MASALAH VARIASIONAL UNTUK PERSAMAAN BEDA DALAM GRAF TERBOBOTI

AGAH D. GARNADI & ELLIS KHATIZA

Department of Mathematics,
Faculty of Mathematics and Natural Sciences,
Bogor Agricultural University
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor, 16680 Indonesia

Abstract. Dalam tulisan ini, disajikan perumusan variasional masalah syarat batas dalam kerangka sistem diskrit. Melalui perumusan tersebut, diperoleh Prinsip Maksimum. Selain itu, diperoleh solusi masalah syarat batas yang dinyatakan oleh fungsi Green atas struktur diskrit.

Pendahuluan

Dalam sistem diskret, graf menggambarkan suatu alat dasar untuk mempelajari hubungan antar unsur. Baru-baru ini muncul sejumlah artikel menarik dalam literatur yang tujuannya meniru sifat yang ditemui dalam permasalahan persamaan diferensial parsial yang berlaku atas graf. Khususnya misalnya analogi *Discrete Laplacian* telah dipertimbangkan, kemudian *Discrete Green Function* diperkenalkan dan ditelaah (lihat misalnya Chung dan Yau [3]). Lebih aktual lagi, Berenstein dan Chung [2] melangkah lebih jauh lagi melakukan penganalogian dengan memperkenalkan gradien diskret dan prinsip Dirichlet, meninjau masalah Dirichlet dan Neuman serta pertanyaan terkait dengan masalah identifikasi [1]. Karena kita berhubungan dengan masalah dimensional hingga, rumus yang ditemui kurang lebih sedikit ekuivalen, dan penting kiranya untuk memperoleh penyajian yang paling sederhana. Disini, kita mencoba untuk menirukan formulasi variasional dari Masalah Nilai Batas menuruti alur pikir Lions [4]. Pendekatannya mengantar pada penyajian yang lebih sederhana. Selanjutnya, kita akan melihat pemilihan pendekatan untuk bekerja dengan bobot tak ternormalkan daripada bobot ternormalkan. Pendekatan ini tidak menghilangkan aspek penting karenanya, lagi pula penormalan ini memperlihatkan formulasi variasional dengan jernih atas permasalahan yang ditangani.

Tulisan ini disusun seperti berikut ini, pertama kita perkenalkan Asumsi dan notasi yang digunakan. Kemudian pada bagian berikutnya kita bahas masalah variasional atas struktur diskret.

2. ASUMSI DAN NOTASI

Sekarang kita berikan definisi, asumsi, dan notasi utama.

2.1 Graf Terhubung Tak Berarah. Pada sebuah graf G yang dibuat dari N verteks (simpul) terdapat hubungan yang disebut sisi antara dua verteks x dan y. Kedua verteks tersebut dikatakan *adjacent.* Sisi dilambangkan dengan $\{x, y\}$, sebagai suatu notasi himpunan, sehingga bentuk $\{x, y\} = \{y, x\}$ memiliki makna tidak ada urutan verteks dalam sisi atau dengan kata lain merupakan graf tidak berarah. Notasi $x \sim y$ digunakan untuk dua verteks yang adjacent. Perlu dicatat bahwa mungkin terdapat sisi $\{x, x\}$ ataupun tidak. Graf G dikatakan terhubung jika untuk sembarang pasangan verteks x dan y terdapat sebuah barisan hingga, yang disebut suatu lintasan atau rantai, $x_0 = x, x_1, \cdots, x_n = y$ sedemikian rupa sehingga $x_{i-1} \sim x_i$, untuk setiap $i = 1, \cdots, n$. Dalam bagian pertama tulisan ini, hanya graf terhubung tak berarah yang akan dibahas. Subgraf $S \subset G$ memiliki arti S diimbas oleh G atau untuk setiap x dan y dalam S, sembarang lintasan yang menghubungkan x dan y tersusun atas verteks di S. Jelas ini berimplikasi (tetapi tidak ekuivalen) bahwa semua sisi dari G yang menghubungkan antar verteks di S adalah sisi di S. Batas S didefinisikan sebagai berikut

$$\partial S = \{x \notin S | \exists y \in S, \ni x \sim y\} \qquad (0.1)$$

Misalkan x dan x' di ∂S, maka terdapat y dan y' di S sedemikian sehingga $x \sim y$ dan $x' \sim y'$. Jika $x \sim x'$ maka terdapat lintasan yang menghubungkan dua sisi di S yaitu y dan y'. Karena subgraf S terimbas maka semua lintasan harus di S sehingga x dan x' di S pula, hal yang bertolakbelakang dengan definisi batas ∂S. Jadi diperoleh sifat

$$\text{Jika } x, x' \in \partial S, \text{maka } x \text{ tidak adjacent dengan } x'. \qquad (0.2)$$

