + \mu_v) + T_{eh}(T_{ev} + \gamma_h + 2\mu_h + \mu_v)) \right) + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v)(\mu_h(\gamma_h + \mu_h) + (1 + \mathcal{R}_0)(\gamma_h + 2\mu_h)\mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v^2 + T_{ev}(\gamma_h + 2\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + T_{eh}(T_{ev} + \gamma_h + \mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v)) \right) + C_{hv}T_{eh}\mu_h \left(C_{vh}^2n^2T_{ev}^2(T_{eh} + T_{ev} + \gamma_h + 2(\mu_h + \mu_v)) + C_{vh}nT_{ev}(T_{ev} + \mu_v) \left(T_{ev}\gamma_h + 4T_{ev}\mu_h + 3\gamma_h\mu_h + 5\mu_h^2 + 2p(T_{eh} + T_{ev} + \gamma_h + 2\mu_h) + p(3 + \mathcal{R}_0)\mu_v + (T_{ev} + 2\gamma_h + (7 + \mathcal{R}_0)\mu_h)\mu_v + \mu_v^2 + T_{eh}(T_{ev} + \gamma_h + 3\mu_h + 2\mu_v) \right) + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v)^2 \left(T_{ev}\gamma_h + 3T_{ev}\mu_h + 2\gamma_h\mu_h + 3\mu_h^2 + (\gamma_h + 3\mu_h + \mathcal{R}_0(T_{ev} + \gamma_h + 3\mu_h))\mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v^2 + T_{eh}(T_{ev} + \gamma_h + 2\mu_h + \mu_v + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \mathcal{R}_0\mu_v) + p(T_{eh} + T_{ev} + \gamma_h + 2\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v)) \Big) \Big) / \left((T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + \right. \\
& \left. (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v)(C_{vh}nT_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v)) \right) > 0, \\
b_3 = & C_{hv}T_{eh}\mu_h \left(C_{vh}^2n^2T_{ev}^2 \left(\gamma_h\mu_h + \mu_h^2 + 2\gamma_h\mu_v + 4\mu_h\mu_v + \mu_v^2 + T_{ev}(\gamma_h + 2\mu_h + \right. \right. \\
& \left. \left. \mu_v) + T_{eh}(T_{ev} + \gamma_h + \mu_h + 2\mu_v) \right) + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v)^2 \left(2T_{ev}\gamma_h\mu_h + 3T_{ev}\mu_h^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \gamma_h\mu_h^2 + \mu_h^3 + \mathcal{R}_0T_{ev}\gamma_h\mu_v + 3\mathcal{R}_0T_{ev}\mu_h\mu_v + 2\gamma_h\mu_h\mu_v + 2\mathcal{R}_0\gamma_h\mu_h\mu_v + 3\mu_h^2\mu_v + \right. \right. \\
& \left. \left. 3\mathcal{R}_0\mu_h^2\mu_v + \mathcal{R}_0\gamma_h\mu_v^2 + 3\mathcal{R}_0\mu_h\mu_v^2 + T_{eh}(\mu_h^2 + 2\mu_h\mu_v + 2\mathcal{R}_0\mu_h\mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. T_{ev}(\gamma_h + 2\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + \gamma_h(\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) \right) + p(\gamma_h\mu_h + \mu_h^2 + \gamma_h\mu_v + \right. \\
& \left. \mathcal{R}_0\gamma_h\mu_v + 2\mu_h\mu_v + 2\mathcal{R}_0\mu_h\mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v^2 + T_{ev}(\gamma_h + 2\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + T_{eh}(T_{ev} + \gamma_h + \right. \\
& \left. \mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) \right) \Big) + C_{vh}nT_{ev}(T_{ev} + \mu_v) \left(3T_{ev}\gamma_h\mu_h + 5T_{ev}\mu_h^2 + 2\gamma_h\mu_h^2 + \right. \\
& \left. 2\mu_h^3 + T_{ev}\gamma_h\mu_v + 3T_{ev}\mu_h\mu_v + \mathcal{R}_0T_{ev}\mu_h\mu_v + 5\gamma_h\mu_h\mu_v + \mathcal{R}_0\gamma_h\mu_h\mu_v + 8\mu_h^2\mu_v + \right. \\
& \left. 2\mathcal{R}_0\mu_h^2\mu_v + \gamma_h\mu_v^2 + 3\mu_h\mu_v^2 + \mathcal{R}_0\mu_h\mu_v^2 + T_{eh} \left(2\mu_h^2 + 5\mu_h\mu_v + \mathcal{R}_0\mu_h\mu_v + \mu_v^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\gamma_h(\mu_h + \mu_v) + T_{ev}(\gamma_h + 3\mu_h + \mu_v) + p \left(2\gamma_h\mu_h + 2\mu_h^2 + 3\gamma_h\mu_v + \mathcal{R}_0\gamma_h\mu_v + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. 6\mu_h\mu_v + 2\mathcal{R}_0\mu_h\mu_v + \mu_v^2 + T_{ev}(2\gamma_h + 4\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) + T_{eh}(2T_{ev} + 2\gamma_h + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\mu_h + 3\mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) \right) \right) \Big) + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \\
