

# Maxwell の方程式から特殊相対論へ

## —古典電気磁気学成立過程の歴史的展望—

村田 茂昭

### 1. はじめに

電気磁気学的現象については、科学的哲学的研究が各種行われていたが、それらは19世紀に実験法則として確立していった。この時代の著名な研究者達の名は、法則の名前に残っている。いわゆる発見順 (Heuristic) に記述されている教科書<sup>1)</sup> においては、これらの偉大な名前がほぼ歴史順にあらわれる。

電磁現象の定性的性質については、*M. Faraday* が非常に的確な見解を発表していた。*Faraday* の考えによれば、(媒質がある場合の) 電氣的・磁氣的作用は、空間を飛び越え直接離れたところに作用する遠隔作用ではなく、途中の媒質の性質がじわじわと変化しその作用が離れたところに及ぶ近接作用である (当時よく知られていた *Newton* の万有引力は、遠隔作用と考えられていた)。しかし、そのころは現在の国際単位系 (SI : *Système International d'Unités*) はまだ存在していなく、複数の単位系が共存していた。したがって、これらの実験結果を整理して、各種物理量の理論的關係式にまとめ上げることは、現在考えられるような簡単なことではない。

近接作用の立場で電磁場の関係式を創り上げることに成功したのは、イギリスの理論家 *J.C. Maxwell* である。彼は、これらの作業にあたって、当時の最新の工学分野であった水力学に使われている数学を用いるのが適切であることに気づいた。当時は (産業革命の時期にあたり)、蒸気機関と水車が動力源として一般的であった。とくに水力は安価な動力源として重要であった。したがって、水力学のための応用数学が盛んに研究されていたのである。*Maxwell* のアイディアによ

って、電気磁気学の中に、渦（ドイツ語：rotation 英語：curl）、発散（divergence）、勾配（gradient）のような水力学（流体力学）で確立した概念が入り込んだ。

1861年、*J.C.Maxwell* は、後に彼の名で呼ばれることになる電気磁気学に関する方程式を発表した。このとき彼は、この方程式に光と同じ速度で伝播する波動解があることを示した。すなわち、電気磁気学の基本式の発表と、電磁波の存在の予言および光が電磁波であるという仮説の発表が同時に行われたのである。

光の速度は、かなり早くに天文学的観測から測定されていた。デンマークの天文学者 *O.Roemer* は、木星の衛星の食の周期を丹念に記録し、それに季節変動があることを発見した。そして、光の速度が有限であるとしたならばつじつまが合うと言う結論に達した。現在の知識によれば、「光が地球の公転軌道の近似的円の直径に相当する距離を伝播するのに要する時間」は、約16分40秒である。太陽近傍において、木星の第1衛星イオの挙動を観察している架空の観測者を仮定しよう。この架空の観測者から見えるイオが、木星の裏に隠れる時刻および、反対側から現れる時刻を基準にとると、同じ現象を地球上の観測者が計測するとき、その観測時刻には誤差が入り込む。この誤差は、地球が木星に対して太陽と反対側にあるときプラス約8分20秒であり、地球が木星と同じ側にあるとき約マイナス8分20秒となる。*Roemer* が何の目的で観測をはじめたか不明であるが、*J.Kepler* の惑星運動の法則発表（1609～1618年）の約50年後、*Newton* のプリンキピア、万有引力の法則発表（1666～1687年）の時期にあたり、当時としては最新の分野であったのであろう。しかし光の速度の測定は、これら天体運動の基礎研究の副産物として得られた巨大な業績である。

*Roemer* は、単調なデータを辛抱強く整理し、周期的誤差の変動は光の速度が有限であることによると考えた。彼が自分の観測データから計算した光の速度は、正しい値の約4分の3にすぎなかったが、当時（1675年）としてはきわめて良い結果であったといえる（その後、

19世紀になって、高速回転する歯車の歯をシャッターにして光を区切る実験によって（地上で）光速が測定された。シャッターを通り抜けた光が、鏡にあたって戻ってきて、タイミングよくまたシャッターを潜り抜ける現象を、歯車の回転数を変えながら観測するのである。この卓越したアイディアによる測定で、光速度の精度はより高められたが、これは *Roemer* の仕事から170年以上後の話である (*A.H.L. Fizeau* 1849年)。

光の速度が無限大ではないことがわかると、以前からあった「光とは何か？」という議論が、さらに白熱化する（光の波動説 *C.Huygens* 1678年）。

ともかく、*Maxwell* の時代には、光速度はかなり正確に測定されていた。もちろん、この光速度と「*Maxwell* 波動」の速度の計算値は、完全に一致したわけではなく、非常に近かったと言うべきであろう。*Maxwell* は、「値が非常に近い」のであれば、理論値は「同じ」であろうと推測したと思われる。

## 2. *Maxwell* の方程式

前述のごとくに、国際単位系 (SI) はまだなかったが、説明の便宜上 SI で記す。

いずれも非常に有名な法則なので、とくに図で解説はしない。

現在 *Maxwell* の方程式と考えられているものは、次の四つである。

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i} \quad (2.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

ただし

$\rho$  : 電荷密度

$\mathbf{i}$  : 電流密度ベクトル

$\mathbf{D}$  : 電束密度

$\mathbf{H}$  : 磁界

$\mathbf{B}$  : 磁束密度

$\mathbf{E}$  : 電場

また

$\epsilon$  : 誘電率

$\mu$  : 透磁率

である。さらに媒質の現象論的方程式として

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (a) \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (b) \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