Konsep batas dalam (*interior boundary*) dinyatakan sebagai

$$\partial \dot{S} = \{x \in S | \exists y \in \partial S, \ni x \sim y\}$$

Definisikan $\bar{S} = S \cup \partial S$, sehingga sebuah verteks di S tidak adjacent dengan verteks di $G \backslash \bar{S}$.

FIGURE 1. Graf G dengan verteks di titik pasangan koordinat

Sebagai contoh, G adalah Graf yang dibentuk dari verteks-verteks pasangan koordinat seperti yang diilustrasikan pada gambar 1. Subgraf S dibentuk dari verteks-verteks yang dinyatakan dalam himpunan pasangan koordinat $S = \{(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(3,3),$-$(4,3),(5,3),(6,3),(4,4),(5,4),(4,5),(5,5),(4,6),(5,6)\}$. Maka diperoleh $\partial S = \{(4,0),(5,0),(3,1),(6,1),(2,2),(7,2),(2,3),(6,3),(4,4),(5,4),$-$(4,5),(5,5),(4,6),(5,6)\}$ dan $\partial\dot{S} = \{(4,1),(5,1),(3,2),(6,2),(3,3),$-$(6,3),(4,4),(5,4),(4,5),(5,5),(4,6),(5,6)\}$.

2.2 Fungsi dalam graf. Perhatikan fungsi bernilai riil $f(x)$ yang terdefinisi untuk x di G. Kumpulan fungsi tersebut membentuk suatu ruang dimensi hingga R^N. Dengan menganalogikan dengan ruang fungsional dapat didefinisikan:

$$\int_G f = \sum_{x\in G} f(x), \tag{0.3}$$

dan ruang Hilbert $L^2(G)$ dibentuk oleh semua fungsi $f : G \to \mathbb{R}$, dengan perkalian skalar dan norma sebagai berikut:

$$\langle f, g\rangle = \int_G fg, \qquad \|f\|^2_{L^2} = \int_G f \tag{0.4}$$

Selanjutnya definisikan turunan parsial atau turunan berarah di x

$$\partial_y f(x) = f(y) - f(x) \tag{0.5}$$

dan gradien di x

$$Df(x) = \partial_y f(x), y \sim x \in G \tag{0.6}$$

Jelas akan diperoleh $\partial_y f(x) = -\partial_x y$. Suatu seminorma di $L^2(G)$ diperkenalkan dalam bentuk

$$|f| = \sqrt{\sum_x \sum_{y\sim x} (\partial_y f(x))^2}$$

Sifat berikut dipenuhi.

Lemma 0.1. *Jika $|f| = 0$ maka f adalah konstan.*

Bukti 0.2. Dari definisi, jika $|f| = 0$, maka $f(y) = f(x)$ untuk setiap $y \sim x$. Tetapi jika x, y adalah dua verteks sembarang maka terdapat suatu rantai $x_0 = x, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n = y$ sedemikian sehingga $x_i \sim x_{i+1}$ untuk setiap $i = 0, \cdots, n-1$. Oleh karena itu $f(x_i) = f(x_{i+1})$, untuk $i = 0 \cdots, n-1$, maka $f(x) = f(y)$ untuk setiap x, y di G.

