

APLIKASI KONTROL OPTIMUM PADA MODEL PEMANENAN IKAN DI ZONA NONCADANGAN DENGAN MEMPERTIMBANGKAN ZONA CADANGAN

R. NURBAYAN¹, T. BAKHTIAR², A. KUSNANTO²

Abstrak

Tulisan ini akan membahas analisa model matematika tentang sistem dinamika sumber daya perikanan pada suatu wilayah perairan. Wilayah perairan yang dipertimbangkan terdiri dari dua zona: zona noncadangan (ikannya boleh ditangkap) dan zona cadangan (ikannya tidak boleh ditangkap), di mana kepadatan populasi ikan di masing-masing zona dinyatakan dalam bentuk persamaan diferensial taklinear. Berdasarkan model tersebut, ingin diketahui bagaimana kebijakan penangkapan ikan yang optimal. Oleh karena itu, sebuah kebijakan penangkapan ikan yang optimal telah dianalisis menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Suatu contoh ilustratif telah diberikan dengan mempertimbangkan studi kasus penangkapan *Sardinella lemuru* di Selat Bali. Simulasi numerik tersebut memberikan informasi bahwa secara umum model dapat menggambarkan dinamika populasi ikan yang mempertimbangkan dua zona di atas.

Kata Kunci: prinsip maksimum Pontryagin, zona cadangan, zona noncadangan.

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Kegiatan penangkapan dan pembudidayaan ikan telah berlangsung ribuan bahkan puluhan ribu tahun yang lalu. Dengan demikian, kegiatan perikanan merupakan proses pembelajaran kolektif dalam kurun waktu yang cukup lama [5]. Perikanan telah menjadi aspek yang tak terpisahkan dari sejarah peradaban manusia sejak zaman prasejarah, zaman batu, hingga zaman modern. Sejak zaman manusia purba (*Homo Erectus* dan *Australopithecus*) ikan telah menjadi salah satu bahan makanan manusia-manusia purba tersebut. Pada zaman batu sekitar 5000 tahun yang lalu, penemuan arkeologi di gua Skipshelleren, Norwegia menemukan adanya “desa nelayan” pertama. Perikanan menjadi masyarakat setempat untuk memanfaatkan ikan sebagai sumber pangan. Pada fase selanjutnya, perikanan juga telah dilakukan pada masa kekaisaran Romawi kuno, Mesir kuno, dan peradaban Cina [5].

¹ Mahasiswa Program Sarjana, Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

²Departemen Matematika, Fakultas Ilmu Pengetahuan Alam, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga Bogor, 16680.

Pada abad modern ini, kegiatan perikanan semakin berkembang dari sekedar urusan ekonomi lokal menjadi kegiatan ekonomi global yang menghasilkan miliaran dolar. Saat ini hasil perikanan telah mengarah pada produk bernilai tambah. Sebagai contoh pada tahun 2012, neraca perdagangan menunjukkan bahwa dari sektor perikanan, Indonesia surplus USD 3,52 miliar atau 81,11% dari total transaksi perdagangan ekspor impor [6].

Selama beberapa dekade terakhir telah dilakukan beberapa penelitian mengenai sumber daya perikanan. Kitabatake (1982) mengembangkan model dinamik untuk sumber daya perikanan tentang hubungan mangsa-pemangsa berdasarkan data amatan dari Danau Kasumigaura di Jepang. Ragozin dan Brown (1985) mempelajari kebijakan penangkapan yang optimal untuk sistem mangsa-pemangsa. Mangsa tidak memiliki nilai jual dan pemangsa ditangkap secara selektif. Chaudhuri (1986) mengusulkan sebuah model untuk mempelajari penangkapan gabungan pada dua spesies *competing fish*. Chaudhuri juga berhasil menunjukkan kesetimbangan bionomik di area yang ikannya boleh ditangkap dan berhasil menunjukkan adanya kemungkinan terjadinya kepunahan pada salah satu spesies ikan tersebut [2].

Beberapa literatur di atas membahas model yang mempertimbangkan satu zona saja, yaitu zona yang ikannya boleh ditangkap. Akan tetapi, aspek zona cadangan (ikannya tidak boleh ditangkap) belum dimodelkan dan belum dianalisis. Oleh karena itu, aspek zona cadangan merupakan masalah yang menarik untuk dikaji. Karena ada dua zona yang dipertimbangkan, maka sistem dinamika yang terjadi adalah sistem dinamika populasi ikan di zona cadangan dan zona noncadangan. Model yang mempertimbangkan zona cadangan adalah model yang digagas oleh Dubey *et al.* [2]. Karena belum dibahas contoh ilustratifnya, maka studi kasus tentang simulasi numerik pemanenan ikan menjadi hal yang menarik untuk dipelajari.

Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang, tujuan karya ilmiah ini adalah sebagai berikut:

1. Mendeskripsikan model dinamik pertumbuhan dan pemanenan ikan di zona cadangan dan zona noncadangan.
2. Mengaplikasikan prinsip maksimum Pontryagin dalam menentukan kebijakan penangkapan ikan yang memaksimalkan keuntungan tanpa membahayakan habitatnya.

TINJAUAN PUSTAKA

Model Pertumbuhan Organisme

Proses pemodelan umumnya membutuhkan banyak keahlian, pengalaman, dan ilmu pengetahuan. Proses ini menetapkan suatu penyederhanaan masalah yang menggambarkan kejadian nyata. Sering kali di dalamnya terdapat suatu persamaan diferensial. Metode matematika tertentu digunakan untuk melakukan proses ini. Penyederhanaan masalah ini disebut model matematika untuk kejadian nyata [3].

Model paling sederhana untuk menggambarkan pertumbuhan populasi suatu organisme adalah $\dot{N} = rN$, dengan $N(t)$ merupakan populasi pada waktu t dan $r > 0$ adalah laju pertumbuhan. Model $\dot{N} = rN$ merupakan model pertumbuhan eksponensial yang memiliki solusi $N(t) = N_0 e^{rt}$ dengan N_0 merupakan populasi pada saat $t = 0$. Jelas bahwa model pertumbuhan eksponensial tidak bisa berlaku selamanya [10].

Efek dari keterbatasan ruang dan sumber daya, sifat biologis populasi, dan demografi menjadi asumsi yang dipertimbangkan dalam pemodelan. Laju pertumbuhan per kapita \dot{N}/N menurun ketika N menjadi cukup besar. Untuk N yang kecil, laju pertumbuhan sama dengan r . Akan tetapi, bila populasi lebih besar dari daya dukung lingkungan K , laju pertumbuhan menjadi negatif: laju kematian lebih tinggi daripada laju kelahiran. Sebuah cara yang menurut ilmu matematika untuk memasukan ide ini adalah asumsi bahwa laju pertumbuhan per kapita \dot{N}/N menurun secara linear terhadap N . Hal ini menjadi dasar konsep persamaan logistik $\dot{N} = rN(1 - N/K)$ yang pertama kali diajukan untuk model pertumbuhan populasi manusia oleh Verhulst pada tahun 1838. Model logistik ini memiliki solusi

$$N(t) = \frac{K}{Ke^{-rt} + 1} \quad (1)$$

dan memiliki titik tetap tak stabil $N^* = 0$ serta titik tetap stabil $N^* = K$, artinya $N(t) \rightarrow K$ seiring dengan $t \rightarrow \infty$. Dengan kata lain, $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = K$ [10].

Sumber daya alam yang dapat diperbarui memiliki beberapa konsep pengukuran ketersediaan yang sering digunakan. Salah satu konsep pengukuran tersebut adalah kapasitas daya dukung (*carrying capacity*). Pengukuran kapasitas ini didasarkan pada pemikiran bahwa lingkungan memiliki kapasitas maksimum untuk mendukung suatu pertumbuhan organisme. Sebagai contoh adalah ikan dapat tumbuh di kolam secara positif jika daya dukung lingkungannya masih besar. Namun, pertumbuhan yang terus menerus akan menimbulkan kompetisi terhadap ruang dan makanan sampai daya dukung lingkungan tidak mampu lagi mendukung pertumbuhan [4].

Proses eksploitasi atau menangkap ikan di suatu perairan membutuhkan berbagai sarana. Sarana tersebut merupakan faktor input yang dalam literatur

perikanan biasa disebut sebagai upaya (*effort*). Upaya adalah indeks dari berbagai input seperti ekstraksi sumber daya perikanan yang merupakan aktifitas ekonomi dengan menggunakan input tenaga kerja, kapal, alat tangkap, mesin, bahan bakar, dan sebagainya. Adapun koefisien kemampuan tangkap ikan (koefisien *catchability*) merupakan proporsi stok ikan yang dapat ditangkap oleh satu unit upaya [4].

Prinsip Maksimum Pontryagin

Prinsip ini merupakan suatu cara untuk menemukan suatu vektor kontrol $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_m(t)]$ yang kontinu dan $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$ yang merupakan suatu vektor *state* padanan yang dapat diturunkan serta didefinisikan pada interval waktu tertentu $[t_0, t_1]$ sehingga memaksimumkan fungsional objektif

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt,$$

dengan kendala persamaan diferensial

$$\dot{x}_i(t) = g_i(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad i = 1, \dots, n,$$

kondisi awal (*initial conditions*)

$$x_i(t_0) = x_{i0}, \quad i = 1, \dots, n,$$

salah satu kondisi akhir (*terminal conditions*) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_i(t_1) &= x_{i1}, & i &= 1, \dots, p, \\ x_i(t_1) &\geq x_{i1}, & i &= p+1, \dots, q, \\ x_i(t_1) &\text{bebas} & i &= q+1, \dots, n, \end{aligned}$$

dan variabel kontrol $\mathbf{u}(t) \in U$ dengan U merupakan suatu himpunan yang ditetapkan dalam R^m . Diasumsikan bahwa $f, g_i, \partial f / \partial x_j$ dan $\partial g_i / \partial x_j$ adalah fungsi-fungsi kontinu untuk setiap $i = 1, \dots, n$ dan $j = 1, \dots, n$. [7].

