擬 *Minkowski* 時空について

村田 茂昭

1．はじめに

以前に発表した論文において、*Lorentz* 変換を宇宙の一様な膨張の反映として説明した[1)2)]。このとき、一様に膨張する宇宙空間モデルを考えた。

我々の宇宙が、一様に膨張しているのか、それとも膨張が加速的であるか減速的であるかは、各種の議論があり、観測の精度があまりよくないためにまだ決着はついていない。

しかし、複雑な物理現象に対して「まず、一番簡単なモデルを考えるべきである」見地から、本論文では引き続き、一様に膨張する宇宙モデルを考える。

自然科学においては、あまり哲学にはこだわってはいけないが、私は、宇宙の膨張は時間の経過そのものであると考えている。その見地からいうと、宇宙の膨張の仕方が一様ではない確証が得られない限り、ひとまず一様膨張と考えるのが適切であろう。

A. Einstein は、慣性系のようなものは、局所的にしか存在しないと考えた。したがって、彼の理論に忠実な理論家たちは、宇宙を覆いつくすような大域的な座標系を想定することを避けようとする傾向がある。しかし、*Einstein* の考えだけが真理であるという根拠はなく、「宇宙を覆いつくすような大域的座標系を考え、その各所に、質点や星雲を配置する」ことにより、もしも何か合理的結果が得られそうであるのであれば、それを試みる価値がある。*E. Mach* の哲学によれば、座標系がだけがあって、物体がまったくない系は無意味である。(*Mach* によれば、空間に二つ以上の物体がなければ、解析は始められない。) しかし、私は、*Mach* の哲学を信奉してはいない。たしか

に、座標系だけがあって他に何もない場合は無意味であろう。しかし、物質等が分布している実際の宇宙空間から、座標系の部分だけを抽出してその性質を検討することは、私は意味があると考える。

天文学者の話を聞いていれば、我々の時空は、相当遠いところまで *Minkowski* 時空に、はなはだ近いと考えられる。本論文では、「一様に膨張しているが、基本テンソルが *Minkowski* 時空のテンソルに、はなはだ近い時空」を、「擬 *Minkowski* 時空」と呼ぶこととする。以前の論文[2]で論じた時空は、まさにそういう時空である。ただし、そこにおいては、*Lorentz* 変換を簡単な形にするために、長手方向の空間軸を特別扱いにした。本論文では、実時空において、空間の３軸が対等な座標系を創造することを目標とする。

なお、以前の論文[1][2]においては、基本テンソルを論じる際に、符号系（－＋＋＋）を採用したが、その後、*Minkowski* の原案とのつながりをよくし、*Lorentz* 変換が、虚角回転に関係があることを説明しやすいという理由で、符号系（＋－－－）に変更した[3]。

2．源時空

我々が時空と認識するものを実時空と表現し、その源となるものを源時空と呼ぶ。

以下において、以前の論文と重複するが、わかりやすさのため、源時空について一通り論ずる。ただし、符号系が（＋－－－）に変更されていることに留意せよ。

仮定１　スカラ宇宙時刻を τ とする。τ は、単調に増大する。

仮定２　３次元の位置パラメータ座標空間（ξ^1, ξ^2, ξ^3）がある。位置パラメータは無名数である（距離に関係するが、長さの次元を持たない）。

仮定３　光速度を c とするとき、次のような４次元空間が存在する。

$$\left.\begin{array}{l}\hat{x}^0 = c\tau \\ \hat{x}^1 = \xi^1 = \xi_x \\ \hat{x}^2 = \xi^2 = \xi_y \\ \hat{x}^1 = \xi^3 = \xi_z\end{array}\right\} \qquad (2.1)$$

［定義１］

座標変数が$(\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3)$である系（４次元*Riemann*空間）を４次元源時空と呼ぶ。

※４つの軸は皆４次元*Riemann*空間軸なのであるが、以下においては、慣例によって、時間軸と、空間軸（*Newton*の３次元空間に対応するもの）という言葉を使用することがある。

仮定４　４次元源時空の共変基本テンソルは

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -(c\tau)^2 & & \\ & & -(c\tau)^2 & \\ 0 & & & -(c\tau)^2 \end{bmatrix} \qquad (2.2)$$

である。

位置パラメータ座標空間のどの点を、源時空の空間座標の原点にするかは、まったく任意である。(すなわち、いわゆる宇宙原理が成立する。）宇宙時刻座標の原点は、現代宇宙論の大勢に従って、$\tau = 0$とした。

(2.2) 式では、源時空の空間部分はデカルト座標的（…基本テンソルの対角成分が等しく、非対角成分はゼロである…）である。この部分は、空間の性質を変えることなく、円筒座標や球座標に変換できる。以下において、簡単のため、prime (`) 等で区別することなく、

各々の座標の基本テンソルを記す。(なお、本論文においては、空間座標の名前で、4次元座標系を呼ぶ。)

◇円筒座標系

座標変数を

$$(\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) = (c\tau, \xi_r, \varphi, \xi_z) \tag{2.3}$$