Berdasarkan Lema 1, kita dapat mendefinisikan subruang $H^1(G)$ dari $L^2(G)$ yang disusun oleh semua fungsi dengan rataan nol. Jadi, jika rataannya diberikan oleh

$$< f >= \frac{1}{N}\int_G f$$

maka

$$H^1(G) = \{f \in L^2(G) :< f >= 0\}. \tag{0.7}$$

Dengan norma yang didefinisikan dengan cara

$$\|f\|_{H^1} = |f| = \sqrt{\sum_x \sum_{y\sim x} (\partial_y f(x))^2} \tag{0.8}$$

Notasi ini mirip dengan notasi pada ruang Sobolev. Biasanya untuk fungsi di $H^1(G)$ norma dinotasikan dengan $\|\cdot\|$ atau secara eksplisit $\|\cdot\|_{H^1}$. Akan tetapi untuk sembarang fungsi di $L^2(G)$ digunakan seminorma dengan notasi $|\cdot|$ sebagaimana dalam (0.8).

Subruang $H^1(G)$ dapat diinterpretasi ulang sebagai berikut. Pertama, definisikan relasi ekuivalensi dalam $L^2(G)$ dengan cara sebagai berikut:

$$f \sim g \quad \text{jika dan hanya jika} \quad f(x) - g(x) \text{ suatu konstanta}$$

Selanjutnya, perhatikan ruang kuosien *(quotient space)* $\tilde{L^2(G)} = L^2(G)/\sim$, dilengkapi dengan norma

$$\|\tilde{f}\|_{\tilde{L}^2} = \|f - <f>\|_{L^2} \tag{0.9}$$

dengan $\tilde{f}$ adalah kelas ekuivalen, sebagai suatu wakil f. Jelas wakil $\tilde{f}$ dapat diambil dari elemen dengan rataan nol.

Seminorma H^1 menjadi suatu norma dalam ruang kuosien yang equivalen dengan norma kuosien, sehingga diperoleh pertaksamaan:

$$c_0\|f - <f>\|_{L^2} \le \|f\|_{H^1} \le c_1\|f - <f>\|_{L^2}, \tag{0.10}$$

untuk setiap fungsi f di $L^2(G)$ dan beberapa konstanta positif $c_1 \ge c_0 \ge 0$. Jadi, subruang $H^1(G)$ diidentifikasi dengan kuosien bagi $L^2(G)/\sim$ dilengkapi dengan norma H^1 yang diberikan pada (0.8).

Untuk sembarang fungsi dua variabel $f(x,y)$, dapat ditambahkan turunan berarah dalam variabel pertama, yaitu $\partial_x f(x,y) = f(y,y) - f(x,y)$. Oleh karena itu berdasarkan rumus hasil kali diperoleh

$$\begin{aligned} \partial_y(f(x,y)g(x,y)) &= \partial_y f(x,y)g(y,y) + f(y,y)\partial_y g(x,y) \\ &= \partial_y f(x,y)g(x,y) + f(y,y)\partial_y g(x,y) \\ &= \partial_y f(x,y)g(x,y) + f(y,y)\partial_y g(x,y) + \\ &\quad \partial_y f(x,y)\partial_y g(x,y) \end{aligned} \tag{0.11}$$

Sangatlah mudah untuk memeriksa integral berikut dengan rumus integrasi demi bagian (integration by parts)

$$\begin{aligned} \sum_x \sum_y [\partial_y f(x,y)g(x,y) &+ f(x,y)\partial_y g(x,y)] = \\ &\sum_x \sum_y [\partial_y (f(x,y)g(x,y)) - \partial_y f(x,y)\partial_y g(x,y)] \end{aligned}$$

yang dapat direduksi menjadi

$$\sum_x \sum_y (\partial_y f(x,y))g(x,y) = \sum_x \sum_y \partial_y(f(x,y)g(x,y))$$

bila $f(y, y) = 0$ untuk setiap y.

Misalkan S adalah subgraf terimbas dengan batas ∂S. Dengan memperhatikan ruang fungsi pada $\overline{s}$, satu-satunya perbedaan antara S dan G adalah batas sedangkan $\overline{S}$ dan G adalah sama. Seperti sebelumnya, definisikan

$$\int_{\overline{S}} f,\ \|f\|_{L^2(\overline{S})},\ L^2(\overline{S}),\ H^1(\overline{S}) = L^2(\overline{S})/\sim,\ \ H_0^1(\overline{S})$$