がある。これらの式は、しばしば構成方程式と呼ばれる。

$\mathbf{D}$  と  $\mathbf{H}$  は、「理論式に登場させるべきではない」という考え<sup>2)</sup>もあるが、ここでは 3 + 1 次元の *Maxwell* の方程式として、やや古い表現をまず表記した。

なお、次の式

$$\mathbf{i} = \kappa \mathbf{E} \quad (2.6)$$

$\kappa$  : 導電率

を構成方程式に追加する場合があるが、これは不適當である。なぜならば、このオームの法則の微分表現は、電子の運動方程式の定常解に関係する式であって、他の式とは全く性格を異にする式なのである。

じつは *Maxwell* の時代においては、それまで報告されていた実験結果を忠実に理論式化すれば、(2.2) 式は、

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} \quad (2.7)$$

であるべきであった。しかし、*Maxwell* は、たとえば電気回路素子の一つの蓄電器 (capacitor) のところでも電流連続の定理が成立すべきであると考え、(2.7) 式の右辺に、変位電流  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  の項を (実験結果が報告されていないにもかかわらず) 勝手に付け加えた。

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.8)$$

彼のこの「創造性」によって、彼の方程式は光に非常に近い速度で伝播する波動解を持つこととなった。しかし、*Einstein* の理論に忠実にこの式を書き直すと、同じ関係ではあるけれども、(2.2) 式の形に書くほうが正しい表記法である (左辺は 2 階の反変テンソルの 4 次元ダイバージェンスの一部であり、右辺は四次元ベクトルの成分である)。

現代の知識に従って、SI を用いて *Maxwell* の「電磁波の存在の予言」を説明する事は、きわめて簡単である。(付録参照)

しかし、*Maxwell* の時代には、このような便利な単位系は存在しなかった (現代の、電気磁気学を学ぶ学生は、*G. Giorgi*…SI の基礎になった有理化 MKS 単位系の発案者…に、深く感謝しなければならない)。 *Maxwell* の発表した式は、本章の冒頭に掲げた式とは、とても同じとは思えないほど、見かけが異なる式であったと推定されるが、

煩雑であるのでその式の詳細は物理学史の専門家に任せる（その中には  $\pi$  や実験で定められた定数がちりばめられていたはずである）。

ともかく、変位電流の項を追加したため、 $\mathbf{E}$  または  $\mathbf{B}$  のデカルト座標成分（これを便宜上  $f$  と表記する）について、下記の形の方程式が得られた。たとえば、 $z$  座標について

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \epsilon\mu \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

ただし  $\epsilon\mu$  の部分は、前述のごとくもっと複雑で、実験によって得られた定数が入っていた。しかし、この形の微分方程式が、波動方程式であることはすでに知られていて、その波動の速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.10)$$

である。*Maxwell* は、電卓すらなかった時代に数値計算を実行し、真空中の場合は、その速度がすでに知られている光の速度に非常に近いことに気づいた。「非常に近い」のであれば、それは「同じ」に違いないと言うのが天才の発想であろう。

以下に、SI で記述される現在の *Maxwell* の方程式について、簡単に考察を追加しておく。

(2.2) 式と (2.4) 式のおおのこの左辺を見ると、時間偏微分の項の符号が異なる。この状況を本論文においては、「符号のねじれ」と呼ぶ。

これは、電磁場の基本式が、現在の理論では電気的量和磁氣的量に関して単純な対称性を持たないことを示す。このことに関しては、物理哲学的にさまざまに論じられてきた。ここでは、この「符号のねじれ」こそが、我々の時空が 4 次元異常 *Riemann* 空間である結果であり、*Einstein* の特殊相対論の有力な状況証拠であると指摘しておく。

### 3. 等速度変換

#### 3.1 Galilei 変換

*Maxwell* の方程式が発表される前の時代の典型的な理論物理学の基本式は、*Newton* 力学の運動方程式であった。

簡単のため、3次元の空間座標はデカルト座標系に限る。時刻を  $t$  とする。デカルト系では、座標は3次元ベクトルとなる。基準となる系を  $K$  系とし、それに対して時間的に一定の速度  $\mathbf{v}$  で相対運動している系を  $K'$  系とする。以下において  $K'$  系の量には ' (prime) をつけて、 $K$  系の量と区別する。質量  $m$  の質点の座標をそれぞれ  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}'$  とする。

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\text{a}) \\ \mathbf{x}' = (x'(t), y'(t), z'(t)) \quad (\text{b}) \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (3.2)$$

なお、これは質点の速度ではなく、二つの系の相対速度である。

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \quad (3.3)$$

*Newton* の運動方程式は、質量  $m$  の質点に関して

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\alpha} \quad (3.4)$$

ここで、 $\mathbf{F}$  は、3次元の力のベクトル、 $\boldsymbol{\alpha}$  は、3次元の加速度ベクトルである。

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z) \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \left( \frac{d^2x(t)}{dt^2}, \frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{d^2z(t)}{dt^2} \right) \quad (3.6)$$

(3.4) 式は、時刻に関する微分係数は 2 階の項のみしか含まない。

なお、(3.3) 式には

$$t' = t \quad (3.7)$$

という関係式が暗黙のうちに含まれている。

いま、観測している電磁現象（の起こっている物体）に対して静止している系を  $K'$  系とする。この系で、(3.4) 式に相当する式が厳密に成立しているとしよう。

$$\mathbf{F}' = m \boldsymbol{\alpha}' \quad (3.8)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = (0, 0, 0) \quad (3.9)$$