とする。ただし

$$\left.\begin{aligned} \xi_r &= \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2} \\ \varphi &= \tan^{-1}\frac{\xi_y}{\xi_x} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

とする。

共変基本テンソルは、簡単な計算により

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -(c\tau)^2 & & \\ & & -\xi_r{}^2(c\tau)^2 & \\ 0 & & & -(c\tau)^2 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

である。

◇球座標系

座標系を

$$(\hat{x}^0, \hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3) = (c\tau, \xi_R, \theta, \varphi) \tag{2.6}$$

とする。ただし

$$\left.\begin{aligned}
\xi_R &= \sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2} \\
\theta &= \cos^{-1}\frac{\xi_z}{\xi_R} \\
\varphi &= \tan^{-1}\frac{\xi_y}{\xi_x}
\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

とするとき、共変基本テンソルは

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -(c\tau)^2 & & \\ & & -(c\tau)^2\xi_R^2 & \\ 0 & & & -(c\tau)^2\xi_R^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

である。

3. 円筒型実時空

源時空に双曲線関数変換（後述）を施して実時空を作成するが、この操作は一通りではない。*Riemann* 幾何学の一般座標変換の概念から言うと、どの座標変換も正しいが、「我々が実際の時空と認識するものはどれか？」と言うことが問題である。

前論文[2)]においては、次の二つの方針を掲げた。

(1) 各々の空間座標の原点近傍では、源時空と実時空は一致するか、または単純な比例関係にある。

(2) 時間軸とデカルト座標的な一つの空間軸を抜き出したとき、単純な *Lorentz* 変換は、位置パラメータ座標の平行移動で説明できる。

Lorentz 変換を、宇宙膨張の反映として説明するため、前論文で述

べた実時空は下記のごときものである。

実時空のもととなる源時空の座標系を

$$(\hat{x}^0,\ \hat{x}^1,\ \hat{x}^2,\ \hat{x}^3)=(c\tau,\xi_r,\varphi,\xi_z) \tag{3.1}$$

とする。この源時空の共変基本テンソルは、

$$\hat{g}_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & -(c\tau)^2 & & \\ & & -\xi_r{}^2(c\tau)^2 & \\ 0 & & & -(c\tau)^2\end{bmatrix} \tag{3.2}$$

である。

また、反変基本テンソルは

$$\hat{g}^{\mu\nu}=\begin{bmatrix}1 & & & 0\\ & -\dfrac{1}{(c\tau)^2} & & \\ & & -\dfrac{1}{\xi_r{}^2(c\tau)^2} & \\ 0 & & & -\dfrac{1}{(c\tau)^2}\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

である。

この源時空の円筒座標系に相当する実時空の円筒座標系を

$$(x^0,x^1,x^2,x^3)=(ct,r,\varphi,z) \tag{3.4}$$

とし、源時空との（双曲線関数を使用する）座標変換を，次のごとくに選定する。

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= ct = c\tau\cosh\xi_z \\ x^1 &= r = c\tau_0\xi_r \\ x^2 &= \varphi = \hat{x}^2 \\ x^3 &= z = c\tau\sinh\xi_z \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

ただし、τ_0 は、現在の宇宙時刻に相当する定数である。

この座標変換の選び方には任意性があり、上記は、複数の変換から一つを抜き出した、きわめて恣意的な選定であるが、一般座標変換の趣旨から言って特に不適切と言うほどのものではない。

座標変換

$$\hat{x}^\mu \Rightarrow x^\mu \qquad (3.6)$$

の際の変換係数テンソルは、反変成分に関して

$$M_\mu^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\mu} \qquad (3.7)$$

$$\therefore M_\mu^\nu = \begin{bmatrix} \cosh\xi_z & 0 & 0 & \sinh\xi_z \\ 0 & c\tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c\tau\sinh\xi_z & 0 & 0 & c\tau\cosh\xi_z \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

μ 行 ν 列 表示

同様にして、共変成分に関する変換係数テンソルは、座標の関係式を書き直して

$$\left.\begin{aligned}
\hat{x}^0 &= \sqrt{(x^0)^2 - z^2} \\
\hat{x}^1 &= \frac{r}{c\tau_0} \\
\hat{x}^2 &= \varphi = x^2 \\
\hat{x}^3 &= \xi_z = \tanh^{-1}\frac{z}{x^0}
\end{aligned}\right\} \qquad (3.9)$$

である。これにより、共変変換係数は

$$\overline{M}^{\nu}_{\mu} = \frac{\partial \hat{x}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \qquad (3.10)$$

$$\therefore \overline{M}^{\nu}_{\mu} = \begin{bmatrix} \cosh\xi_z & 0 & 0 & -\dfrac{\sinh\xi_z}{c\tau} \\ 0 & \dfrac{1}{c\tau_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh\xi_z & 0 & 0 & \dfrac{\cosh\xi_z}{c\tau} \end{bmatrix} \qquad (3.11)$$