Suatu fungsi $f \in L^2(\overline{S})$ dapat dipandang sebagai fungsi di $L^2(G)$ yang mengurangi sebelah luar $\overline{S}$. Tetapi suatu fungsi di $H^1(\overline{S})$ tidak dapat dipandang sebagai fungsi pada $H^1(\overline{S})$ yang menghilangkan bagian luar $\overline{S}$. Perbedaan serupa muncul dalam ruang Sobolev umum. Hal ini berdasarkan pada kontribusi dari sisi antara verteks ∂S dan verteks di luar $\overline{S}$. Misalkan $H_0^1(\overline{S})$ adalah ruang fungsi pada G dengan menghilangkan bagian luar S dilengkapi dengan seminorma H^1. Sebagaimana dalam Lema 1, dapat diperiksa bahwa seminorma adalah suatu norma dan secara eksplisit ditulis

$$\|f\|^2_{H_0^1(S)} = \sum_{x\in S} \sum_{y \in S, y\sim x} (\partial_y f(x))^2 \tag{0.12}$$

Secara khusus, kita dapat mengabaikan f di $\overline{S}$ atau di G dengan memperluas sebelah luar $\overline{S}$ bernilai 0. Analog ini lengkap dengan ruang Sobolev umum H_0^1. H^1 dapat dipandang sebagai suatu kuosien bagi (tiap kelas ekuivalen disajikan oleh elemen di L^2 dengan rataan nol). Sementara H_0^1 dengan batas tak kosong ∂S adalah subruang dari $L^2(\overline{S})$.

3. MASALAH VARIASIONAL

Pada bagian ini, pembahasan difokuskan pada suatu graf terhubung tak berarah G dan subgraf terhubung terimbas S oleh G.

3.1 Bentuk-bentuk Bilinear dan Bobot. Untuk sisi dari G, dipadankan suatu bobot. Lebih tepatnya perhatikan suatu fungsi di $G \times G$ yang dinamakan $\omega(x, y)$ dengan sifat

$$\left.\begin{array}{rcl} \omega(x,y) = \omega(y,x) & \geq & 0, \\ \omega(x,y) > 0 & \Leftrightarrow & x \sim y \end{array}\right\} \tag{0.13}$$

Kita definisikan pada $H^1(G) \times H^1(G)$ bentuk bilinear

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \frac{1}{2}\sum_x \sum_y \omega(x,y)(u(y)-u(x))(v(y)-v(x)) = \\ &= \frac{1}{2}\int_G \int_G \omega(x,y)\partial_y u(x)\partial_y v(x). \end{aligned} \tag{0.14}$$

Kita mulai dengan beberapa catatan. Pertama, perhatikan asumsi simetri pada $\omega(x, y)$ Jika kita mewarisi asumsi ini maka kita catat bahwa

$$\sum_x \sum_y \omega(x,y)(u(y)-u(x)) \quad (v(y)-v(x)) = \sum_x \sum_y \omega(x,y)(v(y)-v(x))(u(y)-u(x))$$

Oleh karena itu, dihasilkan bentuk bilinear serupa dengan mengganti $\omega(x,y)$ ke dalam $(\omega(x,y)+\omega(y,x))/2$ sehingga simetri bukanlah asumsi yang mutlak.

Kedua, $a(u,v) = a(v,u)$ untuk setiap u dan v di $H^1(G)$.

Ketiga, sifat (0.13) dari $\omega(x,y)$ menghasilkan pendekatan berikut:

$$\begin{array}{lcl} |a(u,v)| & \leq & M\|u\|_{H^1(G)}\|v\|_{H^1(G)}, \\ a(u,u) & \geq & \alpha\|u\|^2_{H^1(G)}, \end{array}$$

untuk sembarang u dan v dalam $H^1(G) = \tilde{L}^2_{H^1(G)}$, serta konstanta positif dan M, α yang diberikan oleh

$$\begin{array}{rcl} M & = & \max\{\frac{1}{2}\omega(x,y) : x,y \in G\}, \\ \alpha & = & \min\{\frac{1}{2}\omega(x,y) : x,y \in G, \omega(x,y) \geq 0\}, \end{array}$$