であるから

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x'(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 x(t)}{dt^2} & (a) \\ \frac{d^2 y'(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 y(t)}{dt^2} & (b) \\ \frac{d^2 z'(t)}{dt^2} &= \frac{d^2 z(t)}{dt^2} & (c) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha}' = \left( \frac{d^2 x'(t)}{dt^2}, \frac{d^2 y'(t)}{dt^2}, \frac{d^2 z'(t)}{dt^2} \right) = \boldsymbol{\alpha} \quad (3.11)$$

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} \quad (3.12)$$

質量が速度に無関係であるとする（当時はそのように考えられて



いた)、(3.3), (3.7) 式で表される座標変換に対して、*Newton* 力学の運動方程式は不変である。

(3.3), (3.7) 式を通常、*Galilei* 変換と呼ぶ。すなわち、*Newton* 力学の基本方程式である運動方程式は、*Galilei* 変換に対して形を変えない。形を変えないことを、共変的であると表現する。K系、K'系のうちどちらかが絶対静止系であったとしても、*Newton* 力学の運動方程式は全く同形である。

ゆえに、*Newton* 力学の基本方程式によっては、絶対静止系に対する相対速度（絶対速度）は検出できない。このことを、「*Galilei* の相対性原理」と呼ぶ。

（相対性と呼ばれる現象で我々の身近にある例は、ほとんど「*Galilei* の相対性原理」で説明できる程度のものである。たとえば、「等速度で動いている列車の中で、外の情報には関係ない性質の実験によって対地速度は測定できない」等）。

絶対静止空間が存在すべきであると考えていた *Newton* は、自分の理論によっては、絶対静止空間を認識できないことをよく知っており、非常に悩んだと伝えられる。しかし、彼は最後まで「絶対静止空間は存在する」と考えた。

「*Einstein* の相対性理論が、*Newton* 力学のアンチテーゼである」という命題は、「ただし、*Newton* が信じていた物理哲学に忠実な力学体系を *Newton* 力学と言う」という条件をつけなければ正しいとは言えない。*Maxwell* の方程式が発表されるまでは、物理学者達の大部分は相対性原理を信じていたのである。ただし、それは「*Galilei* の相対性原理」であった。

### 3.2 Hertz の試み

近接作用の立場による *Maxwell* の電磁場理論が発表され、それが実験結果を極めて正確に説明できることがわかると、当然のことながら、光の電磁波説は有力な仮説となった。いまふりかえてみると、問題点は二つあった。

- (1) 電磁波を伝える媒質は何か？
- (2) *Maxwell* の方程式は、*Galilei* 変換に対して共変か？

電磁波の仮説発表以前から、真空中の電気磁気的現象の解釈として、「何か当時の研究者のまだ知らない媒質があり、その中の現象である」という考えがあった。これは、媒質のある場合の電磁気的現象からの類推であろう。この、当時の研究者から「見えない」媒質は「エーテル：ether…神々の吸う香気」という名で呼ばれていた。そこで、光や、*Maxwell* が予言し、後に *H.R.Hertz* が実験で確認する(1888年) ことになる電磁波は、エーテル中の波動のように思われた。

理論家達は、これらの方程式が等速度変換に対してどのようなふるまいをするか検討をはじめた。これと平行して、ある系とそれに相対速度がある系を作り出し、各種の実験が行われた。

*Hertz* は、

1.  $K'$  系（観測している電磁現象…物体に関連して起こっている…に対し静止している系）では、*Maxwell* の発表した方程式が厳密に成立する。
2. *Maxwell* の方程式は *Galilei* 変換に共变的である。

と仮定し、解析を進めた。そして、 $K'$  系で *Maxwell* の方程式にしたがっている電磁現象が、それに対して等速で移動している系 ( $K$  系) では、どのように観測されるか（言い換えれば  $K$  系で成立している電磁場の基本式はどうなっているか）を、理論的に導き出した ( $K$  系の  $K'$  系に対する相対速度は、 $-\mathbf{v}$  となる。そうすると、prime のつけ方が逆にしたほうがすっきりするように感じられるかもしれないが、ここは標準的教科書<sup>5)</sup> にあわせた)。

なお、*Maxwell* の方程式に含まれる  $K$  系の座標によるひとつの偏微分係数は、*Galilei* 変換によって複数の  $K'$  系の偏微分係数の複合式となる。これにより、電磁場の諸量の *Galilei* 変換による挙動が推定で

きる。つまり、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  も *Galilei* 変換によって規則的に変化する。

※  $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$  は、当時の理論では 3次元ベクトルと考えられたから、*Galilei* 変換によって、3次元ベクトルとしてふるまう。しかし、このあたりの理論が明確になったのは、*Einstein* が一般相対論の研究をはじめ、古典物理学に *Riemann* 幾何学を導入してからである。この幾何学にしたがって、ベクトルやテンソルの指標の共変・反変の区別を厳密に行えば、座標変換に対する物理量の変換規則は極めて明解になる。それまでは、「数学にしたがってその都度計算する」色彩が強かった。

すでに、*Newton* の時代から200年が経過しており、太陽系のことは、かなりよくわかっていた。我々の地球は、太陽を中心にしてほぼ円軌道を描いて公転している。この公転速度は約30km/secである。当時の物理学者たちは、「たぶん太陽は絶対静止かそれに近い状態にあり、地球がその周りを中心にかなりの速度で公転している」と想定していたものと推定される。つまり、地球はエーテルの中を運動しているという考えが有力であった。