& \mu_v) \left(C_{vh}nT_{ev} \left(\mu_v \left(2\mu_h(\mu_h + \mu_v) + \gamma_h(2\mu_h + \mu_v) \right) + T_{eh} \left(T_{ev}(\gamma_h + \mu_h + \mu_v) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \mu_v(2\gamma_h + 2\mu_h + \mu_v) \right) + T_{ev} \left(\gamma_h(\mu_h + \mu_v) + \mu_h(\mu_h + 2\mu_v) \right) \right) + (p + \mu_h)(T_{ev} + \\
& \mu_v) \left(T_{eh} \left(T_{ev}(\gamma_h + \mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + \mu_v(\gamma_h + \mathcal{R}_0\gamma_h + \mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) \right) + \right. \\
& \left. T_{ev} \left(\gamma_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + \mu_h(\mu_h + 2\mathcal{R}_0\mu_v) \right) + \mu_v \left(\gamma_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + \mu_h(\mu_h + \right. \right. \\
& \left. \left. \mathcal{R}_0\mu_h + 2\mathcal{R}_0\mu_v) \right) \right) \Big) \Big) / \left((T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \right. \\
& \left. \mu_h)\mu_v) \left(C_{vh}nT_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v) \right) \right) > 0, \\
b_4 = & \left((\mathcal{R}_0 - 1)(p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)^2(\gamma_h + \mu_h)^2\mu_v^2(T_{ev} + \mu_v)^3 + \right. \\
& C_{hv}T_{eh}\mu_h \left(C_{vh}^2n^2T_{ev}^2 \left(\mu_v(2\mu_h(\mu_h + \mu_v) + \gamma_h(2\mu_h + \mu_v)) + T_{eh}(T_{ev}(\gamma_h + \mu_h + \right. \right. \\
& \left. \left. \mu_v) + \mu_v(2\gamma_h + 2\mu_h + \mu_v)) + T_{ev}(\gamma_h(\mu_h + \mu_v) + \mu_h(\mu_h + \mu_v)) \right) + C_{vh}nT_{ev} + \right. \\
& \left. (p + \mu_h)(T_{ev} + \mu_v) \left(T_{ev}(2\mu_h(\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) + \gamma_h(2\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v)) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & T_{eh} \left(T_{ev} (2\gamma_h + 2\mu_h + \mu_v + \mathcal{R}_0\mu_v) + \mu_v ((3 + \mathcal{R}_0)\gamma_h + 3\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \mu_v + \right. \\
 & \left. \mathcal{R}_0\mu_v) \right) + \mu_v \left(\gamma_h ((3 + \mathcal{R}_0)\mu_h + (1 + \mathcal{R}_0)\mu_v) + \mu_h ((3 + \mathcal{R}_0)\mu_h + 2(1 + \right. \\
 & \left. \mathcal{R}_0)\mu_v) \right) + (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)^2 \left(p(T_{eh}(\gamma_h + \mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + \mu_v(\gamma_h + \mathcal{R}_0\gamma_h + \mu_h + \right. \\
 & \left. \mathcal{R}_0\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + T_{ev}(\gamma_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_v) + \mu_h(\mu_h + 2\mathcal{R}_0\mu_v)) + \mu_v(\gamma_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \right. \\
 & \left. \mathcal{R}_0\mu_v) + \mu_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + 2\mathcal{R}_0\mu_v)) \right) + \mu_h \left(T_{ev} \left(\gamma_h(\mu_h + \mu_v(2\mathcal{R}_0 - 1)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. \mu_h(\mu_h + \mu_v(3\mathcal{R}_0 - 1)) \right) + \mu_v \left(\gamma_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \mu_v(2\mathcal{R}_0 - 1)) + \mu_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \right. \right. \\
 & \left. \left. \mu_v(3\mathcal{R}_0 - 1)) \right) \right) + T_{eh} \left(\mu_v \left(\gamma_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \mu_v(\mathcal{R}_0 - 1)) + \mu_h(\mu_h + \mathcal{R}_0\mu_h + \right. \right. \\
 & \left. \left. \mu_v(2\mathcal{R}_0 - 1)) \right) + T_{ev} \left(\gamma_h(\mu_h + \mu_v(\mathcal{R}_0 - 1)) + \mu_h(\mu_h + \mu_v(2\mathcal{R}_0 - 1)) \right) \right) \Big) / \\
 & \left((T_{ev} + \mu_v)(C_{hv}T_{eh}\mu_h + (T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v)(C_{vh}nT_{ev} + (p + \mu_h)(T_{ev} + \right. \\
 & \left. \mu_v) \right) > 0, \\
 & b_5 = (p + \mu_h)(T_{eh} + \mu_h)(\gamma_h + \mu_h)\mu_v(T_{ev} + \mu_v)(\mathcal{R}_0 - 1).
 \end{aligned}$$