Batas kedua ini, menunjukkan bahwa bentuk bilinear bersifat koersiv

Akhirnya, kita nyatakan sifat yang akan mengantar ke arah Prinsip Maksimum

$$a(u,u^-) \leq 0, a(u,u^+) \geq 0, \ \forall u,v \in H^1(G) \tag{0.15}$$

dengan $u^-(x) = -\min(0,u(x))$, dan $u^+(x) = \max(0,u(x))$. Dengan memeriksa semua kemungkinan, dapat disimpulkan pertidaksamaan elementer

$$(a-b)(a^+ - b^+) \geq 0, \forall a,b \in R,$$

yang menghasilkan sifat (0.15). Jelas bahwa jika kita memperhatikan $a(u,v)$ sebagai bentuk bilinear pada $L^2(G)$ maka sifat koersivitas yang biasa ditemui tidak dipenuhi lagi.

Lemma 0.3 (2). *Berdasarkan asumsi (0.13), definisikan operator*

$$Au(x) = -\sum_y \partial_y(\omega(x,y)\partial_y u(x)), \tag{0.16}$$

dari $L^2(G)$ ke dirinya sendiri. Lalu $< A(u) >= 0$ untuk setiap fungsi u, sehingga A dapat diandang sebagai suatu operator dari $H^1(G)$ ke dirinya sendiri. Demikian juga sifat

$$a(u,v) = (Au,v), \quad \forall u,v \in L^2(G), \tag{0.17}$$

dan A adalah self adjoint *definit positif di $H^1(G)$.*

Bukti 0.4. Pertama, dapat diperiksa dengan mudah bahwa

$$Au(x) = \sum_y \omega(x,y)(u(x)-u(y)), \tag{0.18}$$

sehingga dengan kesimetrian, diperoleh

$$\sum_y \omega(x,y)(u(x)-u(y)) = 0,$$

atau $< Au >= 0$. Ini menunjukkan bahwa Au adalah representasi elemen $\tilde{L}^2(G)$ dengan rataan nol. Karena

$$\sum_x \sum_y \omega(x,y)\partial_y u(x)\partial_y v(x) = \sum_x Au(x)v(x) + \sum_x \sum_y \omega(x,y)\partial_y u(x)v(x),$$

sifat kesimetrian $\omega(x,y) = \omega(y,x)$ dan $\partial_y v(x) = -\partial_x v(y)$ menghasilkan

$$\sum_x \sum_y \omega(x,y)\partial_y u(x)v(x) = -\sum_x \sum_y \omega(x,y)\partial_y u(y)v(y).$$

Sehingga diperoleh

$$\sum_x \sum_y \omega(x,y)\partial_y u(x)\partial_y v(x) = 2\sum_x Au(x)v(x),$$

atau

$$a(u,v) = \sum_x Au(x)v(x),$$

yang memenuhi sifat (0.18).

Misalkan S adalah graf terimbas dengan batas ∂S. Perhatikan $a(u,v)$ bentuk bilinear di $H^1(\overline{S}) \times H^1(\overline{S})$, yaitu

$$a_{\overline{S}}(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{x\in\overline{S}} \sum_{y\in\overline{S}} \omega(x,y)(u(y)-u(x))(v(y)-v(x)). \tag{0.19}$$

Bentuk ini tidak serupa dengan $a(u,v)$ untuk sembarang fungsi u dan v dalam $L^2(G)$ dengan $u = v = 0$ pada $G\backslash\overline{S}$ karena $u = v = 0$ diperlukan pada $G\backslash S$. Oleh sebab itu sifat berikut dipenuhi

$$a(u,v) = a_{\overline{S}}(u,v) \tag{0.20}$$

dengan melihat (0.12).

Sama halnya pada Lema 2, kita definisikan operator dari $\tilde{L}^2(\overline{S})$ ke dalam dirinya sendiri sedemikian sehingga

$$a(u,v) = a_{\overline{S}}(u,v), \quad \forall u,v \in H_0^1(S), \tag{0.21}$$

dengan

$$A_{\overline{S}} = \sum_{y\in S} \omega(x,y)(u(x)-u(y)) \tag{0.22}$$

Operator A dan $A_{\overline{S}}$ tidak serupa, sebaliknya dapat dilihat dengan mudah bahwa

$$A_{\overline{S}}u(x) = Au(x), \forall x \in S, \forall u \in L^2(G). \tag{0.23}$$

Untuk sembarang u di $\tilde{L}^2(\overline{S})$ kita definisikan turunan konormal yang relatif terhadap operator A sebagai berikut

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A}(x) = \sum_{y \in S} \omega(x,y)(u(x) - u(y)), \forall x \in \partial S. \tag{0.24}$$

Untuk menyederhanakan notasi, kita gunakan $\partial\nu$ daripada $\partial\nu_A$ dalam melambangkan koderivatif relatif terhadap A. Selanjutnya, formula Green dapat dinyatakan dalam lema berikut.