Teorema. Agar $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)$ menjadi optimum untuk masalah di atas, diperlukan keberadaan suatu konstanta λ_0 dan fungsi-fungsi kontinu $\boldsymbol{\lambda}(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$, di mana untuk setiap $t_0 \leq t \leq t_1$ terdapat $(\lambda_0(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \neq (0, 0)$ sehingga untuk setiap $t_0 \leq t \leq t_1$ dipenuhi $H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t)) \leq H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$, dengan fungsi hamilton H didefinisikan sebagai berikut:

$$H(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})$$

kecuali pada titik-titik diskontinuitas $\mathbf{u}^*(t)$,

$$\mathbf{u}^*(t) = \begin{cases} M & \text{koefisien dari } u(t) > 0, \\ m & \text{koefisien dari } u(t) < 0, \\ M^* & H_u = 0. \end{cases}$$

$$\dot{\lambda}_i(t) = -\partial H(t, \mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) / \partial x_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Selanjutnya

$$\lambda_0 = 1 \text{ atau } \lambda_0 = 0$$

dan akhirnya salah satu kondisi transversalitas di bawah ini terpenuhi:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t_1) &\text{ tidak dapat ditentukan,} & i &= 1, \dots, p, \\ \lambda_i(t_1) &\geq 0 \text{ (=0 jika } x^*_i(t_1) > x_{i1}) & i &= p + 1, \dots, q, \\ \lambda_i(t_1) &= 0 & i &= q + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Prinsip maksimum Pontryagin memiliki kajian tentang kontrol *bang-bang* dan kontrol *singular*. Jika u terbatas $m \leq u(t) \leq M$ dan H linear terhadap u maka kontrol optimum merupakan kontrol *bang-bang* dan jika $H_u = 0$ maka kontrol optimum merupakan kontrol *singular*. Dengan demikian, kontrol optimumnya adalah [7]:

Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah alternatif lain dari metode Taylor. Metode ini memiliki ketelitian yang tinggi dan tanpa membutuhkan perhitungan turunan. Perhatikan masalah nilai awal berikut:

$$\dot{y} = f(x, y); y(x_0) = y_0,$$

dengan y merupakan fungsi skalar atau vektor yang belum diketahui dan bergantung pada x . Untuk suatu $h > 0$ yang disebut riap (*increment*), kemudian didefinisikan untuk $n = 0, 1, 2, \dots, N$, dan titik $x_n = x_0 + nh$, terdapat suatu nilai aproksimasi $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N)$ yang diperoleh melalui formula [3]:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n1} + 2k_{n2} + 2k_{n3} + k_{n4}),$$

dengan

$$k_{n1} = f(x_n, y_n),$$

$$k_{n2} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_{n1}}{2}\right),$$

$$k_{n3} = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{hk_{n2}}{2}\right),$$

$$k_{n4} = f(x_n + h, y_n + hk_{n3}).$$

MODEL MATEMATIKA

Model Pertumbuhan Ikan di Zona Cadangan dan Noncadangan

Sumber daya ikan merupakan sumber daya milik bersama (*common resources*) dan bersifat akses terbuka (*open access*) sehingga semua lapisan masyarakat berhak memanfaatkannya. Hal ini bisa memicu eksploitasi sumber daya perikanan secara besar-besaran dan tidak terkontrol [4]. Oleh sebab itu perlu adanya upaya-upaya untuk mencegah kondisi tersebut. Salah satunya dengan membuat peraturan tentang wilayah pemanfaatan ruang laut.

Kegiatan pemanfaatan ruang laut memiliki beberapa aturan tipologi, salah satunya adalah tentang adanya zona preservasi. Zona preservasi adalah zona tertutup untuk umum, tidak ada pengambilan sumber daya yang diizinkan. Setiap

yang ada di zona ini harus mendapatkan izin. Selain itu, ada juga zona konservasi, yaitu zona yang melakukan perlindungan dan konservasi terhadap suatu sumber daya tertentu dan mengizinkan kegiatan pengambilan sumber daya dengan tetap memperhatikan keberlanjutan (*sustainability*) dari sumber daya tersebut [8].