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz*, persamaan karakteristik (6) pada titik tetap T_2 stabil jika dan hanya jika memenuhi syarat-syarat kestabilan berikut: $b_1 > 0$ dan $b_2 > 0$ dan $b_3 > 0$ dan $b_4 > 0$ dan $b_5 > 0$ dan $b_1b_2b_3 > (b_3^2 + b_1^2b_4)$ dan $(b_1b_4 - b_5)(b_1b_2b_3 - b_3^2 + b_1^2b_4) > b_5(b_1b_2 - b_3)^2 + b_1b_5^2$. (7)

Karena semua parameter bernilai positif, maka nilai b_1, b_2 dan b_3 bernilai positif. Koefisien b_4 bernilai positif saat kondisi $\mathcal{R}_0 < 1, \mathcal{R}_0 = 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$. Anggap jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $b_4 > 0$. Koefisien b_5 bernilai positif, negatif atau nol bergantung pada nilai \mathcal{R}_0 . Jika $\mathcal{R}_0 < 1$, maka $b_5 < 0$. Jika $\mathcal{R}_0 = 1$, maka $b_5 = 0$. Jika $\mathcal{R}_0 > 1$, maka $b_5 > 0$.

Berdasarkan kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$ yaitu $b_4 > 0$ dan $b_5 > 0$ diperoleh $b_1b_2b_3 > (b_3^2 + b_1^2b_4)$ dan $(b_1b_4 - b_5)(b_1b_2b_3 - b_3^2 + b_1^2b_4) > b_5(b_1b_2 - b_3)^2 + b_1b_5^2$ sehingga untuk $\mathcal{R}_0 > 1$, kondisi (7) terpenuhi. Sedangkan untuk kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$ yaitu $b_5 < 0$ dan $\mathcal{R}_0 = 1$ yaitu $b_5 = 0$, berlawanan dengan kondisi (7) akibatnya kriteria *Routh-Hurwitz* tidak terpenuhi. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa jika $\mathcal{R}_0 > 1$ kriteria *Routh-Hurwitz* terpenuhi, maka titik tetap T_2 akan stabil manakala $\mathcal{R}_0 > 1$.

Manusia yang telah terinfeksi oleh salah satu dari empat jenis serotipe masih mungkin terinfeksi lagi oleh serotipe yang sama (*imunitas homolog*) atau serotipe lain (*imunitas heterolog*) dan perlindungan terhadap jenis serotipe tertentu bertahan lama, sementara perlindungan terhadap infeksi dari serotipe lain (*imunitas heterolog*) berlangsung rata-rata 2 tahun.

Pada kasus infeksi II yang merupakan lanjutan dari infeksi I, hanya dilakukan pada populasi yang daerah lingkungannya sudah diperhatikan kondisi kematian nyamuk dan populasi manusia yang sembuh dari pemberian vaksin dan kekebalan tubuhnya terhadap serotipe lain (*imunitas heterolog*) telah hilang sehingga diasumsikan bahwa manusia rentan adalah manusia yang telah dilindungi

dari nyamuk dan infeksi dari empat serotipe atau telah diimunisasi secara parsial terhadap satu jenis serotipe virus.

4 SIMULASI NUMERIK

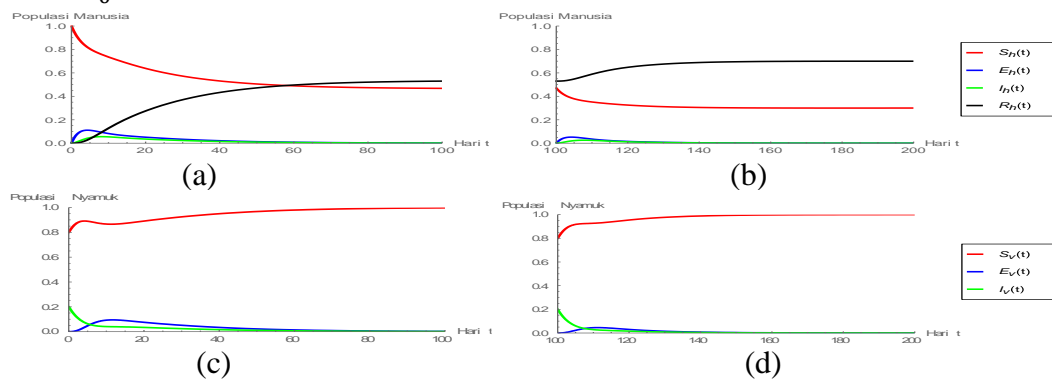
Pada saat simulasi, dinamika populasi untuk infeksi I dan infeksi II yang dianalisis adalah kondisi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$. Untuk menganalisis dinamika populasi, dilakukan perubahan laju kematian nyamuk (μ_v) dan efektivitas vaksinasi (p). Dua parameter ini dipilih karena dianggap berpengaruh dalam penanggulangan wabah.

Saat infeksi I nilai awal total populasi manusia yang seluruhnya rentan adalah 1. Nilai awal total populasi nyamuk adalah 1 dengan jumlah nyamuk pada kelas terinfeksi adalah 20%. Saat infeksi II nilai awal total populasi manusia yang seluruhnya rentan adalah nilai akhir dari infeksi I. Sementara untuk populasi nyamuk saat infeksi II adalah tetap.

Berikut adalah simulasi untuk melihat dinamika populasi manusia dan nyamuk saat infeksi I dan II yang dilakukan dengan mengubah laju kematian nyamuk (μ_v) yang memenuhi kondisi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dinamika Populasi Kondisi $\mathcal{R}_0 < 1$

Berdasarkan nilai-nilai parameter yang ada pada Tabel 1, dengan mengambil nilai (μ_v) dan p pada interval yang sudah ditetapkan, diperoleh gambar dinamika populasi di bawah ini untuk nilai $\mu_v = 0.25$ dan $p = 0.00001$ dengan nilai $\mathcal{R}_0 = 0.87817$.