$K'$ 系は、ある電磁現象（言い換えれば、ある物体）に対して静止している系であり、 $K$ 系はその物体に対して移動している系であるが、*Hertz* は、「 $K$ 系が絶対静止系であり、地球は  $K'$ 系である」との想定から上記1、2の仮定を立て、研究を進めたのではないかと思われる。

しかし、*Hertz* が発表した方程式 (*Hertz* 方程式 1890年) は、*Maxwell* の方程式にはない、速度  $v$  を含む余分な項が含まれていた<sup>3)</sup>。これは、電磁現象を観測し、どのような式 (*Maxwell* 方程式か、*Hertz* 方程式か?) が成立しているか調べると、絶対速度が判明することを意味する。

「ついに絶対速度の測定が可能になったのか！」実験家達は色めきたったに違いない。しかし、*Hertz* 方程式が正しくないことは、すぐに

判明した。要するに、一部を除きいくつかの重要な実験結果を説明できないのである<sup>4)</sup>。観測結果によれば、**K**系においても、やはり *Maxwell* の方程式が成立していると考えざるを得なかった。

### 3.3 Lorentz 変換の原型

*Hertz* の失敗を注意深く検討した *Lorentz* は、*Galilei* 変換を修正することにした。

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t \quad (3.3)$$

はそのままとして、時間は

$$t' = t - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \quad (3.13)$$

と変換されると仮定した。

また、電磁界の諸量は、この変換に対して、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &\equiv \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} & (a) \\ \mathbf{B}' &\equiv \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{E} & (b) \\ \mathbf{D}' &\equiv \mathbf{D} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v} \times \mathbf{H} & (c) \\ \mathbf{H}' &\equiv \mathbf{H} - \mathbf{v} \times \mathbf{D} & (d) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

と変換されると仮定した。また、電磁界の源は

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i}' &\equiv \mathbf{i} & (a) \\ \rho' &\equiv \rho & (b) \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

とおいた。

このようにして *Lorentz* は、電磁現象が起こっている物体に対して相対的に移動している系 (**K**系) でも、近似的に *Maxwell* の方程式が

成立する理論を作り上げた。そうすれば、*Hertz* の理論では説明できなかった、当時の重要な実験結果<sup>4)</sup> を近似的に説明可能であった。

この説明は、系を取り替えても同様である。すなわち、絶対静止系を *K* 系とし、そこでは *Maxwell* の方程式が成立する。それに対して、一定の速度で移動する系（地球上の実験室）を *K'* 系とすれば、そこでは近似的に *Maxwell* の方程式が成立している。以後、そのように話を進める。

電磁場の諸量に対するその相対誤差は、 $\beta^2$  の程度であった。

ただし

$$\beta \equiv \frac{|\mathbf{v}|}{c} \quad (3.16)$$

である。

すなわち、 $\beta^2$  の程度の違いが測定可能であれば、絶対速度の有無が測定可能である。当時知られていた相対速度は、地球の公転速度が最大の速度であったから、

$$\beta \equiv \frac{3 \times 10^4}{3 \times 10^8} = 10^{-4} \quad (3.17)$$

程度である。したがって、絶対速度検出のためには、**E**、**B** に関して、 $10^{-8}$  程度の相対的变化を検出できる実験を企画する必要がある。

「地球の公転運動は、円運動であるが、たぶん接線方向の直線的等速運動とみなせるであろう。その他に、地球は自転をしている。自転による回転速度は、赤道上で最大値をとり約  $460\text{m} / \text{sec}$  である。この速度自体は、公転速度に比してはるかに小さい。回転は加速度運動を意味するが、たぶん加速度の影響は小さく、自転によって絶対速度の方向が刻々変化するように観測されるであろう」…当時の学者達の考えはこんなものであろう。地上で精密な実験をすれば、絶対速度の方向の変化の様子を観測できるかもしれないが、相対変化  $10^{-8}$  を検出するという要求は、当時は不可能に近いと考えられた。