μ 行　ν 列 表示

なお

$$\overline{M}^{\alpha}_{\mu} M^{\nu}_{\alpha} = \delta^{\nu}_{\mu} \; (Kronecker's\ delta) \qquad (3.12)$$

である。

このように座標を選んだ時空の基本テンソルは、次のごとくになる。

共変成分は

$$g_{\mu\nu} = \overline{M}_{\mu}^{\alpha} \overline{M}_{\nu}^{\beta} \hat{g}_{\alpha\beta}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -\left(\dfrac{\tau}{\tau_0}\right)^2 & & \\ & & -\left(\dfrac{\tau}{\tau_0}\right)^2 r^2 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \qquad (3.13)$$

反変成分は

$$g^{\mu\nu} = M_{\alpha}^{\mu} M_{\beta}^{\nu} \hat{g}^{\alpha\beta}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -\left(\dfrac{\tau_0}{\tau}\right)^2 & & \\ & & -\left(\dfrac{\tau_0}{\tau}\right)^2 \dfrac{1}{r^2} & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

となる。なお、実時空の量で τ をあらわすと、(3.9) 式より

$$\tau = \frac{\sqrt{(x^0)^2 - z^2}}{c} \qquad (3.15)$$

である。

この系は、*Minkowski* 時空の空間部分を円筒座標系に書き直したものに数値的にきわめて近い形をしているが、 τ / τ_0 の要素が存在するため、*Minkowski* 時空とは性質の異なる空間となっている。

この時空において、この章の冒頭に掲げた条件（1）は、双曲線関数において、

$$|\xi| << 1 \qquad (3.16)$$

のとき

$$\left.\begin{aligned}\cosh\xi &\cong 1\\ \sinh\xi &\cong \xi\end{aligned}\right\} \qquad (3.17)$$

であることによって満たされる。すなわち

$$|\xi_r|, |\xi_z| << 1 \qquad (3.18)$$

のとき

$$\left.\begin{aligned}&x^0 \cong \hat{x}^0\\ &x^1 = r \cong c\tau_0\xi_r = c\tau_0\hat{x}^1\\ &x^2 = \varphi = \hat{x}^2\\ &x^3 = z \cong c\tau\xi_z = c\tau\hat{x}^3\end{aligned}\right\} \qquad (3.19)$$

である。

前論文[2)]においては、以上のような円筒座標系において、源時空の長手方向への平行移動…物理的には、距離に比例する速度で後退する遠方の点を追尾することに相当する…から、*Lorentz* 変換が導かれることを示した。

しかし、本格的に、この時空と *Minkowski* 時空の性質を比較するには、空間の３軸が対等である…すなわち、実時空がデカルト座標に酷似している系を、解析することが望ましい。

4．一様に膨張している時空

以前の別の論文[3)]では、*Minkowski* 座標系がまずあって、それから一般座標変換で導かれる系を *Minkowski* 時空と定義した。

ここでは、*Minkowski* 座標系にできるだけ類似している実時空の座標系を、(2.1)、(2.2) 式で定義されている源時空から導こう。そし

てその座標系を擬 *Minkowski* 座標系と名づけよう。

4.1 擬 *Minkowski* 座標系（Ⅰ）

新座標系を

$$(x^{\mu}) = (x^0, x, y, z) \qquad (4.1)$$

とする。一般座標変換がきわめて自由度が大きいために、たどるべき路は非常に多くあるように見える。次のような方針を採ろう。

Minkowski 時空によく似ているためには、原点からの距離 R は

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (4.2)$$

また

$$\left.\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

この系の基本テンソルがどうなるか検討をすすめる。

本章に於ける源時空の座標変数と基本テンソルは、下記の定義による。

源時空は

$$(\hat{x}^{\mu}) = (c\tau, \xi_x, \xi_y, \xi_z) \qquad (4.4)$$

源時空の基本テンソルは

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -(c\tau)^2 & & \\ & & -(c\tau)^2 & \\ 0 & & & -(c\tau)^2 \end{bmatrix} \qquad (4.5)$$

である。

なお、第 2 章の球座標系の源時空の（2.7）式を参照すると

$$\xi \equiv \xi_R = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \qquad (4.6)$$

$$\left.\begin{aligned} \xi_x &= \xi \sin\theta \cos\varphi \\ \xi_y &= \xi \sin\theta \sin\varphi \\ \xi_z &= \xi \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

である。

4.2 *Hubble* の法則

（4.2）式のような原点からの距離 R の定義のもとで、遠方の点が原点からの距離に比例する速度で後退しているためには、新しい座標系の時間と原点からの距離は

$$\left.\begin{aligned} x^0 &= c\tau \cosh\xi \\ R &= c\tau \sinh\xi \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