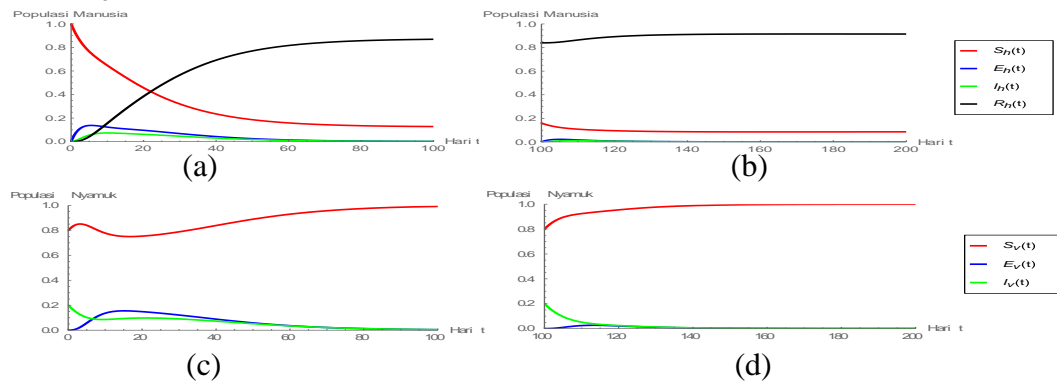
Gambar 2 Dinamika populasi manusia (a) infeksi I, (b) infeksi II dan nyamuk (c) infeksi I, (d) infeksi II terhadap waktu t ketika $\mathcal{R}_0 < 1$.

Jumlah tiap kelas saat infeksi I stabil ke titik tetap tanpa penyakit $T_1(S_h, E_h, I_h, E_v, I_v) = T_1(0.53, 0, 0, 0, 0)$. Sementara saat infeksi II juga stabil ke titik tetap tanpa penyakit $T_1(S_h, E_h, I_h, E_v, I_v) = T_1(0.29, 0, 0, 0, 0)$.

Selanjutnya dilakukan simulasi yang memenuhi kondisi ketika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Dinamika Populasi Kondisi $\mathcal{R}_0 > 1$

Berdasarkan nilai-nilai parameter yang ada pada Tabel 1 dengan mengambil nilai parameter μ_v dan p pada interval yang telah ditetapkan, diperoleh gambar dinamika populasi di bawah ini untuk nilai $\mu_v = 0.15$ dan $p = 0.00001$ dengan nilai $\mathcal{R}_0 = 1.34143$.



Gambar 3 Dinamika populasi manusia (a) infeksi I, (b) infeksi II dan nyamuk (c) infeksi I, (d) infeksi II terhadap waktu t ketika $\mathcal{R}_0 > 1$.

Jumlah tiap kelas saat infeksi I stabil ke titik tetap tanpa endemik $T_2(S_h^*, E_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) = T_2(0.16, 0.0002, 0.0001, 0.0002, 0.0002)$. Sementara saat infeksi II juga stabil ke titik tetap endemik $T_2(S_h^*, E_h^*, I_h^*, E_v^*, I_v^*) = T_2(0.06, 0.00008, 0.00007, 0.00008, 0.00008)$.

Tahap selanjutnya dilakukan simulasi pengaruh laju kematian nyamuk (μ_v) terhadap penyebaran penyakit dalam populasi saat infeksi I dan infeksi II.

Simulasi Tanpa Vaksinasi dengan Pembahasan Laju Kematian Nyamuk

Infeksi I

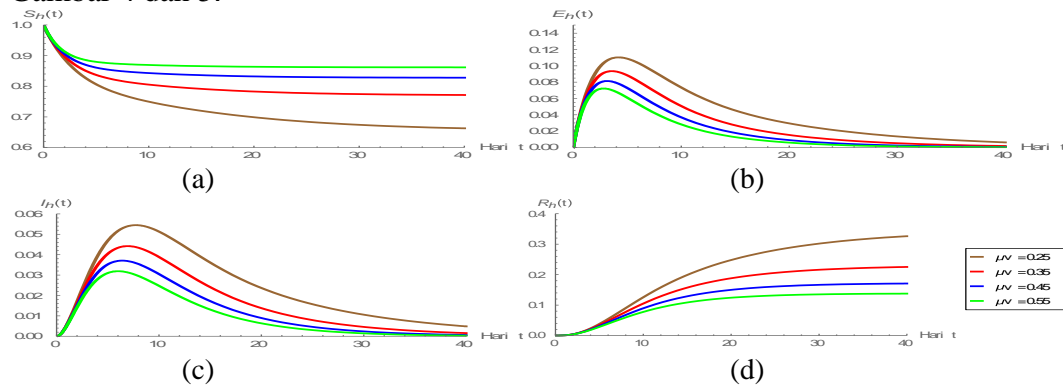
Simulasi ini diperlukan untuk melihat pengaruh laju kematian nyamuk terhadap penyebaran penyakit dalam populasi saat infeksi I. Selain itu, akan ditunjukkan bahwa laju kematian nyamuk dapat menurunkan nilai bilangan reproduksi dasar (\mathcal{R}_0) yang didefinisikan pada persamaan (3). Terdapat 4 nilai μ_v yang diambil pada interval $[0.25, 0.55]$ dengan langkah 0.1. Nilai parameter $p = 0$, sedangkan parameter lain tetap dapat dilihat pada Tabel 1. Nilai \mathcal{R}_0 pada saat laju kematian nyamuk ditingkatkan dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2
 Nilai \mathcal{R}_0 dengan Parameter μ_v Ditingkatkan dan Parameter Lain Tetap

| μ_v | Nilai \mathcal{R}_0 |
|---------|-----------------------|
| 0.25 | 0.981823 |
| 0.35 | 0.731808 |
| 0.45 | 0.583781 |
| 0.55 | 0.485735 |