この困難な問題に挑戦したのが、*Mickelson* と *Morley* である。

#### 4. *Mickelson-Morley* の実験と Lorentz 変換

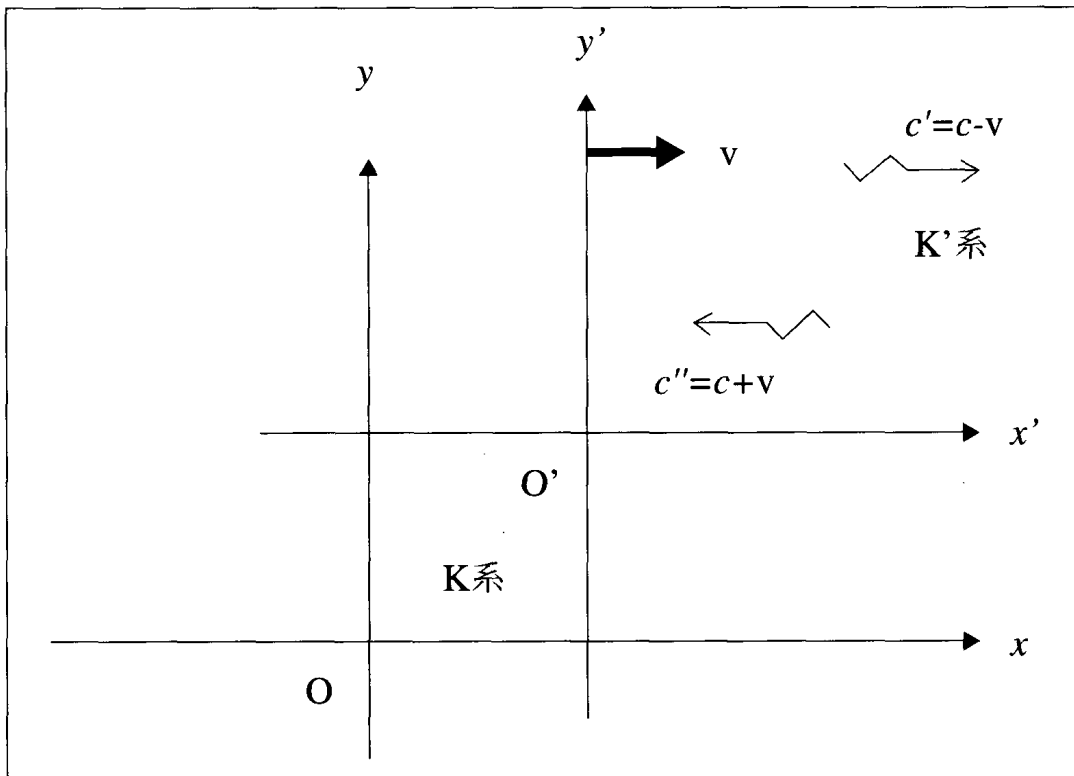
##### 4.1 *Mickelson-Morley* の実験

*Mickelson* と *Morley* は、実験の精度をあげるため、光の干渉を利用することを考えた。

彼らの実験の大略を説明する前に、若干の準備をしておこう。

簡単のため、 $K'$ 系は、 $K$ 系の $x$ 軸の正の方向に、一定の速度 $v$ で移動しているものとする（第1図）。

第1図 相互に等速運動する二つの系



絶対静止系 ( $K$ 系) は、エーテルに対して静止しているとする、 $K'$ 系はエーテルの中を速度  $v$  で  $x$  軸方向に運動している。

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0) \quad (4.1)$$

第1図では二つの系の $x$ 軸をずらして描いているが、これは図を見やすくするためである。空気の中を移動して音波を観測することと、エーテルの中を移動し光を観測することとを等価だとすると、 $K'$ 系の観測者はエーテル風（エーテルの流れ）を感じずるはずである。光はエーテル風の影響を受けるであろう。地球の自転を考慮すれば、エーテル風の影響は刻々変化する。

*Lorentz* の考えによれば、エーテルに対して静止している  $K$  系では、厳密に *Maxwell* の方程式が成立している。したがって、光波はエーテルに対し光速度  $c$ （空気中と真空中とでは、光速度はほとんど同じであるので、簡単のため下付の添え字 0 は省略する）で伝播する。したがって、 $K'$  系においては、 $x$  の正の方向への光の伝播速度を  $c'$ 、負の方向への伝播速度を  $c''$  とすると、

$$\left. \begin{array}{l} c' = c - v \quad (a) \\ c'' = c + v \quad (b) \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