Pemodelan ekosistem perairan yang dibahas adalah model perikanan yang mempertimbangkan aturan ruang laut di atas. Misalkan suatu ruang laut tertentu didefinisikan terdiri dari zona noncadangan dan zona cadangan. Kemudian ada aturan bahwa penangkapan ikan di zona noncadangan diperbolehkan secara terbuka. Sebaliknya, penangkapan ikan di zona cadangan tidak diperbolehkan. Diasumsikan bahwa pertumbuhan populasi ikan di setiap zona mengikuti model logistik. Dengan demikian, dinamika populasi ikan di zona noncadangan dan zona cadangan (model tanpa pemanenan) dapat disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \phi x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - r_1 x(t) + r_2 y(t), \\ \dot{y} &= \theta y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{L}\right) + r_1 x(t) - r_2 y(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Keterangan:

- $x(t)$: populasi ikan (ton) di zona noncadangan pada waktu t (tahun),
- $y(t)$: populasi ikan (ton) di zona cadangan pada waktu t (tahun),
- ϕ : laju pertumbuhan populasi ikan di zona noncadangan (% per tahun),
- θ : laju pertumbuhan populasi ikan di zona cadangan (% per tahun),
- r_1 : laju populasi ikan yang bermigrasi dari zona noncadangan ke zona cadangan (% per tahun),
- r_2 : laju populasi ikan yang bermigrasi dari zona cadangan ke zona noncadangan (% per tahun),
- K : daya dukung lingkungan di zona noncadangan (ton),
- L : daya dukung lingkungan di zona cadangan (ton),

Asumsi yang digunakan pada model (2) adalah sebagai berikut:

1. Parameter $r_1, r_2, \phi, \theta, K$ dan L diasumsikan sebagai konstanta positif.
2. Jika tidak ada migrasi populasi ikan dari zona cadangan ke zona noncadangan ($r_2 = 0$) dan $\phi - r_1 < 0$, maka $\dot{x} < 0$. Ketika $\dot{x} < 0$ berarti laju pertumbuhan populasi ikan di zona noncadangan bernilai negatif. Hal tersebut tidak mungkin terjadi dalam populasi suatu makhluk hidup yang mengikuti model logistik. Oleh sebab itu, diasumsikan $\phi - r_1 > 0$.
3. Jika tidak ada migrasi populasi ikan dari zona noncadangan ke zona cadangan ($r_1 = 0$) dan $\theta - r_2 < 0$, maka $\dot{y} < 0$. Ketika $\dot{y} < 0$ berarti laju pertumbuhan populasi ikan di zona cadangan bernilai negatif. Hal tersebut tidak mungkin terjadi dalam populasi suatu makhluk hidup yang mengikuti model logistik. Oleh sebab itu, asumsi yang digunakan agar kondisi tersebut tidak terjadi adalah $\theta - r_2 > 0$.

Kebijakan Penangkapan Optimum

Prinsip maksimum Pontryagin merupakan suatu konsep untuk menentukan kebijakan penangkapan ikan yang optimal. Prinsip ini diaplikasikan pada model pemanenan ikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \phi x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - r_1 x(t) + r_2 y(t) - qE(t)x(t), x(0) = x_0, \\ \dot{y} &= \theta y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{L}\right) + r_1 x(t) - r_2 y(t), y(0) = y_0, \end{aligned} \quad (3)$$

dengan E merupakan total upaya penangkapan ikan di zona noncadangan (trip per tahun) pada waktu t dan q merupakan koefisien *cathability* populasi ikan di zona noncadangan (ton per trip). Nilai sekarang (*present value*) dari pendapatan bersih dengan waktu kontinu dapat dinyatakan dalam bentuk fungsional sebagai berikut:

$$J = \int_0^T e^{-\delta t} [pqx(t) - c]E(t) dt,$$

dengan δ sebagai tingkat diskonto kontinu tahunan. Kemudian bahasan sekarang adalah memaksimalkan fungsional J dengan kendala persamaan diferensial (3). Adapun kendala peubah kontrolnya yaitu kontrol terbatas $0 \leq E \leq E_{max}$.

Dengan demikian, fungsi hamiltonnya adalah:

$$\begin{aligned} H &= e^{-\delta t} (pqx - c)E + \gamma_1(t) \left[\phi x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - r_1 x + r_2 y - qEx \right] \\ &\quad + \gamma_2(t) \left[\theta y \left(1 - \frac{y}{L}\right) + r_1 x - r_2 y \right] \\ &= [e^{-\delta t} (pqx - c) - \gamma_1 qx]E + \gamma_1(t) \left[\phi x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - r_1 x + r_2 y \right] \\ &\quad + \gamma_2(t) \left[\theta y \left(1 - \frac{y}{L}\right) + r_1 x - r_2 y \right] \\ &= \tau(t)E + \gamma_1(t) \left[\phi x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - r_1 x + r_2 y \right] \\ &\quad + \gamma_2(t) \left[\theta y \left(1 - \frac{y}{L}\right) + r_1 x - r_2 y \right]. \end{aligned}$$