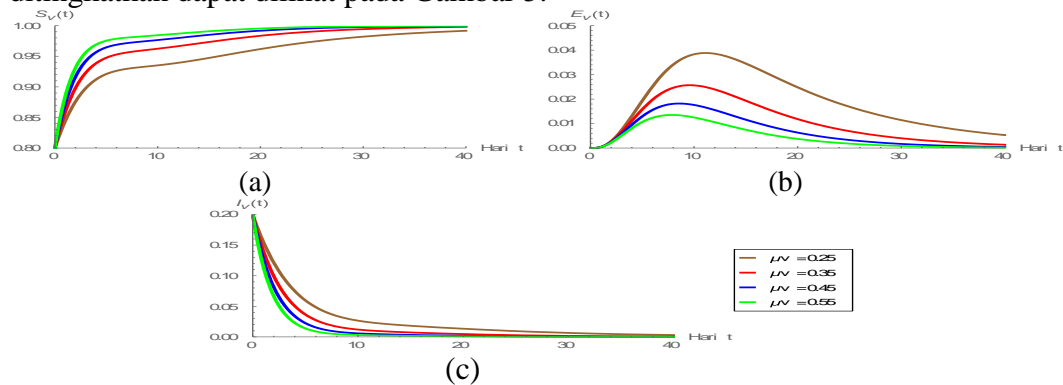
Berdasarkan Tabel 2 dapat diperhatikan bahwa nilai \mathcal{R}_0 masih kurang dari 1. Meningkatnya parameter μ_v menyebabkan \mathcal{R}_0 turun sehingga membantu menekan laju penyebaran penyakit.

Selanjutnya dilakukan simulasi pengaruh peningkatan laju kematian nyamuk μ_v terhadap populasi, baik populasi manusia dan populasi nyamuk saat infeksi I. Adapun pengaruh yang terjadi pada populasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 4 dan 5.



Gambar 4 Dinamika populasi manusia (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi, (d) sembuh terhadap waktu t untuk infeksi I pada kondisi tanpa vaksinasi ($p = 0$) dan nilai parameter (μ_v) dinaikkan.

Pengaruh yang terjadi pada populasi nyamuk jika laju kematian nyamuk ditingkatkan dapat dilihat pada Gambar 5.



Gambar 5 Dinamika populasi nyamuk (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi terhadap waktu t untuk infeksi I pada kondisi tanpa vaksinasi ($p = 0$) dan nilai parameter (μ_v) dinaikkan.

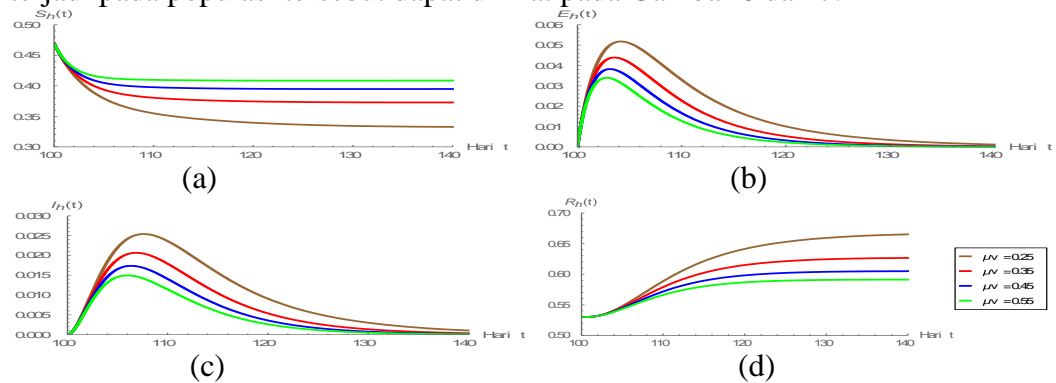
Saat terjadinya infeksi I, populasi manusia pada kelas rentan semakin meningkat. Sedangkan populasi manusia pada kelas yang lainnya semakin menurun. Hal ini dikarenakan peningkatan laju kematian nyamuk, dapat menurunkan laju kematian nyamuk pada kelas terpapar dan kelas terinfeksi. Sehingga menyebabkan manusia pada kelas rentan semakin bertambah.

Sementara untuk populasi nyamuk pada kelas rentan semakin meningkat. Hal ini dikarenakan peningkatan laju kematian nyamuk, menyebabkan penurunan populasi manusia pada kelas terpapar dan kelas terinfeksi. Sehingga nyamuk pada kelas rentan semakin bertambah.

Selanjutnya dilakukan simulasi pengaruh peningkatan laju kematian nyamuk μ_v terhadap populasi saat infeksi II yang merupakan lanjutan dari infeksi I, baik pada populasi manusia dan juga populasi nyamuk. Pada simulasi ini nilai parameter μ_v dan perubahan nilai (\mathcal{R}_0) masih memenuhi kondisi pada infeksi I.

