PEMODELAN NILAI TUKAR RUPIAH TERHADAP $US MENGGUNAKAN DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV HAMILTON*

BERLIAN SETIAWATY DAN HIRASAWA

Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

ABSTRAK. Perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US dari tahun 1998 sampai dengan 2007 dicoba dimodelkan dengan menggunakan deret waktu *Hidden* Markov. Pendugaan parameter model dilakukan mengunakan Metode *Maximum Likelihood* dan pendugaan ulang menggunakan metode *Expectation Maximization*. Hasil yang diperoleh cukup baik karena sudah menggambarkan secara umum perilaku nilai tukar Rupiah tetapi galat antara nilai harapan dengan nilai sebenarnya masih cukup besar.

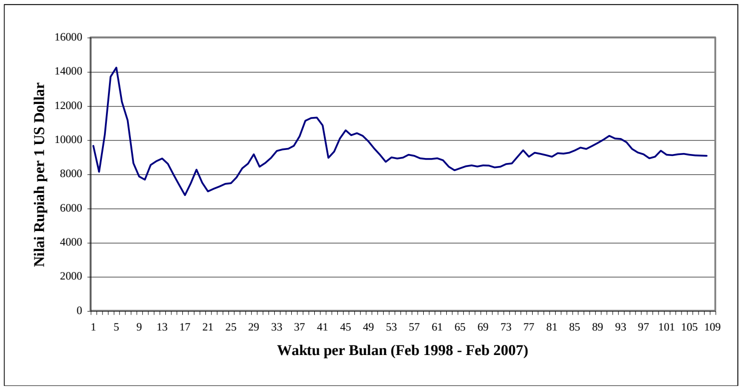
Kata kunci: Rantai Markov, *Hidden* Markov, Deret waktu *Hidden* Markov, Metode *Expectation Maximization*.

1. PENDAHULUAN

Sejarah Indonesia menunjukkan bahwa nilai tukar Rupiah terhadap $US tidak saja dipengaruhi oleh faktor-faktor ekonomi, tetapi juga oleh hal-hal lain seperti, situasi politik dalam negeri, pergantian pemerintah, perubahan kebijakan pemerintah dan situasi keamanan. Perubahan nilai tukar Rupiah terhadap $US dari waktu ke waktu sangat tidak beraturan dengan fluktuasi yang beragam. Gambar 1.1. menunjukkan fluktuasi nilai tukar Rupiah dari tahun 1998 sampai dengan 2007.

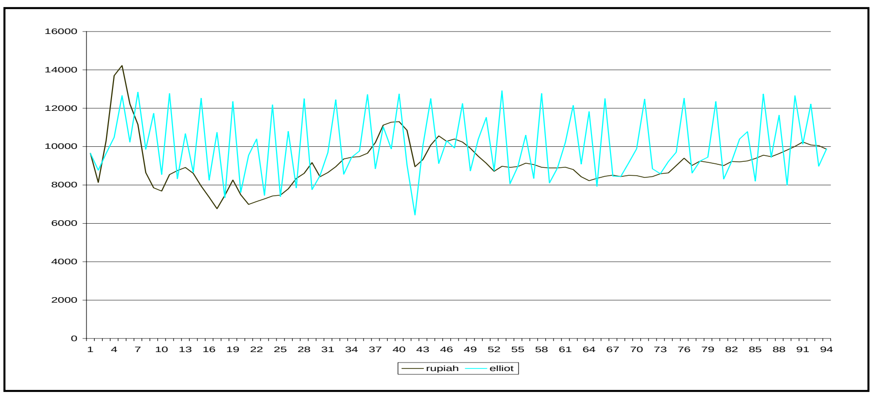
Untuk memodelkan perilaku nilai tukar Rupiah tersebut, Setiawaty dan Sari (2005) menggunakan model *Hidden* Markov Elliot et. al. (1995) untuk menjelaskan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US. Diasumsikan bahwa nilai tukar rupiah dibangkitkan oleh proses pengamatan yang hanya dipengaruhi oleh proses penyebab yang merupakan rantai Markov yang tidak diamati.

*Tulisan ini merupakan bagian dari hasil penelitian yang didanai oleh Hibah Penelitian PHK A2 Departemen Matematika IPB tahun 2006



Gambar 1.1. Rata-rata nilai Tukar Rupiah terhadap $US Tahun 1998 s/d 2007
Sumber Data: www.bankofcanada.ca. (21 April 2007)

Hasil yang diperoleh tidak cukup baik, hal ini ditunjukkan oleh galat nilai sesungguhnya dan nilai harapan yang cukup besar dan berfluktuasi seperti ditunjukkan oleh gambar 1.2.