とすれば充分である。

（一般座標変換の自由度が大きいために、いろいろな時間や距離が考えられるが、観測事実を考慮すると、上記の案が妥当であるという意味である。）

上記のような定義によれば、空間座標の原点の宇宙時刻が

$$\tau = \tau_1 \qquad (4.9)$$

であるとき、原点から離れたある点から（実時空の時間座標の）同時刻に光が出発したとする。

光が出発した時刻（時間座標）は

$$x^0 = c\tau_1 = \frac{c\tau_1}{\cosh\xi}\cosh\xi \qquad (4.10)$$

空間座標上の原点からこの光源までの距離R_1は、その時刻において

$$R_1 = \frac{c\tau_1}{\cosh\xi}\sinh\xi = c\tau_1\tanh\xi \qquad (4.11)$$

$$\xi = \eta\ (= const.) \qquad (4.12)$$

とすれば、宇宙時刻の増加とともに

$$\left.\frac{dR_1}{dx^0}\right|_{\xi=const.} \equiv \frac{v}{c} = \lim_{\Delta x^0\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta x^0} \qquad (4.13)$$

であらわされる速度で、光源は後退しているように見える。

$$\left.\begin{aligned}\Delta R &= c\Delta\tau\sinh\eta\\ \Delta x^0 &= c\Delta\tau\cosh\eta\end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

より

$$\left.\begin{aligned}\therefore \frac{v}{c} &= \tanh\eta = \frac{1}{c\tau_1}c\tau_1\tanh\eta\\ &= \frac{1}{c\tau_0}c\tau_0\tanh\eta\end{aligned}\right\} \qquad (4.15)$$

したがって、この光を空間座標の原点で宇宙時刻 τ_0 に受信すると

$$\therefore v = \frac{1}{\tau_0}c\tau_0\tanh\eta \equiv H_0R_0 \qquad (4.16)$$

で示される速度 v で光源が後退しているように観測される。

ただし、τ_0 は、空間座標原点で光を受信した時の宇宙時刻で、R_0

は、等速度で後退するその光源の（今受信している光の出発時刻ではなく）現在の、等時刻座標距離（後退の仕方が変らなければそこにあるはずのところまでの距離）である。

$$R_0 = c\tau_0 \tanh\eta \qquad (4.17)$$

また、H_0は、メートル法（正しくは国際単位系…SI）であらわした *Hubble* の定数である。

$$H_0 = \frac{1}{\tau_0} \qquad (4.18)$$

Hubble の法則における観測点からの距離はいろいろな定義が考えられるが、この理論によれば、前述のように、現在光源があるはずのところまでの距離と考えられる。光が球面状に広がるとき、このような距離を採用することが妥当であると考えるが、これについては別の機会に論ずる。

なお

$$|\eta| << 1 \qquad (4.19)$$

であれば

$$\cosh\eta \cong 1 \qquad (4.20)$$

より

$$\tanh\eta \cong \sinh\eta \cong \eta \qquad (4.21)$$

となるので、どの距離も近似的に同じになり、観測で違いを決定することは難しくなる。

4.3　擬 *Minkowski* 座標系（II）

以上の議論より、源時空からの新しい座標系への座標変換は

$$\left.\begin{aligned}
x^0 &= \hat{x}^0 \cosh\xi \\
x^1 &= \frac{\hat{x}^1}{\xi}\hat{x}^0 \sinh\xi \\
x^2 &= \frac{\hat{x}^2}{\xi}\hat{x}^0 \sinh\xi \\
x^3 &= \frac{\hat{x}^3}{\xi}\hat{x}^0 \sinh\xi
\end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \\
&= \sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (4.23)$$

である。

これらの式によって、新しい座標系の座標変数を、源時空の座標変数のみの陽関数として表すことができた。

5．擬 *Minkowski* 座標系の基本テンソル

新しい座標系の共変基本テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \hat{x}^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial \hat{x}^\beta}{\partial x^\nu}\hat{g}_{\alpha\beta} \qquad (5.1)$$

となる。第４章３節より、これを計算すると

$$g_{00} = 1 \qquad (5.2)$$

$$g_{0k} = g_{k0} = 0 \quad (where \;\; k \neq 0) \qquad (5.3)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
g_{11} &= -\left\{\frac{\xi_x^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\left(1-\frac{\xi_x^2}{\xi^2}\right)\right\} \\
g_{22} &= -\left\{\frac{\xi_y^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\left(1-\frac{\xi_y^2}{\xi^2}\right)\right\} \\
g_{33} &= -\left\{\frac{\xi_z^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\left(1-\frac{\xi_z^2}{\xi^2}\right)\right\}
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.4)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
g_{12} = g_{21} &= -\frac{\xi_x\xi_y}{\xi^2}\left(1-\frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\right) \\
g_{23} = g_{32} &= -\frac{\xi_y\xi_z}{\xi^2}\left(1-\frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\right) \\
g_{31} = g_{13} &= -\frac{\xi_z\xi_x}{\xi^2}\left(1-\frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\right)
\end{aligned}
\right\} \qquad (5.5)
$$

が得られる。(付録 A 参照)

反変基本テンソルは

$$
g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial \hat{x}^\beta}\hat{g}^{\alpha\beta} \qquad (5.6)
$$