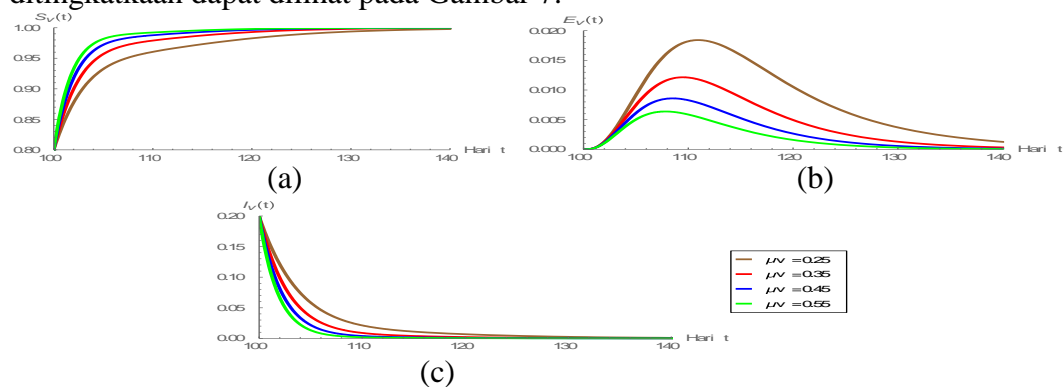
Infeksi II

Selanjutnya dilakukan simulasi pengaruh peningkatan laju kematian nyamuk μ_v terhadap populasi saat infeksi II yang merupakan lanjutan dari infeksi I, baik pada populasi manusia dan juga populasi nyamuk. Adapun pengaruh yang terjadi pada populasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 6 dan 7.



Gambar 6 Dinamika populasi manusia (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi, (d) sembuh terhadap waktu t untuk infeksi I pada kondisi tanpa vaksinasi ($p = 0$) dan nilai parameter (μ_v) dinaikkan.

Pengaruh yang terjadi pada populasi nyamuk jika laju kematian nyamuk ditingkatkan dapat dilihat pada Gambar 7.



Gambar 7 Dinamika populasi nyamuk (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi terhadap waktu t untuk infeksi II pada kondisi tanpa vaksinasi ($p = 0$) dan nilai parameter (μ_v) dinaikkan.

Pada infeksi II yang merupakan lanjutan dari infeksi I, awal simulasi populasi manusia pada kelas rentan semakin meningkat, sedangkan pada kelas populasi manusia yang lainnya semakin menurun. Hal ini dikarenakan peningkatan laju kematian nyamuk dapat menurunkan laju kematian nyamuk pada kelas terpapar dan kelas terinfeksi, sehingga menyebabkan manusia pada kelas rentan semakin bertambah.

Populasi nyamuk, pada awal simulasi kelas yang rentan semakin meningkat. Hal ini dikarenakan peningkatan laju kematian nyamuk menyebabkan penurunan pada manusia terpapar dan terinfeksi. Akibatnya populasi nyamuk pada kelas rentan semakin bertambah.

Selanjutnya dilakukan simulasi laju perubahan efektivitas vaksin (p) terhadap penyebaran penyakit dalam populasi saat infeksi I dan infeksi II.

Simulasi dengan Vaksinasi

Infeksi I

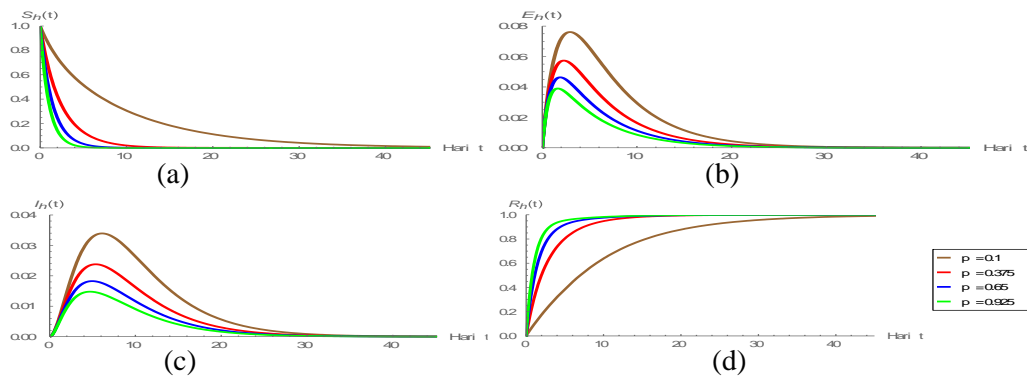
Simulasi ini diperlukan untuk melihat pengaruh efektivitas penggunaan vaksin p terhadap penyebaran penyakit dalam populasi. Terdapat 4 nilai p yang diambil pada interval $[0.1, 0.925]$ dengan langkah 0.275. Nilai parameter μ_v diambil pada interval yang ditetapkan dengan $\mu_v = 0.25$, sedangkan parameter lain tetap dapat dilihat pada Tabel 1. Nilai \mathcal{R}_0 pada saat nilai parameter p ditingkatkan dapat dilihat pada Tabel 3.