Gambar 1.2. Perbandingan nilai tukar Rupiah terhadap US Dollar dan
nilai harapannya menggunakan model Elliot

Pada tulisan ini dikembangkan model baru, yaitu model deret waktu *Hidden* Markov Hamilton (1994), dengan tujuan memperbaiki model Setiawaty dan Sari (2005). Pada model ini diasumsikan bahwa nilai tukar Rupiah dibangkitkan oleh proses pengamatan yang tidak hanya dipengaruhi oleh proses penyebab yang merupakan rantai Markov yang tidak diamati, tetapi juga dipengaruhi oleh nilai tukar sebelumnya, sehingga membentuk suatu deret waktu (*time series*).

Tulisan ini dimulai dengan pemodelan nilai tukar Rupiah menggunakan deret waktu *Hidden* Markov. Pada bagian 3 dibahas pendugaan parameter model dan terakhir pada bagian 4 dibahas interpretasi dari model. Sebagai penutup diberikan kesimpulan.

2. MODEL DERET WAKTU *HIDDEN* MARKOV

Pada bagian ini kita memodelkan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US dalam kurun waktu dari Februari 1998 sampai dengan Februari 2007 menggunakan deret waktu *Hidden* Markov Hamilton (1994).
Faktor-faktor yang menyebabkan terjadinya perubahan nilai tukar Rupiah terhadap $US diasumsikan sebagai *state* dari suatu rantai Markov $\{X_t\}$ yang tidak diamati. Misalkan banyaknya faktor tersebut adalah N (untuk menyederhanakan masalah kita akan mengambil N = 2). Pada setiap *state*, data nilai tukar Rupiah dibangkitkan oleh peubah acak Y_t yang menyebar dengan sebaran tertentu pada ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Dalam hal ini proses $\{X_t\}$ tersembunyi (hidden) di balik proses yang diamati, yaitu $\{Y_t\}$. Sehingga pasangan proses stokastik $\{(X_t, Y_t)\}$ merupakan model *hidden* Markov.

Model *hidden* Markov Hamilton (1994) merupakan deret waktu dan memenuhi persamaan

$$Y_t = c(X_t) + \phi(X_t)Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.1}$$

di mana:

- $\{X_t\}$ adalah rantai Markov dengan ruang *state* $S = \{1, 2\}$ dan $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ merupakan matriks peluang transisinya dan $p_{ij} = P\{X_t = j \mid X_{t-1} = i\}$.
- $\{Y_t\}$ adalah proses yang diamati dan bernilai skalar
- $\{\varepsilon_t\}$ adalah barisan peubah acak yang saling bebas dan berdistribusi normal $N(0, \sigma^2)$.
- $c = (c_1, c_2)$ dan $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \Re^2$, dengan c_1, c_2, ϕ_1, dan ϕ_2 adalah konstanta real
- $c(X_t) = c_{X_t}$ dan $\phi(X_t) = \phi_{X_t}$.

Jadi model dicirikan oleh parameter $\theta = (c_1, c_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2, \mathbf{P})$. Dengan menggunakan metode EM dilakukan pendugaan terhadap parameter $\theta = (c_1, c_2, \phi_1, \phi_2, \sigma^2, \mathbf{P})$ dari data Y.

3. PENDUGAAN PARAMETER

Penduga kemungkinan maksimum bagi θ diperoleh dengan memaksimumkan fungsi *likelihood*

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(\theta) &= \log\left(f\left(y_1 \middle| \mathrm{Y}_0;\theta\right) f\left(y_2 \middle| \mathrm{Y}_1;\theta\right)\cdots f\left(y_T \middle| \mathrm{Y}_{T-1};\theta\right)\right) \\ &= \sum_{t=1}^{T} \log f\left(y_t \middle| \mathrm{Y}_{t-1};\theta\right),\end{aligned}$$

di mana Y_t adalah medan-σ yang lengkap dan dibangun oleh $Y_1, Y_2, Y_3 \cdots, Y_t$ dan

$$\begin{aligned} f\left(y_t \middle| \mathrm{Y}_{t-1};\theta\right) &= P\left(X_t = 1 \middle| \mathrm{Y}_{t-1};\theta\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{\frac{-\left(x_t - c_1 - \phi_1 y_{t-1}\right)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &\quad + P\left(X_t = 2 \middle| \mathrm{Y}_{t-1};\theta\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{\frac{-\left(x_t - c_2 - \phi_2 y_{t-1}\right)^2}{2\sigma^2}\right\}\end{aligned}$$

Menurut Setiawaty, Adharini dan Hirasawa (2006), algoritma untuk memperoleh penduga parameter yang memaksimumkan fungsi *likelihood* adalah sebagai berikut.