Lemma 0.5. *Misalkan S adalah subgraf terimbas dari graf terhubung tak berarah G dengan suatu bobot yang memenuhi (0.13). Maka diperoleh formula*

$$\int_S Auv + \int_{\partial S} \frac{\partial u}{\partial \nu} v = \int_S Avu + \int_{\frac{\partial v}{\partial \nu}} u, \tag{0.25}$$

untuk setiap u dan v dalam $L^2(\overline{S})$.

Bukti 0.6. Karena $A_{\overline{S}}$ adalah *self adjoint* dalam $L^2(\overline{S})$, diperoleh

$$\int_{\overline{S}} A_{\overline{S}}uv = \int_{\overline{S}} A_{\overline{S}}vu$$

Hubungan ini berimplikasi

$$\int_S A_{\overline{S}}uv + \int_{\partial S} A_{\overline{S}}uv = \int_S A_{\overline{S}}vu + \int_{\partial S} A_{\overline{S}}vu$$

Untuk x di ∂S, diperoleh

$$A_{\overline{S}}u(x) = \sum_{y \in S} \omega(x,y)(u(x) - u(y)) = \sum_{y \in S} \omega(x,y)(u(x) - u(y)),$$

sehingga

$$A_{\overline{S}}u(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x), \forall x \partial S.$$

Dari perhitungan (0.23) kita bisa memenuhi rumus (0.25). Selanjutnya diperoleh

$$A_{\overline{S}}u(x) = \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(x), \quad \forall x \in \partial S,\ \forall u \in L^2(G). \tag{0.26}$$

3.2 Masalah dalam Graf Penuh. Kita mulai dengan memperhatikan permasalahan yang berada dalam graf penuh G. Bentuk linear di $H^1(G) = \tilde{L}^2(G)$ dapat disajikan dalam bentuk linear di $L^2(G)$ yaitu (f, y) sedemikian sehingga

$$(f, 1) = \sum_y f(x) = 0. \tag{0.27}$$

Perhatikan persamaan

$$a(u, y) = (f, y), \quad \forall y \in H^1(G), \tag{0.28}$$

atau sama dengan

$$Au = f, \quad \text{dalam } G. \tag{0.29}$$

Selanjutnya kita dapat menyatakan teorema berikut.

Theorem 0.7. *Berdasarkan asumsi (0.13) dan (0.27) terdapat satu dan hanya satu solusi (0.28) atau (0.29) dalam* $H^1(G)$, *ekuivalen dengan suatu solusi* u *di* $L^2(G)$ *dengan* $< u >= 0$. *Sebagai tambahan, solusinya dapat dinyatakan*

$$u(x) = \int_G G(x,y)f(y) \tag{0.30}$$

Fungsi Green,$G(x,y)$, *diberikan oleh formula*

$$G(x,y) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda_j}\psi_j(x)\psi_j(y) \tag{0.31}$$

Dengan λ_j *dan* ψ_j *secara berturut-turut merupakan nilai dan fungsi eigen dari operator* A *yang memenuhi* $0 \le \lambda_1 \le \cdots \le \lambda_{N-1}$

Bukti 0.8. Diketahui $H1(G)$ adalah suatu ruang Hilbert berdimensi $(N-1)$ (dimensi hingga) dan operator A adalah *self adjoint* dan definit positif. Oleh karena itu, terdapat $N-1$ nilai eigen dan fungsi eigen yang dilambangkan oleh λ_j dan ψ_j.

Selanjutnya, fungsi ψ_j membentuk sistem ortonormal di $\tilde{L}^2(G)$ yaitu $\int_G \psi_j\psi_k = \delta j,k,\ < \psi_j >= 0$.