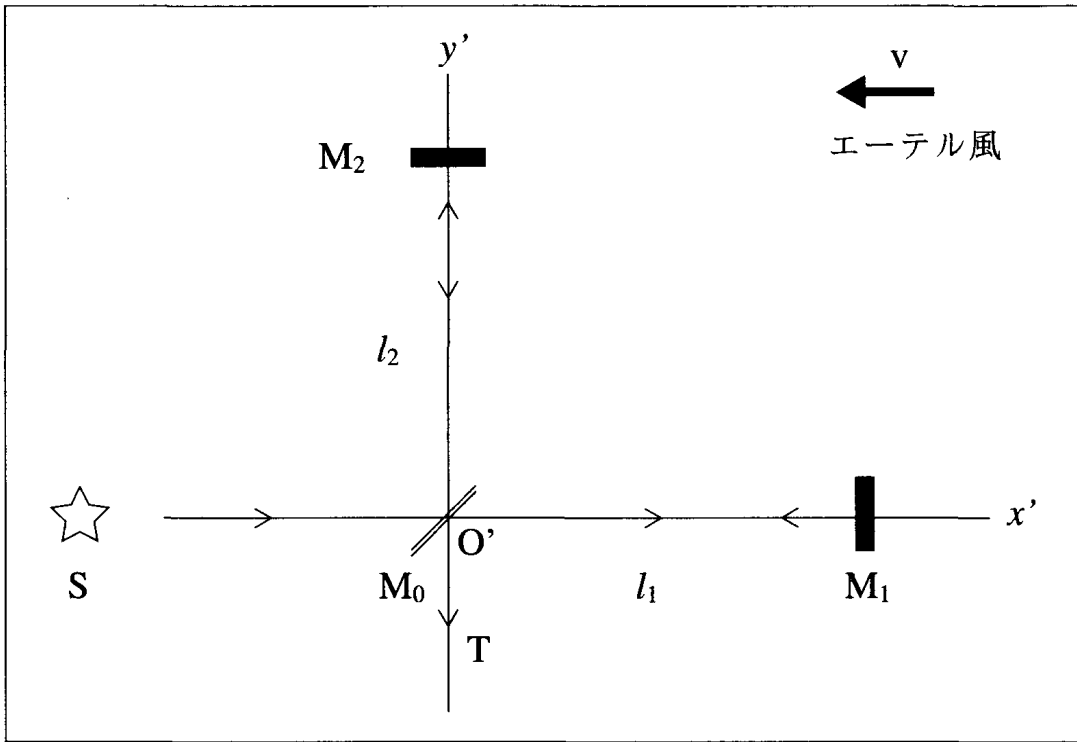
である。

*Mickelson* と *Morley* が考案した実験方法は光の干渉を利用したもので、概略を第2図に示す。光源  $S$  を出発して  $x'$  軸の正の方向に進む光は、 $x'$  軸上に45度傾けておかれた半透明の鏡  $M_0$  によって  $x'$  方向（光路1）と  $y'$  方向（光路2）に別けられる。各々は  $K'$  系の原点に位置する  $M_0$  より、それぞれ  $l_1$ 、 $l_2$  だけ離れた位置にある鏡  $M_1$ 、 $M_2$  によって反射され  $M_0$  に戻ってくる。そして、 $M_1$  によって反射されたあと  $M_0$  によって  $y'$  の負の方向に反射された成分と、 $M_2$  によって反射されてから、 $M_0$  を通り抜けた成分が  $T$  において干渉する。なお、彼らの実験においては、

$$l_1 = l_2 \equiv l \quad (4.3)$$

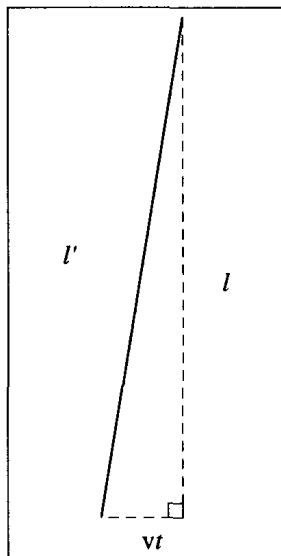
であった。

第2図 Mickelson と Morley の実験



彼らは、 $x'$  軸を地球の公転方向にとり、 $y'$  軸をそれと直角方向にとるとエーテル風が検出できると考えた。なお、装置は、念のため90度回転できる ( $x'$  軸と  $y'$  軸を入れ替えることができる) ように工夫されてあった。

第3図 絶対静止系における光路2の一部





K系（絶対静止系）から、光路2の往路を考察すると、エーテル風に流され、第3図のようになるはずである。いま、光が $y'$ 軸上を、 $O'$ と $M_2$ の間を往復する時間を、 $t_{\perp}$ とする。

$$t_{\perp} = 2t \quad (4.4)$$

とすると

$$l' = \sqrt{l^2 + (vt)^2} \quad (4.5)$$

$$t = \frac{l'}{c} = \frac{\sqrt{l^2 + (vt)^2}}{c} \quad (4.6)$$

$$\therefore t = \frac{l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.7)$$

ここで

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (4.8)$$

である。

$$\therefore t_{\perp} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.9)$$

一方、 $x'$ 軸方向（ $x$ 軸）方向の光路1を進む光は、 $O'$ から $M_1$ までは、エーテル風に逆らって進み、 $M_1$ から $O'$ （ $M_0$ ）までは、エーテル風に乗って戻ってくる。

往復時間 $t_{//}$ は

$$\begin{aligned} t_{//} &= \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2cl}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{2l}{c} \frac{1}{1 - \beta^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

したがって、光路の異なる光の到達時間の差は

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_{\parallel} - t_{\perp} \\ &\equiv \frac{2l}{c} \left( \beta^2 - \frac{1}{2}\beta^2 \right) = \frac{l}{c} \beta^2\end{aligned}\quad (4.11)$$

実際は、到達時間の差は位相の差として観測される。装置を90度回転させると、(4.11) 式の時間差に相当する2倍の位相の変化が観測されなければならない。

*Mickelson* と *Morley* は、共同で、あるいは単独で、この種の実験を間をおいて何度も行った。しかし、T点 (T線…光を干渉させている部分) 上の、この光路の異なる二つの光線のつくる干渉縞模様には、地球の公転速度に対応するほどの位相差は検出されなかった。それどころか、経験をつみ装置が改良されてゆくにつれて、90度装置を回転させたときの干渉縞模様の変化は減る一方であった (この種の実験の現代版は、レーザー光線を用いて1964年に行われている。さらにその後も追試されているはずである)。

実験誤差を考慮すれば、エーテル風の速度  $v$  はゼロとは断定できなかった。しかし、「どう大きく見積もっても、 $v$  は地球の公転速度の30分の1以下である」という報告を聞くと、光路差による時間差はゼロと考えざるを得ない。

## 4.2 Lorentz 短縮

*Mickelson* と *Morley* の実験結果から、「移動系において成立している電磁場の基本方程式には、絶対静止系で正しく成立している *Maxwell* の方程式に比して、 $\beta^2$  程度以上の誤差は含まれない」と考えるのが妥当である。この実験結果を聞いて、*G.F.Fitzgerald* と *Lorentz* は、独立に、「すべての物体は、絶対運動によって、その運動方向の長さが  $\sqrt{1-\beta^2}$  の割合で短縮する」という考えに到達した。(4.10) 式をこの仮説にしたがって書き換えると

$$\therefore t_{\parallel} = \frac{2l\sqrt{1-\beta^2}}{c} \frac{1}{1-\beta^2} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.12)$$

(ただし (4.10) 式において、 $l \rightarrow l\sqrt{1-\beta^2}$  とする)

$$\therefore \Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} = 0 \quad (4.13)$$

*Lorentz* は、この短縮を移動系で現実に起こる現象であると考え、その原因を物質の原子的性質に求めた（具体的には、原子の構造で説明しようとした）。現在は、*Lorentz* の考えは正しくないと言われるが、便宜的に *Lorentz* 短縮 (*Fitzgerald-Lorentz* 短縮) という言葉が今でも使用されている。