Langkah 1:

Tentukan banyaknya data (T) yang akan diamati serta tentukan juga nilai data nilai tukar Rupiah $(y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{T-1})$ dan matriks transisi

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Beri nilai awal bagi $\hat{\theta}$ yang dilambangkan dengan $\hat{\theta}^{(m)} = \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2\right)$.

Langkah 2:

Cari fungsi kerapatan bersyarat bagi y_T untuk setiap $t = 1, 2, \cdots, T$ dengan cara

$$\eta_t = \begin{bmatrix} f\left(y_t \middle| X_t = 1, \mathrm{Y}_{t-1}; \hat{\theta}^{(m)}\right) \\ f\left(y_t \middle| X_t = 2, \mathrm{Y}_{t-1}; \hat{\theta}^{(m)}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} \exp\left\{\dfrac{-\left(y_t - \hat{c}_1 - \hat{\phi}_1 y_{t-1}\right)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right\} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}} \exp\left\{\dfrac{-\left(y_t - \hat{c}_2 - \hat{\phi}_2 y_{t-1}\right)^2}{2\hat{\sigma}^2}\right\} \end{bmatrix}.$$

Langkah 3:

Penarikan kesimpulan optimal dan peramalan untuk setiap waktu *t* pada contoh dapat diperoleh melalui iterasi:

3.1. Tentukan nilai awal bagi $\hat{\xi}_{t|t-1}$ yang dilambangkan dengan $\hat{\xi}_{1|0}$.

3.2. Berikan nilai awal $i = 1$.

3.3. Untuk $t = i$, cari nilai dari

$$f\left(y_t \middle| \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}^{(m)}\right) = \mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right), \text{ dimana } \mathbf{1}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dan $\otimes$ melambangkan perkalian elemen vektor,

$$\hat{\xi}_{t|t-1} = \begin{bmatrix} P\left\{X_t = 1 \middle| \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}^{(m)}\right\} \\ P\left\{X_t = 2 \middle| \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}^{(m)}\right\} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\xi}_{t|t} = \begin{bmatrix} P\left\{X_t = 1 \middle| \mathrm{Y}_t;\hat{\theta}^{(m)}\right\} \\ P\left\{X_t = 2 \middle| \mathrm{Y}_t;\hat{\theta}^{(m)}\right\} \end{bmatrix} = \frac{\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)}{\mathbf{1}'\left(\hat{\xi}_{t|t-1} \otimes \eta_t\right)},$$

$$\hat{\xi}_{t+1|t} = \begin{bmatrix} P\left\{X_{t+1} = 1 \middle| \mathrm{Y}_t;\hat{\theta}^{(m)}\right\} \\ P\left\{X_{t+1} = 2 \middle| \mathrm{Y}_t;\hat{\theta}^{(m)}\right\} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \hat{\xi}_{t|t},$$

$i \leftarrow i+1$.

3.4. Ulangi mulai dari langkah (3.3).
Stop jika $t = T$.
Lanjutkan ke langkah 4.

Langkah 4:

Cari nilai dari:

$$\hat{c}_i = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t+1|t} \cdot f\left(y_t \mid X_t = i, \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)}{f\left(y_t \mid \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)} \cdot \left(y_t - \phi_i y_{t-1}\right)}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t+1|t} \cdot f\left(y_t \mid X_t = i, \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)}{f\left(y_t \mid \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)}}, \quad i = 1, 2.$$

$$\hat{\phi}_i = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t+1|t} \cdot f\left(y_t \mid X_t = i, \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)}{f\left(y_t \mid \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)} \cdot \left(y_t - \hat{c}_i\right)\left(y_{t-1}\right)}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t+1|t} \cdot f\left(y_t \mid X_t = i, \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)\left(y_{t-1}\right)^2}{f\left(y_t \mid \mathrm{Y}_{t-1};\hat{\theta}\right)}}, \quad i = 1, 2.$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{2} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t+1|t}\, f\left(y_t \mid X_t = j, \mathrm{Y}_{t-1}; \hat{\theta}\right)\left(y_t - \hat{c}_{X_t} - \hat{\phi}_{X_t} y_{t-1}\right)^2}{f\left(y_t \mid \mathrm{Y}_{t-1}; \theta\right)}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{2} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t+1|t}\, f\left(y_t \mid X_t = j, \mathrm{Y}_{t-1}; \hat{\theta}\right)}{f\left(y_t \mid \mathrm{Y}_{t-1}; \hat{\theta}\right)}}.$$