Tabel 3
Nilai \mathcal{R}_0 dengan Parameter p Ditingkatkan dan Parameter Lain Tetap

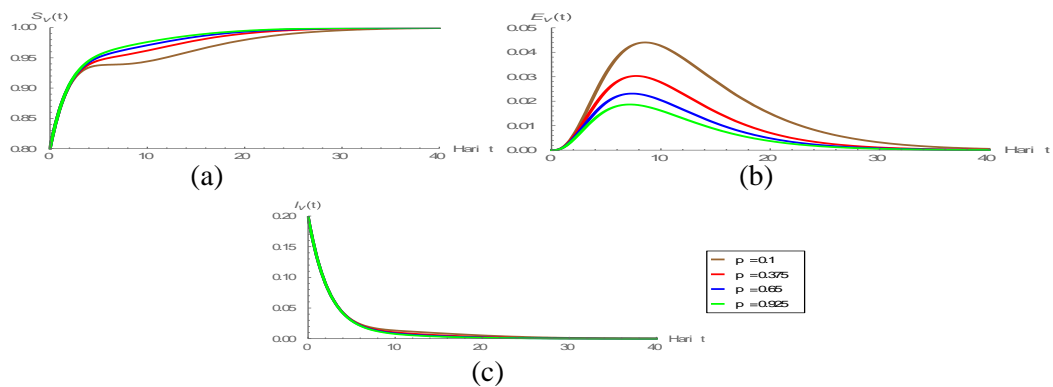
| p | Nilai \mathcal{R}_0 |
|-------|-----------------------|
| 0.1 | 0.0196325 |
| 0.375 | 0.0101397 |
| 0.650 | 0.00770182 |
| 0.925 | 0.00645629 |

Berdasarkan Tabel 3 dapat diperhatikan bahwa nilai \mathcal{R}_0 masih kurang dari 1 bahkan sangat kecil. Meningkatnya efektivitas penggunaan vaksin p menyebabkan \mathcal{R}_0 semakin menurun bahkan semakin kecil sehingga dapat menekan laju penyebaran penyakit. Akibatnya penyakit yang berkembang dalam populasi memiliki peluang yang sangat kecil.

Selanjutnya dilakukan simulasi pengaruh peningkatan efektivitas penggunaan vaksin p terhadap populasi, baik populasi manusia dan populasi nyamuk pada infeksi I. Adapun pengaruh yang terjadi pada populasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 8 dan 9.



Gambar 8 Dinamika populasi manusia (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi, (d) sembuh terhadap waktu t untuk infeksi I ketika efektivitas vaksin (p) dinaikkan



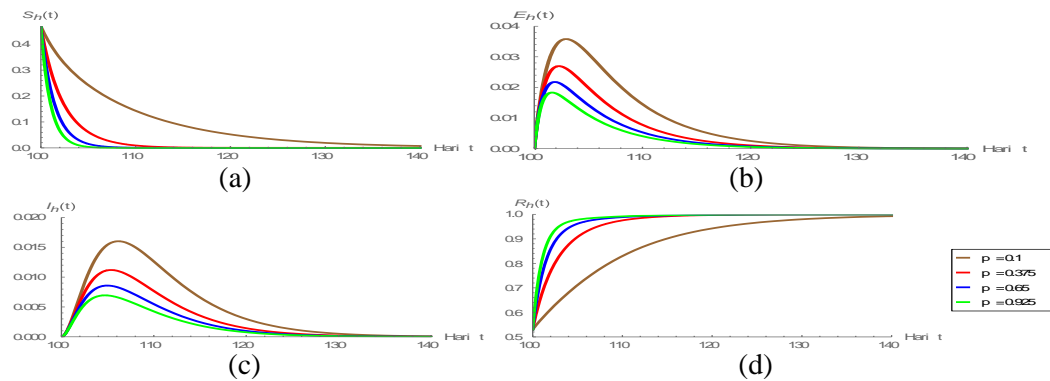
Gambar 9 Dinamika populasi nyamuk (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi terhadap waktu t untuk infeksi I ketika efektivitas vaksin (p) dinaikkan.

Saat terjadinya infeksi ke I jika efektivitas penggunaan vaksin (p) semakin naik, maka jumlah populasi manusia pada kelas yang rentan semakin menurun. Hal ini dikarenakan manusia tersebut telah dilindungi dari epidemi penyakit sehingga menyebabkan manusia yang sembuh semakin bertambah. Sehingga akan menyebabkan manusia terpapar dan terinfeksi semakin menurun.

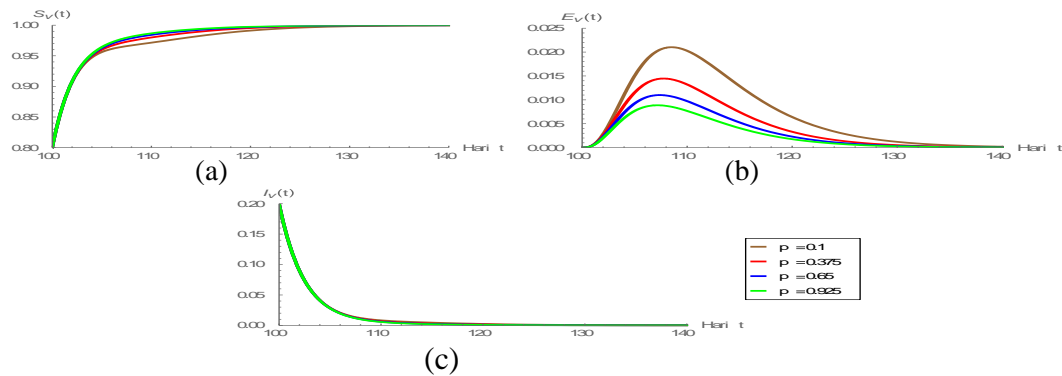
Selanjutnya dilakukan simulasi pengaruh peningkatan efektivitas vaksin (p) terhadap populasi untuk infeksi II yang merupakan lanjutan dari infeksi I.