Ketika $\tau(t) = 0$, maka fungsi hamilton H menjadi tak bergantung pada peubah kontrol E ($H_E = 0$). Ini adalah syarat perlu untuk kontrol *singular* E^* dengan batas $0 < E^* < E_{max}$. Berdasarkan (1), kontrol optimum dari kebijakan penangkapan ikan yang optimal adalah sebagai berikut:

$$E(t) = \begin{cases} E_{max}, & \tau(t) > 0, \\ 0, & \tau(t) < 0, \\ E^*, & \tau(t) = 0, \end{cases} \quad \text{dengan } \tau(t) = e^{-\delta t} (pqx - c) - \gamma_1 qx. \quad (4)$$

STUDI KASUS

Potensi *Sardinella lemuru* di Selat Bali

Perairan Selat Bali berbentuk corong dengan lebar bagian sebelah utara kira-kira 2,5 km dan bagian selatan kurang lebih 55 km, dan dengan luas perairan kira-kira 2.500 km². Perairan ini cenderung dipengaruhi oleh massa air dari Samudra Indonesia dibanding oleh massa air dari Laut Flores karena bentuknya seperti corong yang menghadap ke selatan. Berdasarkan karakteristik oseanografis dan sumber daya ikannya, perairan laut Selat Bali merupakan daerah ruaya dari ikan lemuru sehingga perikanan lemuru di Selat Bali dinamakan *Sardinella lemuru* yang sangat spesifik dan satu-satunya di Indonesia [9].

Ditinjau dari segi lingkungan, di perairan Selat Bali terjadi proses penaikan air pada musim timur sehingga perairan ini menjadi kaya akan bahan makanan yang sangat dibutuhkan oleh ikan-ikan lemuru. Jenis ikan lemuru ini biasanya mendiami daerah-daerah yang mengalami proses penaikan air, sehingga dapat mencapai biomassa yang tinggi. Oleh karena itu ikan lemuru tergantung sekali kepada perubahan-perubahan lingkungan perairan [9].

Algoritma Simulasi Numerik

Simulasi numerik yang dilakukan adalah aplikasi pemanenan pada jenis ikan lemuru (*Sardinella lemuru*) yang dijelaskan dalam literatur di atas. Simulasi tersebut melibatkan seperangkat persamaan di bawah ini:

$$\dot{x} = \phi x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) - r_1 x(t) + r_2 y(t) - qE(t)x(t), x(0) = x_0,$$

$$\dot{y} = \theta y(t) \left(1 - \frac{y(t)}{L}\right) + r_1 x(t) - r_2 y(t), y(0) = y_0,$$

$$\dot{\gamma}_2 = -\gamma_1 r_2 - \gamma_2 \left(\theta - \frac{2\theta y}{L} - r_2\right), \gamma_2(T) = 0,$$

$$\dot{\gamma}_1 = -e^{-\delta t} p q E - \gamma_1 \left(\phi - \frac{2\phi x}{K} - r_1 - qE\right) - \gamma_2 r_1, \gamma_1(T) = 0,$$

Selain itu, digunakan pula nilai-nilai parameter dari beberapa sumber pustaka. Namun, terdapat pula nilai parameter hipotetik tertentu yang dipilih sehingga memenuhi beberapa asumsi yang digunakan, yaitu asumsi satu, dua dan tiga. Berikut adalah nilai parameter yang disimulasikan:

Tabel 1
Nilai-nilai Parameter Simulasi Numerik

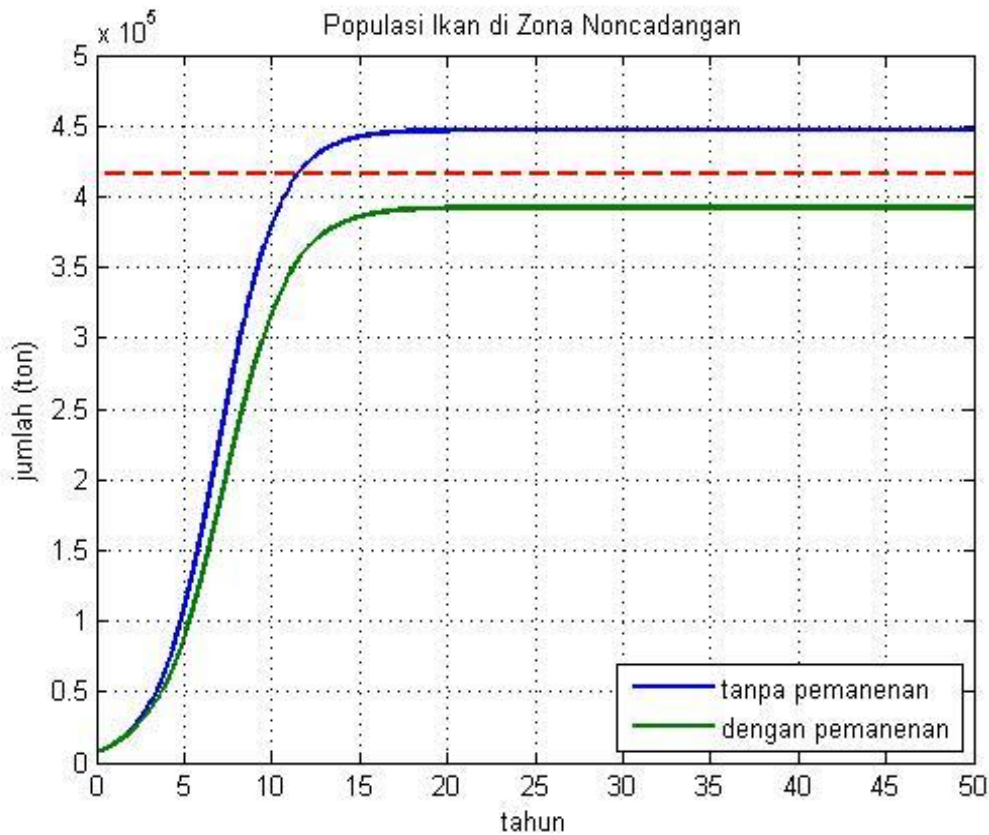
No	Parameter	Nilai	Satuan	Pustaka
1	ϕ	50	% per tahun	[9]
2	θ	65	% per tahun	Hipotetik
3	r_1	20	% per tahun	Hipotetik
4	r_2	25	% per tahun	Hipotetik

5	q	0,0000456	ton per trip	[9]
6	K	416.304,4	ton per tahun	[9]
7	L	450.000	ton per tahun	Hipotetik
8	p	5.000.000	Rp/ton	[1]
9	c	744.456	Rp/trip	[11]
10	δ	8	% per tahun	[5]
11	(x_0, y_0)	(1700, 1900)	ton	Hipotetik
12	$0 < E(t) < E_{max}$	$0 < E(t) < 1970$	trip per tahun	Hipotetik

Metode yang dipakai dalam menyelesaikan kendala persamaan diferensial adalah metode Runge-Kutta. Berikut ini adalah bentuk algoritmanya [3]:

1. DEF $f(x, y) =$ (masukan fungsi $f(x, y)$)
2. INPUT "masukan nilai awal x and y "; x, y
3. INPUT "masukan *step size* dan nilai maksimum dari x "; $h, x_{max}; n = x_{max}/h$
4. FOR $i = 1$ TO n STEP h
 - $k_1 = f(x, y)$
 - $xx = x + h/2$
 - $yy = y + h \frac{k_1}{2}$
 - $k_2 = f(xx, yy)$
 - $yy = y + h \frac{k_2}{2}$
 - $k_3 = f(xx, yy)$
 - $xx = x + h$
 - $yy = y + h \frac{k_3}{2}$
 - $k_4 = f(xx, yy)$
 - $x = x + h$
 - $y = y + h * (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$
 - PRINT x, y
- NEXT i
- END.

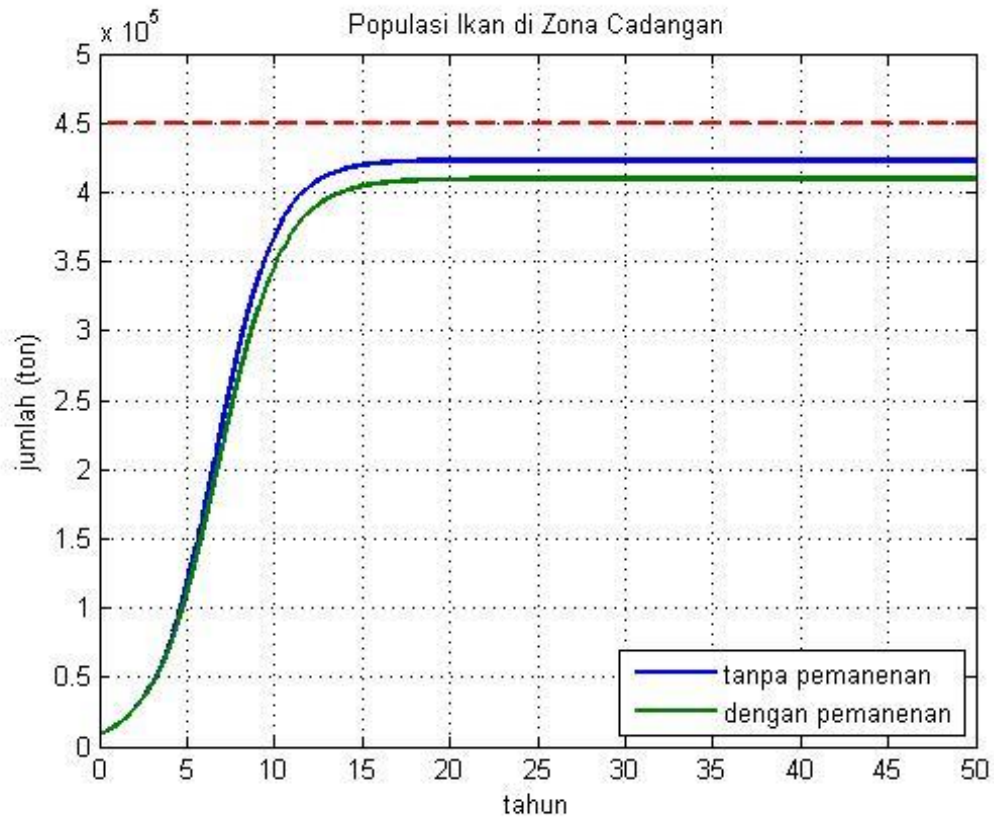
Berikut ini adalah hasil yang diperoleh dari simulasi numerik :