Karena $\lambda_j = (A\psi_j, \psi_j)$, dapat disimpulkan bahwa $\lambda_j > 0$ sehingga (0.30) dipenuhi.

Kita dapat bandingkan hasil tersebut dengan hasil yang diperoleh Berenstein dan Chung [2]. Mereka memperkenalkan notasi

$$d_\omega(x) = \sum_y \omega(x,y),$$

dan d adalah operator

$$dv(x) = v(x)d_\omega(x).$$

Dalam notasi Berenstein dan Chung [2],

$$-\Delta_\omega = d^{-1}A$$

mereka tuliskan sebagai

$$\frac{-\Delta_\omega = u(x)-}{\sum_y \omega(x,y)u(y)u(x).}$$

Kemudian diselesaikan masalah

$$-\Delta_\omega u(x) = g(x).$$

Hal ini sam dengan $Au(x) = dg(x)$, dan agar diperoleh solusi dipersyaratkan

$$\int_G g(x)d_\omega(x) = 0.$$

Jadi, dari Teorema 4 solusi u adalah

$$u(x) = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda_j} \psi_j(x) \sum_y \psi_j(y) g(y) d_\omega(y). \tag{0.32}$$

Untuk menangani fakta bahwa $-\Delta_\omega$ bukan *self adjoint,* Berenstein dan Chung [2] memperkenalkan

$$L_\omega = d^{1/2}(-\Delta_\omega)d^{-1/2} = d^{-1/2}Ad^{-1/2},$$

yang bersifat *self adjoint* nonnegatif. Tulis $\tilde{u} = d^{1/2}u$, maka $\tilde{u}$ adalah solusi dari $d^{-1/2}Ad^{-1/2}u(x) = d^{1/2}g(x)$. Dengan mempertimbangkan sistem nilai eigen μ_j, vektor eigen, Φ_j dari operator $d^{-1/2}Ad^{-1/2}$ serta μ_0 dan μ_j, untuk setiap $j > 0$ dapat dihasilkan

$$\tilde{u}(x) = c\sqrt{d_\omega(x)} + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\mu_j} \Phi_j(x) \sum_y \Phi_j(y) g(y) \sqrt{d_\omega(y)},$$

dengan c adalah konstanta bebas. Sehingga diperoleh

$$\tilde{u}(x) = c + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\mu_j} \frac{\Phi_j(x)}{\sqrt{d_\omega(x)}} \sum_y \Phi_j(y) g(y) \sqrt{d_\omega(y)} \tag{0.33}$$

Rumus (0.32) dan (0.33) adalah ekivalen. Tetapi (0.32) lebih sederhana dan langsung pada satu pilihan konstanta yaitu $< u >= 0$.

Penutup

Telah ditelaah formulasi variasional masalah syarat batas di atas struktur diskrit berupa graph tak berarah yang hingga. Dari perumusan variasional, diperoleh prinsip maksimum atas struktur diskret. Melalui perumusan variasional tersebut, diperoleh pula solusi masalah syarat batas atas struktur diskret yang dinyatakan oleh analog fungsi Green.

Ucapan Terima Kasih

Penelitian dibiayai melalui Direktorat Pembinaan Penelitian dan Pengabdian kepada Masyarakat, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, kontrak no : 026/SPPP/PP-PM/DP3M/IV/2005 dan 317/SP3/PP/DP2M-/II/2006, serta hibah penelitian Program Hibah Kompetisi A2, Departemen Matematika, tahun anggaran 2006.

Daftar Pustaka

[1] A. Bensoussan & J.L. Menaldi, 2005, Difference Equation on Weighted Graphs,*J. Conv. An.,* **Vol. 12(1),** 13-44.

[2] S.Y. Chung & C.A. Berenstein, 2005, $\omega-$Harmonic Function and Inverse Conductivity Problem on Network, *SIAM J. App.Math.,* 1200 - 1226

[3] F. Chung & S.T. Yau, 2000, Discrete Green's Function, *J. Comb. Th.,* Series A **91**, 191-214.

[4] J.L. Lions, 1961, Equations differentielles operationnelles et Problemes aux limites. Springer-Verlag, Berlin.

[5] Young, N, 1998, An Introduction to Hilbert Space.Cambridge University Press.UK.