### 4.3 時間の遅れ

いままで、

$$l_1 = l_2 \equiv l \quad (4.3)$$

として計算を進めたが、光干渉計のふたつの腕の長さをかえることとする。

$$\left. \begin{array}{l} l_1 = l \\ l_2 = l + a \end{array} \right\} \quad (4.14)$$

とすると、*Fitzgerald-Lorentz* 短縮を考えに入れても、

$$\left. \begin{array}{l} t_{\parallel} = \frac{2l}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ t_{\perp} = \frac{2(l+a)}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} = -\frac{2a}{c} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.16)$$

となる。(4.16) 式の右辺は、「絶対速度」につれて変化する。故に、(当時の *Lorentz* の考えによると) 地球の自転につれて (実験室からみた地球の公転速度の方向が変化するから) 干渉計の縞模様は変化するはずである。この実験は、ずっと後に (1932年) *Kennedy* と *Thorndyke* によってなされた。結果は否定的であり、地球の公転運動を反映するような大きな位相のずれは、観測されなかった。

この実験結果を説明するには、移動系の中では時間が遅れていて

$$\left. \begin{aligned} t'_{\parallel} &= t_{\parallel} \sqrt{1-\beta^2} \\ t'_{\perp} &= t_{\perp} \sqrt{1-\beta^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

$$\therefore \Delta t = t'_{\parallel} - t'_{\perp} = -\frac{2a}{c} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{2a}{c} \quad (4.18)$$

と仮定すればよい。なぜならば、(4.18) 式の右辺はゼロではないが、絶対速度に無関係であるからである。

#### 4.4 Lorentz 変換

*Lorentz* は、*Kennedy* と *Thorndyke* の実験のずっと以前に (1904年)、移動系の中でも厳密に *Maxwell* の方程式が成立するように定式化を終えていた。彼が、当時の実験結果を説明するために、苦心に苦心を重ね、考え出した慣性系間の座標変換は今でも *Lorentz* 変換と呼ばれる。

簡単のため、相対速度を  $x$  軸方向に限る。絶対静止座標系の  $x$  の正の方向に一定の速度  $v$  で運動している系の中では、時間と空間の各座標の対応関係は

$$\left. \begin{aligned}
 t' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left( t - \frac{v}{c^2} x \right) & (a) \\
 x' &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} (x - vt) & (b) \\
 y' &= y & (c) \\
 z' &= z & (d)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

であると彼は考えた。

*Lorentz* は、当時までの多くの実験結果や他の学者の説を考慮に入れて、「*Lorentz* 変換」にたどり着いた。この変換に対して、電磁場の諸量は下記のごとくに変化する。これも、哲学的思考のみによるものではなく、「経験」(…実験結果)を数学で整理してたどり着いたものである。

$$\left. \begin{aligned}
 E'_x &= E_x & (a) \\
 E'_y &= \frac{E_y - vB_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & (b) \\
 E'_z &= \frac{E_z + vB_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & (c)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.20)$$

$$\left. \begin{aligned}
 B'_x &= B_x & (a) \\
 B'_y &= \frac{B_y + \frac{\beta}{c} E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} & (b) \\
 B'_z &= \frac{B_z - \frac{\beta}{c} E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} & (c)
 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

なお、解析を真空中に限っているので

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} & (a) \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

である。

(*L.D.Landau* は、古典電磁場の問題を解くには、「真空中に荷電粒子が存在するモデル」で充分であると考えていたようである。実のところ、物質のあるところで構成方程式を相対論的に扱うことは、非常に複雑な問題であり、今でも解決しているとは信じがたい)。

## 5. Einstein の特殊相対性理論

### 5.1 特殊相対性原理と Lorentz 変換

第4章で述べたように、*Lorentz* の当時の考えによれば、後に *Lorentz* 変換と呼ばれることになる座標変換は、あくまでも絶対静止系と移動系との間の時間や空間座標の関係式であった。そして、絶対静止系と移動系では、全く同じ形の電磁場の基本式が成立していた。すなわち、電磁場の観測によっては絶対速度は検出できない。絶対静止空間を検出するという「*Newton* の夢」は、やはり実現しなかった。しかし *Lorentz* は、なお絶対静止空間の存在を信じ、原子の構造がわかると「*Lorentz* 変換」を説明できると考えていたようである。日本の標準的な電気磁気学の教科書には、*Lorentz* は、「先入観にとらわれ、相対性理論のすぐそばまで到達しながら、それを発見できなかった」、いささか気の毒な人物として描かれている<sup>6)</sup>。

これに反して *A.Einstein* は、電磁場の基本式が絶対速度を検出できないのであれば、それまで「絶対静止系」と「移動系」に区別して解析していたことには意味がなく、「すべての慣性系（相互に等速運動する系）は、対等であって区別できない」と考えた。

この1905年に発表された理論は、相対性理論（その理論の主要部分

をなす原理は相対性原理)と呼ばれたが、後に彼が理論の対象を重力場まで拡張したとき(1915年 一般相対性理論の発表)、1905年の理論は、重力場や加速度のある場合を扱っていないことを強調するために特殊という冠が付け加えられた。

*Einstein* は、特殊相対性原理(どの慣性系も対等であるという主張)から *Lorentz* 変換を導き出した。また、時間も座標の一種であると主張した。第4章の段階では、時間と空間はあくまでも別の概念であるが、*Einstein* はそれを統合したのである。また、その結果「距離の離れた別の場所間の同時性」の概念は成り立たなくなることを示した。このように、絶対的時間が存在しなくなった点が、「*Galilei* の相対性原理」とは大きく異なる点である。