Gambar 1 Bidang Solusi Populasi Ikan di Zona Noncadangan

Gambar 1 menunjukkan bidang solusi populasi ikan di zona noncadangan. Terdapat dua bidang solusi yang dipelajari, yaitu bidang solusi model tanpa pemanenan dan bidang solusi model dengan pemanenan. Terlihat bahwa pada model tanpa pemanenan solusi populasi ikan di zona noncadangan (x) konvergen ke suatu nilai di atas daya dukung lingkungan. Sebaliknya, pada model dengan pemanenan, solusi x konvergen ke suatu nilai di bawah daya dukung lingkungan. Ketika nilai x konvergen ke suatu nilai di bawah daya dukung lingkungan, secara biologis kondisi tersebut mengartikan bahwa lingkungan mampu mendukung pertumbuhan secara optimal.

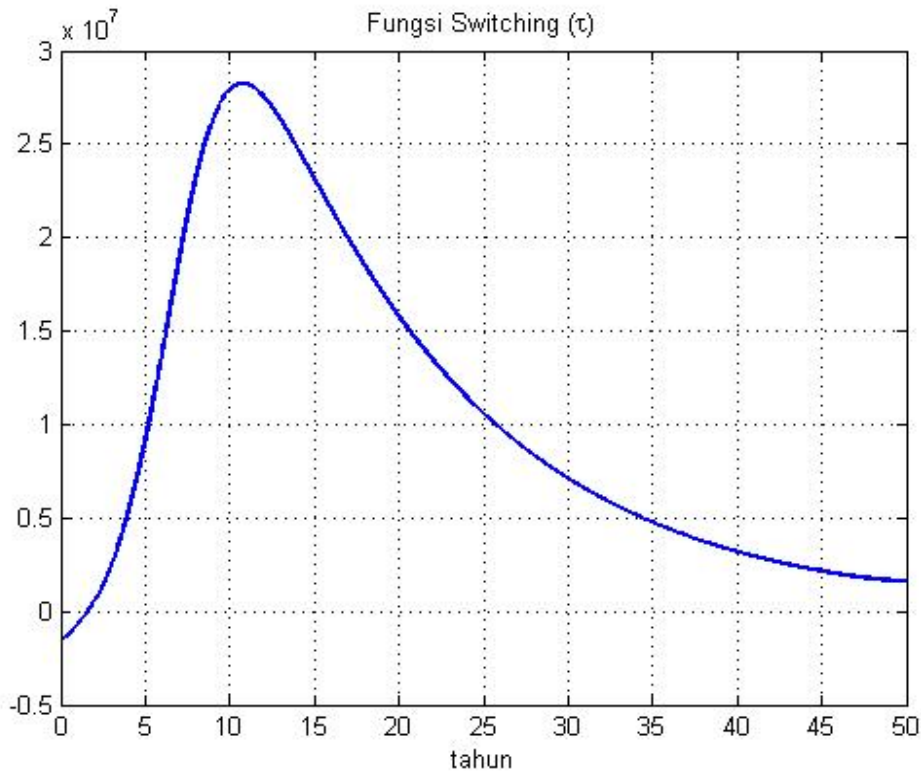
Model tanpa pemanenan menunjukkan kondisi populasi ikan yang konvergen ke suatu nilai di atas daya dukung lingkungan. Secara biologis kondisi tersebut menerangkan bahwa lingkungan tidak mampu mendukung pertumbuhan populasi ikan secara optimal. Oleh sebab itu, diperlukan upaya pemanenan untuk mencegah terjadinya kondisi tersebut.