より

$$
g^{00} = 1 \qquad (5.7)
$$

$$
g^{0k} = g^{k0} = 0 \quad (\text{where } k \neq 0) \qquad (5.8)
$$

$$\left.\begin{aligned} g^{11} &= -\left\{\frac{\xi_x^2}{\xi^2} + \left(1 - \frac{\xi_x^2}{\xi^2}\right)\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right\} \\ g^{22} &= -\left\{\frac{\xi_y^2}{\xi^2} + \left(1 - \frac{\xi_y^2}{\xi^2}\right)\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right\} \\ g^{33} &= -\left\{\frac{\xi_z^2}{\xi^2} + \left(1 - \frac{\xi_z^2}{\xi^2}\right)\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

$$\left.\begin{aligned} g^{12} = g^{21} &= -\frac{\xi_x\xi_y}{\xi^2}\left(1 - \frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right) \\ g^{23} = g^{32} &= -\frac{\xi_y\xi_z}{\xi^2}\left(1 - \frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right) \\ g^{31} = g^{13} &= -\frac{\xi_z\xi_x}{\xi^2}\left(1 - \frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

となる。(付録B参照)

これらの基本テンソルの成分を観察すると、どの成分にも宇宙時刻 τ は含まれていないことがわかる。これはきわめて特徴的なことであり、膨張部分は、基本テンソルの成分から座標変数の方に移動したのである。

なお、

$$g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (\textit{Kronecker's delta}) \tag{5.11}$$

である。(これは、計算が正しいかどうかのチェック法として有効である。相当複雑な計算になるが、straightforward な計算であるので、省略する。)

この基本テンソルが、*Minkowski* 座標系のテンソルに非常によく似ていることを示そう。空間座標の原点の近傍において

$$|\xi| << 1 \qquad (5.12)$$

である。この条件がどの程度の制約か論じよう。実時空（と想定している）座標系における、原点からの距離は、空間座標の原点で宇宙時刻が

$$\tau = \tau_0 \qquad (5.13)$$

のとき

◇等宇宙時刻距離

$$R = c\tau_0 \sinh\xi \qquad (5.14)$$

◇等座標時刻距離

$$R' = c\tau_0 \tanh\xi \qquad (5.15)$$

等が考えられるが、(5.12) 式の条件が成立しているとき

$$R \cong R' \cong c\tau_0\xi \qquad (5.16)$$

である。現在の宇宙時刻は、*Hubble* の定数の逆数であるが、100億年から150億年の間と考えられている。安全側をとり（すなわち小さく見積もって）100億年と仮定すると原点から半径 1 光年程度の広がりの内側で

$$|\xi| < 10^{-10} \qquad (5.17)$$

となる。これは、通常の計算においては無視できるほど充分小さい量である。

このとき

$$\sinh\xi \cong \xi \qquad (5.18)$$

となる。この近似で無視されている項は、10^{-30}程度の大きさである。

上式が成立しておれば、(5.2) ～ (5.5) 式によって

$$g_{\mu\nu} \cong \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \qquad (5.19)$$

また、(5.7) ～ (5.10) 式によって

$$g^{\mu\nu} \cong \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{bmatrix} \qquad (5.20)$$

となる。

以上のように、この座標系は我々が太陽系程度の広がり内で遭遇するような問題においては（重力場の問題を除き）基本テンソルに関する限り *Minkowski* 座標系とほとんど等価といえる。この座標系を「擬 *Minkowski* 座標系」と呼ぶ。これから一般座標変換で到達できる座標系を、「擬 *Minkowski* 時空」と呼ぶことにすれば、本論文で扱った座標系は、第 2 章、第 3 章も含めて、すべて、「擬 *Minkowski* 時空」である。

なお、この「擬 *Minkowski* 座標系」では、座標 $(x^\mu) = (x^0, x, y, z)$ は、もはやベクトルではない。これは、基本テンソルの形からも明らかである。ベクトルとして振舞うのは、一般の *Riemann* 幾何学の理論どおりに座標の微分 $(dx^\mu) = (dx^0, dx, dy, dz)$ である。

ただし、(4.3) 式より 3 次元空間内におけるの回転操作に対しては例外的に座標もベクトルとして振舞う。なお、(5.12) 式が満たされる原点近傍においては、基本テンソルが *Minkowski* 座標系のそれとほとんど同じであるから、（本論文ではまだ論じていないが）慣性系同士の座標変換（*Lorentz* 変換）に対しても、この「擬 *Minkowski* 座標系」の座標は近似的にベクトルとして振舞うはずである。

6．まとめと今後の問題点

2次元時空論を発展させて、一様に膨張する宇宙モデルで、原点近傍においては、*Minkowski* 座標系に酷似している座標系を見つけることができた。次の課題としては、本論文でやり残した、「*Lorentz* 変換とは宇宙膨張の結果が我々の身近に現れたものである」という前論文[2]の主張を4次元（時間1次元-空間3次元）に拡張することである。