Langkah 5:

Beri nama parameter yang dihasilkan pada langkah 4 dengan

$$\hat{\theta}_{k+1} = \left(\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2, \hat{\sigma}^2\right),\ k = 0,1,2,\cdots,T-1.$$

Langkah 6:

Cari **P** yang baru, yaitu:

$$\hat{\xi}^{(j)}_{t|T} = \hat{\xi}^{(j)}_{t|t} \otimes \left\{\mathbf{P}'\left[\hat{\xi}^{(j)}_{t+1|T} (\div) \hat{\xi}^{(j)}_{t+1|t}\right]\right\}$$

di mana $(\div)$ merupakan operasi perkalian elemen vektor,

$$\begin{aligned} &P\left(X_t = j, X_{t-1} = i \mid \mathrm{Y}_T\right) \\ &\quad\approx \frac{P\left(X_t = j \mid \mathrm{Y}_T\right) \times P\left(X_{t\text{-}1} = i \mid \mathrm{Y}_t\right) \times P\left(X_t = i \mid X_{t\text{-}1} = i\right)}{P\left(X_t = j \mid \mathrm{Y}_t\right)} \\ &\quad= \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t|T} \times \hat{\xi}^{(i)}{}_{t-1|t-1} \times p_{ij}}{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t|t}}, \end{aligned}$$

$$P\left(X_{t-1} = i \mid \mathrm{Y}_t; \hat{\theta}\right) = \sum_{j=1}^{2} P\left(X_t = j, X_{t-1} = i \mid \mathrm{Y}_T\right),$$

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\displaystyle\sum_{t=2}^{T} P\left(X_t = j, X_{t-1} = i \mid \mathrm{Y}_T; \hat{\theta}\right)}{\displaystyle\sum_{t=2}^{T} P\left(X_{t-1} = i \mid \mathrm{Y}_T; \hat{\theta}\right)} = \frac{\displaystyle\sum_{t=2}^{T} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t|T} \times \hat{\xi}^{(i)}{}_{t-1|t-1} \times p_{ij}}{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t|t}}}{\displaystyle\sum_{t=2}^{T}\sum_{j=1}^{2} \frac{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t|T} \times \hat{\xi}^{(i)}{}_{t-1|t-1} \times p_{ij}}{\hat{\xi}^{(j)}{}_{t|t}}}.$$

Langkah 7:

Selama $k < T$, ulangi mulai dari langkah 2. Gunakan parameter yang sudah dihasilkan untuk mencari nilai harapan bagi nilai y yang akan datang.

$$E\left[Y_{t+1} \mid X_{t+1} = j, \mathrm{Y}_t; \theta\right] = c_j + \phi_j y_t.$$

4. INTERPRETASI MODEL

Parameter model di atas berbentuk

$$\theta = \left(c_1, c_2, \phi_1, \phi_1, \sigma^2, \mathbf{P}\right).$$

Menggunakan data pengamatan nilai tukar Rupiah y_t pada kurun waktu dari Februari 1998 sampai dengan Februari 2007 dilakukan pendugaan parameter model. Proses pendugaan parameter akan menggunakan metode yang sudah dijelaskan pada bagian 3.

Data nilai tukar Rupiah yang diperoleh dari Bank of Canada adalah rataan nilai tukar Rupiah harian. Untuk diskretisasi waktu dan untuk mengurangi banyaknya data, diambil rataan perbulan dari data harian tersebut. Sehingga y_t menyatakan rataan nilai tukar Rupiah terhadap $US pada bulan ke t, $t \in \square$, dengan $t = 0$ adalah bulan Februari 1998. Banyak data yang diperoleh adalah 108.