Infeksi II

Selanjutnya dilakukan simulasi pengaruh peningkatan efektivitas vaksin (p) terhadap populasi untuk infeksi II yang merupakan lanjutan dari infeksi I, baik pada populasi manusia dan populasi nyamuk. Adapun pengaruh yang terjadi pada populasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 10 dan 11.



Gambar 10 Dinamika populasi manusia (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi, (d) sembuh terhadap waktu t untuk infeksi II ketika efektivitas vaksin (p) dinaikkan



Gambar 11 Dinamika populasi nyamuk (a) rentan, (b) terpapar, (c) terinfeksi terhadap waktu t untuk infeksi II ketika efektivitas vaksin (p) dinaikkan.

Pada infeksi ke II yang merupakan lanjutan dari infeksi I jika efektivitas penggunaan vaksin (p) semakin naik, maka jumlah populasi manusia pada kelas yang rentan semakin menurun. Hal ini dikarenakan manusia tersebut telah dilindungi dari epidemi penyakit sehingga menyebabkan manusia yang sembuh semakin bertambah. Sehingga akan menyebabkan manusia pada kelas terpapar dan terinfeksi pun akan semakin menurun.

5 SIMPULAN

Berdasarkan analisis dan pembahasan yang dilakukan terhadap diagram kompartemen modifikasi infeksi ganda dapat disimpulkan,

1. Titik tetap yang diperoleh ada dua yaitu titik tetap tanpa penyakit dan titik tetap endemik. Titik tetap tanpa penyakit untuk infeksi I dan infeksi II stabil untuk kondisi ketika $\mathcal{R}_0 < 1$. Sedangkan titik tetap endemik saat infeksi I dan infeksi II stabil untuk kondisi ketika $\mathcal{R}_0 > 1$.

2. Hasil simulasi saat infeksi I dan infeksi II menunjukkan bahwa meningkatnya laju kematian nyamuk menyebabkan \mathcal{R}_0 turun, sehingga membantu menekan laju penyebaran penyakit.
3. Hasil simulasi juga menunjukkan bahwa meningkatnya laju kematian nyamuk (μ_v) memberi pengaruh terhadap populasi manusia dan nyamuk, yaitu
 - a. Pada infeksi I dan infeksi II, populasi manusia pada kelas rentan mengalami peningkatan. Hal ini dikarenakan peningkatan laju kematian nyamuk menyebabkan penurunan pada kelas nyamuk terpapar dan terinfeksi. Sehingga manusia pada kelas rentan semakin meningkat dan manusia pada kelas lainnya semakin berkurang.
 - b. Pada infeksi I dan infeksi II, awal simulasi populasi nyamuk pada kelas rentan meningkat. Hal ini dikarenakan peningkatan laju kematian nyamuk menyebabkan penurunan pada kelas manusia terpapar dan terinfeksi. Sehingga nyamuk pada kelas rentan semakin bertambah.
4. Hasil simulasi juga menunjukkan bahwa meningkatnya efektivitas vaksin (p) memberi pengaruh terhadap populasi manusia dan nyamuk saat infeksi I dan infeksi II, yaitu semakin meningkatnya efektivitas penggunaan vaksin menyebabkan populasi manusia pada kelas rentan semakin menurun dan manusia yang sembuh semakin bertambah. Akibatnya manusia pada kelas terpapar semakin menurun dan populasi manusia pada kelas yang terinfeksi pun semakin menurun. Sehingga laju penyebaran penyakit dalam populasi sangat kecil.
5. Infeksi I bisa terjadi pada seluruh populasi yang rentan. Sementara infeksi II merupakan lanjutan dari infeksi I, sehingga total populasi infeksi kedua merupakan lanjutan dari infeksi I. Akibatnya total populasi infeksi II sudah lebih sedikit jika dibandingkan dengan infeksi I.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chakraborty T, Alcamo IE, Heymann DL. 2008. *Dengue Fever and Other Hemorrhagic Viruses*. New York: Chelsea House.
- [2] Derouich M, Boutayeb A, Twizell EH. 2003. A model of dengue fever. *BioMedical Engineering OnLine*. 2:4. doi:10.1186/1475-925X-2-4.
- [3] Driessche PVD, Watmough J. 2008. Chapter 6: Further Notes on The Basic Reproduction Number. *Mathematical Epidemiology*. Lecture Notes Mathematics, Springer. 1945: 159-178.
- [4] Edelstein-Keshet L. 1988. *Mathematical Models in Biology*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104).
- [5] Newton EA, Reiter P. 1992. A model of the transmission of dengue fever with an evaluation of the impact of ultra-low volume (ULV) insecticide applications on dengue epidemics. *Am J Trop Med Hyg*. 47(6): 709-720.
- [6] Tu PNV. 1994. *Dynamical System, An Introduction with Application in Economics and Biology*. Heidelberg, Germany, Springer-Verlag.
- [7] [WHO] World Health Organisation. 2016. *Dengue: Immunization, Vaccines and Biologicals*. Media Center WHO [Internet]. Tersedia pada: <http://www.who.int/immunization/diseases/dengue/en/>