この論文でも、基本テンソルの式は非常に複雑であるから、その計算はかなり膨大なものになると思われる。しかし、物理哲学的に、式の格好を見る限りにおいては、必ず実現できる企画であると思われる。これについては、次の機会に取り組む予定である。

〔完〕

参考文献

1）村田茂昭「*Lorentz* 変換の新解釈」『札幌大学女子短期大学部紀要』30号　1997.9　p23～p34

2）村田茂昭「*Lorentz* 変換の新解釈（Ⅱ）」『札幌大学女子短期大学部紀要』38号　2001.9　p5～p32

3）村田茂昭「４次元時空の *Riemann* 幾何学的表現について」『札幌大学総合論叢』第13号　2002.3.　p191

付録 A　共変基本テンソルの計算

源時空の座標変数は

$$(\hat{x}^{\mu}) = (c\tau, \xi_x, \xi_y, \xi_z) \qquad \text{(A.1)}$$

であり、新しい座標系の座標変数は

$$(x^{\mu}) = (ct, x, y, z) \qquad \text{(A.2)}$$

である。 座標変換

$$\hat{x}^{\mu} \Rightarrow x^{\mu} \qquad \text{(A.3)}$$

の際の変換係数テンソルは、共変成分に関して

$$\overline{M}_{\mu}^{\nu} = \frac{\partial \hat{x}^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \qquad \text{(A.4)}$$

である。

これにより、新しい座標系の共変基本テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \overline{M}_{\mu}^{\alpha} \overline{M}_{\nu}^{\beta} \hat{g}_{\alpha\beta} \qquad \text{(A.5)}$$

となる。ただし、源時空の共変基本テンソルは

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -(c\tau)^2 & & \\ & & -(c\tau)^2 & \\ 0 & & & -(c\tau)^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.6)}$$

である。

新座標系の時刻座標は

$$x^0 = c\tau \cosh\xi = \hat{x}^0 \cosh\xi \qquad \text{(A.7)}$$

である。ここで

$$\xi = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} = \sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2} \qquad \text{(A.8)}$$

である。一方、空間座標は

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= x = \frac{\hat{x}^1}{\xi}\hat{x}^0 \sinh\xi \\ x^2 &= y = \frac{\hat{x}^2}{\xi}\hat{x}^0 \sinh\xi \\ x^3 &= z = \frac{\hat{x}^3}{\xi}\hat{x}^0 \sinh\xi \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.9)}$$

である。これらの式より、源時空の座標変数を新座標系の座標変数であらわしてみよう。

まず

$$\hat{x}^0 = \sqrt{(x^0)^2 - R^2} \qquad \text{(A.10)}$$

$$\because R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} \qquad \text{(A.11)}$$

である。

一方、定義により

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi_x}{\xi} &= \frac{x}{R} = \sin\theta\cos\varphi \\ \frac{\xi_y}{\xi} &= \frac{y}{R} = \sin\theta\sin\varphi \\ \frac{\xi_z}{\xi} &= \frac{z}{R} = \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.12)}$$

である。また

$$\frac{R}{x^0} = \tanh\xi \qquad \text{(A.13)}$$

であるから、(A.10) 式を参考にして

$$\left.\begin{aligned} \hat{x}^1 &= \frac{\xi_x}{\xi}\xi = \frac{x^1}{R}\tanh^{-1}\frac{R}{x^0} \\ \hat{x}^2 &= \frac{\xi_y}{\xi}\xi = \frac{x^2}{R}\tanh^{-1}\frac{R}{x^0} \\ \hat{x}^3 &= \frac{\xi_z}{\xi}\xi = \frac{x^3}{R}\tanh^{-1}\frac{R}{x^0} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.14)}$$

となる。

これらより、座標変換の係数テンソルに表れる偏微分係数を計算できる。

◇ $\dfrac{\partial \hat{x}^k}{\partial x^j}$ の値

○ $k = 0$ の場合

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^0} &= \cosh\xi \\ \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^1} &= -\frac{\xi_x}{\xi}\sinh\xi \\ \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^2} &= -\frac{\xi_y}{\xi}\sinh\xi \\ \frac{\partial \hat{x}^0}{\partial x^3} &= -\frac{\xi_z}{\xi}\sinh\xi \end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.15)}$$

○ $k = 1$ の場合

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^0} &= -\frac{\xi_x}{\xi}\frac{\sinh\xi}{c\tau} \\
\frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^1} &= \frac{1}{c\tau}\left\{\left(1-\frac{\xi_x^2}{\xi^2}\right)\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_x^2}{\xi^2}\cosh\xi\right\} \\
\frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^2} &= \frac{1}{c\tau}\left\{-\frac{\xi_x\xi_y}{\xi^2}\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_x\xi_y}{\xi^2}\cosh\xi\right\} \\
\frac{\partial \hat{x}^1}{\partial x^3} &= \frac{1}{c\tau}\left\{-\frac{\xi_x\xi_z}{\xi^2}\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_x\xi_z}{\xi^2}\cosh\xi\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{A.16}$$