Menggunakan algoritma pada bagian 3 dibuat program menggunakan software *Mathematica 5.2*. Dengan nilai awal

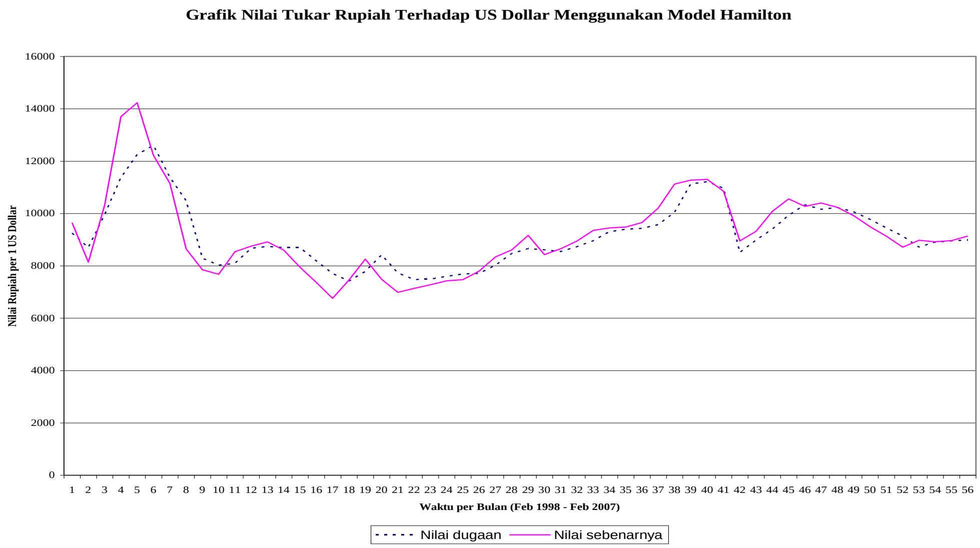
$$c_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 8000 \end{pmatrix} \qquad \phi_0 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} \qquad \sigma = 1000 \qquad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{8}{13} \\ \frac{6}{7} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$$

diperoleh penduga parameter

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 9476.15419 \\ 1442.12315 \end{pmatrix} \qquad \hat{\phi} = \begin{pmatrix} 0.23733 \\ 0.84235 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma} = 620.71 \qquad \hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1.46674 \times 10^{-48} & 1. \\ 1. & 8.67879 \times 10^{-38} \end{pmatrix}.$$

Nilai harapan untuk t ke-108 adalah 9088.98, hampir mendekati nilai sebenarnya yaitu 9073.11. Gambar 4.1 menunjukkan perbandingan antara nilai harapan model tersebut dengan nilai tukar Rupiah yang sesungguhnya. Dari gambar terlihat bahwa model ini cukup baik menggambarkan perilaku nilai tukar Rupiah dan jauh lebih baik dari model *Hidden* Markov Elliot et. al. (1995).



Gambar 4.1. Grafik Nilai Tukar Rupiah terhadap $US
Menggunakan Model Hamilton

Nilai galat maksimum adalah 2328.48786 dan nilai galat minimum adalah 1.63577 dan rataan galat adalah 282.74729. Dari Gambar 4.1 terlihat bahwa nilai harapan model deret waktu Hamilton ini cukup baik untuk dijadikan nilai prediksi nilai tukar Rupiah terhadap $US.

5. KESIMPULAN

Model deret Waktu *Hidden* Markov cukup baik menjelaskan perilaku nilai tukar Rupiah terhadap $US. Hasil yang diperoleh secara signifikan jauh lebih baik dibandingkan model *Hidden* Markov Elliott (1995). Namun demikian karena galat terbesar masih cukup besar sekitar 2000 dan rataan galat 282, maka masih terbuka kemungkinan untuk mengembangkan model deret waktu yang lebih kompleks.

DAFTAR PUSTAKA

[1]. Elliot, R. J., Aggoun, L. dan Moore, J. B. 1995. *Hidden Markov models*, Springer Verlag, New York.

[2]. Hamilton, J. D. 1994. *Time Series Analysis*. Princeton University Press, New Jersey.

[3]. Setiawaty, B. dan Sari, D. N. 2005. Pemodelan nilai tukar Rupiah terhadap $US menggunakan Hidden Markov. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol 4, No 2.

[4]. Setiawaty B., Adharini, Y. dan Hirasawa. 2006. Pendugaan parameter deret waktu *Hidden* Markov Hamilton. *Jurnal Matematika dan Aplikasinya*, Vol 5, No 1.