Gambar 2 Bidang Solusi Populasi Ikan di Zona Cadangan

Gambar 2 menunjukkan bidang solusi populasi ikan di zona cadangan. Terdapat dua bidang solusi yang dipelajari yaitu bidang solusi model tanpa pemanenan dan bidang solusi model dengan pemanenan. Terlihat bahwa model tanpa pemanenan dan model dengan pemanenan memiliki solusi populasi ikan di zona cadangan (y) yang konvergen ke suatu nilai di bawah daya dukung lingkungan. Hal ini menunjukkan bahwa secara biologis lingkungan masih mampu mendukung pertumbuhan populasi ikan secara optimal.

Selain itu, dapat dilihat pula bahwa solusi y pada model pemanenan berada di bawah solusi y model tanpa pemanenan. Secara matematis hal ini terjadi akibat pengaruh tidak langsung dari zona noncadangan. Ketika dilakukan pemanenan, proporsi populasi ikan yang bermigrasi dari zona noncadangan lebih sedikit dibandingkan proporsi migrasi pada model tanpa pemanenan.

Gambar 3 Solusi Fungsi *Switching* τ

Berdasarkan (1), solusi fungsi *switching* pada gambar 3 merupakan koefisien dari variabel kontrol E . Fungsi ini digunakan untuk menentukan interval waktu dalam skema pemanenan ikan. Berdasarkan (4), ketika fungsi *switching* bernilai positif maka dilakukan upaya pemanenan sebesar E_{max} . Sebaliknya, ketika bernilai negatif maka pemanenan adalah sebesar nol (tidak ada upaya pemanenan).

SIMPULAN

Model pertumbuhan dan pemanenan ikan (logistik) telah mampu menggambarkan kondisi populasi ikan di zona cadangan dan noncadangan. Telah digunakan pula prinsip maksimum Pontryagin dalam menentukan kebijakan penangkapan ikan yang optimal. Solusi populasi ikan di zona noncadangan (x) dan di zona cadangan (y) diselesaikan secara numerik menggunakan metode Runge-Kutta. Melalui simulasi numerik, solusi x dan y ditentukan pada dua kondisi yang berbeda, yaitu pada kondisi model tanpa pemanenan dan kondisi model dengan pemanenan.

Akhirnya, disimpulkanlah bahwa berdasarkan simulasi pemanenan *Sardinella lemuru* di Selat Bali, pada zona noncadangan harus dilakukan upaya pemanenan agar populasi ikan tidak melebihi daya dukung lingkungan. Selain itu, secara umum model ini bisa dipakai untuk simulasi-simulasi ilustratif lainnya asalkan ada dua zona yang dipertimbangkan: zona noncadangan dan zona cadangan.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Chevny AA. 2013. Ikan lemuru terbatas, produksi pengalengan ikan turun. [diunduh 2014 Apr 3]. Tersedia pada: <http://m.bisnis.com/industri/read/20131111/99/185702/ikan-lemuru-terbatas-produksi-industri-pengalengan-ikan-turun>.
- [2] Dubey *et al.* 2003. A model for fishery resource with reserve area. *J Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 4:625 – 637.
- [3] Farlow SJ. 1994. *An Introduction to Differential Equations and Their Application*. Singapore(SGP): McGraw-Hill Book Co.
- [4] Fauzi A. 2004. *Ekonomi Sumber Daya Alam dan Lingkungan*. Jakarta(ID): PT Gramedia Pustaka Utama.
- [5] Fauzi A. 2010. *Ekonomi Perikanan*. Jakarta(ID): PT Gramedia Pustaka Utama.
- [6] Hendriyana A. 2013. Strategi ekonomi biru untuk tingkatkan produksi perikanan dan kelautan. [diunduh 2014 Mei 1]. Tersedia pada: <http://www.unpad.ac.id/2013/10/strategi-ekonomi-biru-untuk-tingkatkan-produksi-perikanan-dan-kelautan/>.
- [7] Kamien MI, and Schwartz NL. 2012. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Control Optimal in Economics and Management*. Second Ed. Amsterdam(NL): Elsevier Science B. V.
- [8] Pamungkas A. 2010. Integrasi perencanaan konvensional dengan perencanaan pesisir. *J Mitra Bahari*. 4(2):42-54.
- [9] Setyohadi D. 2009. Studi potensi dan dinamika stok ikan lemuru (*Sardinella lemuru*) di selat bali serta alternatif penangkapannya. *J Perikanan*. 11(1):78-86.
- [10] Strogatz SH. 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Massachusetts(US): Perseus Books Publishing, L.L.C.
- [11] Wagiantoro FA. 2014. Analisis Bioekonomi untuk Pengelolaan Sumber Daya Ikan Tembang (*Sardinella fimbriata*) yang Didaratkan di TPI Blanakan, Subang, Jawa Barat [Skripsi]. Bogor (ID): Institut Pertanian Bogor.