○k ＝ 2 の場合

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}^2}{\partial x^0} &= -\frac{\xi_y}{\xi}\frac{\sinh\xi}{c\tau} \\
\frac{\partial \hat{x}^2}{\partial x^1} &= \frac{1}{c\tau}\left\{-\frac{\xi_y\xi_x}{\xi^2}\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_y\xi_x}{\xi^2}\cosh\xi\right\} \\
\frac{\partial \hat{x}^2}{\partial x^2} &= \frac{1}{c\tau}\left\{\left(1-\frac{\xi_y^2}{\xi^2}\right)\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_y^2}{\xi^2}\cosh\xi\right\} \\
\frac{\partial \hat{x}^2}{\partial x^3} &= \frac{1}{c\tau}\left\{-\frac{\xi_y\xi_z}{\xi^2}\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_y\xi_z}{\xi^2}\cosh\xi\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{A.17}$$

○k ＝ 3 の場合

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{x}^3}{\partial x^0} &= -\frac{\xi_z}{\xi}\frac{\sinh\xi}{c\tau} \\
\frac{\partial \hat{x}^3}{\partial x^1} &= \frac{1}{c\tau}\left\{-\frac{\xi_z\xi_x}{\xi^2}\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_z\xi_x}{\xi^2}\cosh\xi\right\} \\
\frac{\partial \hat{x}^3}{\partial x^2} &= \frac{1}{c\tau}\left\{-\frac{\xi_z\xi_y}{\xi^2}\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_z\xi_y}{\xi^2}\cosh\xi\right\} \\
\frac{\partial \hat{x}^3}{\partial x^3} &= \frac{1}{c\tau}\left\{\left(1-\frac{\xi_z^2}{\xi^2}\right)\frac{\xi}{\sinh\xi}+\frac{\xi_z^2}{\xi^2}\cosh\xi\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{A.18}$$

以上の偏微係数の値より、(A.3) 式の計算を実行すれば

$$g_{00} \doteq 1 \qquad \text{(A.19)}$$

$$g_{0k} = g_{k0} = 0 \quad (where \ \ k \neq 0) \qquad \text{(A.20)}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_{11} &= -\left\{\frac{\xi_x^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\left(1 - \frac{\xi_x^2}{\xi^2}\right)\right\} \\
g_{22} &= -\left\{\frac{\xi_y^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\left(1 - \frac{\xi_y^2}{\xi^2}\right)\right\} \\
g_{33} &= -\left\{\frac{\xi_z^2}{\xi^2} + \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\left(1 - \frac{\xi_z^2}{\xi^2}\right)\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.21)}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_{12} = g_{21} &= -\frac{\xi_x\xi_y}{\xi^2}\left(1 - \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\right) \\
g_{23} = g_{32} &= -\frac{\xi_y\xi_z}{\xi^2}\left(1 - \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\right) \\
g_{31} = g_{13} &= -\frac{\xi_z\xi_x}{\xi^2}\left(1 - \frac{\xi^2}{\sinh^2\xi}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(A.22)}$$

が得られる。

計算はやや複雑であるが、straightforward であるので省略する。

［付録 A　完］

付録Ｂ　反変基本テンソルの計算

源時空の座標変数は

$$(\hat{x}^{\mu})=(c\tau,\xi_x,\xi_y,\xi_z) \qquad \text{(B.1)}$$

であり、新しい座標系の座標変数は

$$(x^{\mu})=(ct,x,y,z) \qquad \text{(B.2)}$$

である。

座標変換

$$\hat{x}^{\mu} \Rightarrow x^{\mu} \qquad \text{(B.3)}$$

の際の変換係数テンソルは、反変成分に関して

$$M_{\mu}^{\nu}=\frac{\partial x^{\nu}}{\partial \hat{x}^{\mu}} \qquad \text{(B.4)}$$

である。

これにより、新しい座標系の反変基本テンソルは

$$g^{\mu\nu}=M_{\alpha}^{\mu}M_{\beta}^{\nu}\hat{g}^{\alpha\beta} \qquad \text{(B.5)}$$

となる。ただし、源時空の反変基本テンソルは

$$\hat{g}^{\mu\nu}=\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & -\frac{1}{(c\tau)^2} & & \\ & & -\frac{1}{(c\tau)^2} & \\ 0 & & & -\frac{1}{(c\tau)^2} \end{bmatrix} \qquad \text{(B.6)}$$

である。

ここで

$$x^0 = c\tau\cosh\xi = \hat{x}^0\cosh\xi \tag{B.7}$$

$$\because \xi = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} = \sqrt{(\hat{x}^1)^2 + (\hat{x}^2)^2 + (\hat{x}^3)^2} \tag{B.8}$$

である。

また

$$\left.\begin{aligned} x^1 = x = \hat{x}^0\sinh\xi\ \frac{\hat{x}^1}{\xi} \\ x^2 = y = \hat{x}^0\sinh\xi\ \frac{\hat{x}^2}{\xi} \\ x^3 = z = \hat{x}^0\sinh\xi\ \frac{\hat{x}^3}{\xi} \end{aligned}\right\} \tag{B.9}$$

である。なお、(B.9) 式を導出する際に下記の定義式を利用した。

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi_x}{\xi} = \frac{x}{R} = \sin\theta\cos\varphi \\ \frac{\xi_y}{\xi} = \frac{y}{R} = \sin\theta\sin\varphi \\ \frac{\xi_z}{\xi} = \frac{z}{R} = \cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{B.10}$$

これらより、座標変換の係数テンソルに表れる偏微分係数を計算できる。

◇ $\dfrac{\partial x^k}{\partial \hat{x}^j}$ の値

○ $k = 0$ の場合

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x^0}{\partial \hat{x}^0} &= \cosh\xi \\
\frac{\partial x^0}{\partial \hat{x}^1} &= \frac{\xi_x}{\xi} c\tau \sinh\xi \\
\frac{\partial x^0}{\partial \hat{x}^2} &= \frac{\xi_y}{\xi} c\tau \sinh\xi \\
\frac{\partial x^0}{\partial \hat{x}^3} &= \frac{\xi_z}{\xi} c\tau \sinh\xi
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.11)}$$

○k = 1 の場合

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^0} &= \frac{\xi_x}{\xi}\sinh\xi \\
\frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^1} &= c\tau\left(\frac{\xi_x^2}{\xi^2}\cosh\xi + \frac{\xi^2-\xi_x^2}{\xi^3}\sinh\xi\right) \\
\frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^2} &= c\tau\left(\frac{\xi_x\xi_y}{\xi^2}\cosh\xi - \frac{\xi_x\xi_y}{\xi^3}\sinh\xi\right) \\
\frac{\partial x^1}{\partial \hat{x}^3} &= c\tau\left(\frac{\xi_x\xi_z}{\xi^2}\cosh\xi - \frac{\xi_x\xi_z}{\xi^3}\sinh\xi\right)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.12)}$$

○k = 2 の場合

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^0} &= \frac{\xi_y}{\xi}\sinh\xi \\
\frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^1} &= c\tau\left(\frac{\xi_y\xi_x}{\xi^2}\cosh\xi - \frac{\xi_y\xi_x}{\xi^3}\sinh\xi\right) \\
\frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^2} &= c\tau\left(\frac{\xi_y^2}{\xi^2}\cosh\xi + \frac{\xi^2-\xi_y^2}{\xi^3}\sinh\xi\right) \\
\frac{\partial x^2}{\partial \hat{x}^3} &= c\tau\left(\frac{\xi_y\xi_z}{\xi^2}\cosh\xi - \frac{\xi_y\xi_z}{\xi^3}\sinh\xi\right)
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(B.13)}$$

○$k=3$ の場合

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x^3}{\partial \hat{x}^0} &= \frac{\xi_z}{\xi}\sinh\xi \\
\frac{\partial x^3}{\partial \hat{x}^1} &= c\tau\left(\frac{\xi_z\xi_x}{\xi^2}\cosh\xi - \frac{\xi_z\xi_x}{\xi^3}\sinh\xi\right) \\
\frac{\partial x^3}{\partial \hat{x}^2} &= c\tau\left(\frac{\xi_z\xi_y}{\xi^2}\cosh\xi - \frac{\xi_z\xi_y}{\xi^3}\sinh\xi\right) \\
\frac{\partial x^3}{\partial \hat{x}^3} &= c\tau\left(\frac{\xi_z^2}{\xi^2}\cosh\xi + \frac{\xi^2-\xi_z^2}{\xi^3}\sinh\xi\right)
\end{aligned}\right\} \tag{B.14}$$

以上の偏微係数の値より、(B.5) 式の計算を実行すれば

$$g^{00} = 1 \tag{B.15}$$

$$g^{0k} = g^{k0} = 0 \quad (where \quad k \neq 0\ ) \tag{B.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
g^{11} &= -\left\{\frac{\xi_x^2}{\xi^2} + \left(1-\frac{\xi_x^2}{\xi^2}\right)\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right\} \\
g^{22} &= -\left\{\frac{\xi_y^2}{\xi^2} + \left(1-\frac{\xi_y^2}{\xi^2}\right)\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right\} \\
g^{33} &= -\left\{\frac{\xi_z^2}{\xi^2} + \left(1-\frac{\xi_z^2}{\xi^2}\right)\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{B.17}$$

$$\left.\begin{aligned}
g^{12} = g^{21} &= -\frac{\xi_x\xi_y}{\xi^2}\left(1-\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right) \\
g^{23} = g^{32} &= -\frac{\xi_y\xi_z}{\xi^2}\left(1-\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right) \\
g^{31} = g^{13} &= -\frac{\xi_z\xi_x}{\xi^2}\left(1-\frac{\sinh^2\xi}{\xi^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{B.18}$$

が得られる。

計算はやや複雑であるが、straightforward であるので省略する。

［付録B　完］