*Einstein* は、時間が座標の一種であると主張はしたが、時空(時間と空間)の4次元化は、*H.Minkowski* によってなされた。物理学に難解な数学を持ち込むことを好まなかった *Einstein* も、これに触発され *Riemann* 幾何学を大々的に採用した。それが、1915年に一般相対論として結実するのである。

したがって1905年の段階では、*Einstein* は、*Riemann* 幾何学を採用していない。特殊相対論的電気磁気学(重力場の影響を考えない電気磁気学)は、本論文で示すように *Maxwell* の方程式と密接な関係にある。極言すれば「特殊相対論は、*Maxwell* の方程式と等価である」と言える(*Maxwell* が、そうとは気がつかなかっただけの話である)。

そのような事情から、古典電気磁気学に *Riemann* 幾何学は不要であると信じられているが、それは誤解である。4次元 *Riemann* 空間を舞台にし、テンソルの反変・共変の別を区別して古典電気磁気学を論ずれば、今まで見えなかったことがよく見えるようになる。

前述のごとく、*Einstein* は特殊相対性原理を説明するにあたり、*Riemann* 幾何学を使用しなかった。特殊相対性理論を *Einstein* 的に説明する参考書は数多くあるので、以下においては、*Riemann* 幾何学を利用して特殊相対性理論を説明する。

簡単のため、3次元空間の座標系はデカルト座標系とする。新しく加わった時間座標は、0番目としよう。*Einstein* は、時刻に光速度をかけたものがデカルト座標に対等な時間座標であることを示した。

$$x^0 = ct \quad (5.1)$$

なお、今後すべて真空中を扱う。

座標系を

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \quad (5.2)$$

とする。

重力場のない空間において、我々の時空の共変基本テンソルは、

$$g_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

反変基本テンソルは

$$g^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

とする。

この4次元時空の、座標が微小値だけ異なる2点間の距離の二乗は

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (5.5)$$

以下において、テンソル式に関する *Einstein* の省略記法を採用する。すなわち、テンソル式中に、上下に同じギリシャ文字の指標があ



れば、それはその指標を 0 から 3 まで動かして和をとることを意味する。この省略記法の指標はダミーであり、それが現れる式中の項だけで閉じているから、他の部分で別の意味で使用するギリシャ文字も使用してかまわない。

よく知られているように、平坦な（重力場のない）時空の空間部分がデカルト座標系であれば、座標そのものが反変ベクトルとなる。*Minkowski* が最初に考えた 4 次元座標系は、空間または時間座標のどちらかを純虚数で表すものであった。今では、その形式はほとんど採用されないが、その後改良され座標を実数のみで表す上記の系も、*Minkowski* 座標系 (*Minkowski* 時空) と呼ばれる。

すなわち、*Minkowski* 座標系では、2 点間の 4 次元の距離の二乗は

$$s^2 = g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta \quad (5.6)$$

である。この値は、二乗値の和を拡張した概念であるにもかかわらず負にもなり得る。そのため、我々の時空は異常 *Riemann* 空間と呼ばれる（ここで、 $\beta$  は、前述のダミー指標であることに注意しなければならない）。

*Einstein* によれば、光路上では

$$s^2 = 0 \quad (5.7)$$

である。

$s^2$  は、もともと 4 次元スカラーであり一般座標変換に共変であるが、上式によって光路上ではさらに不変量（ゼロに等しい値をとる）であることがわかる。

K 系から K' 系への座標変換

$$x^\alpha \rightarrow x'^\alpha \quad (5.8)$$

によって、テンソルの成分は規則的に変化するが、反変成分の変化を示す係数テンソルは

$$M_\alpha^\beta \equiv \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\alpha} \quad (5.9)$$

共変成分の変化を示す係数テンソルは

$$\bar{M}_\alpha^\beta \equiv \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} \quad (5.10)$$

である。以下において、前章までと同様に' (prime) の有無で系を識別するが、これら (K系とK'系) は対等な座標系である。

K系とK'系の基本テンソルの関係式は

$$\left. \begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= \bar{M}_\alpha^\mu \bar{M}_\beta^\nu g_{\mu\nu} \\ g'^{\alpha\beta} &= M_\mu^\alpha M_\nu^\beta g^{\mu\nu} \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

である。

特殊相対性原理によれば、慣性系は、どれも対等であり区別できない。これを、*Riemann* 幾何学的に言えば、どの慣性系も、基本テンソルが同じであることを意味する。

座標変換しても、(5.3)、(5.4) 式の形を持つ基本テンソルが不変であり、時間座標 (第0座標) と第1座標のみが交じり合うだけである場合は、座標変換の係数テンソルの各成分を定数に限定すると、これらの係数テンソルは

$$M_{\alpha}^{\beta} = \begin{bmatrix} \cosh \eta & -\sinh \eta & 0 & 0 \\ -\sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$M_{\alpha}^{\bar{\beta}} = \begin{bmatrix} \cosh \eta & \sinh \eta & 0 & 0 \\ \sinh \eta & \cosh \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

の形を持つものに限られる。なお、 $\eta$  は定数である。

ここで

$$(\cosh \eta)^2 - (\sinh \eta)^2 = 1 \quad (5.14)$$

という恒等式が、重要な意味を持つ。

K'系の原点の第1座標は常にゼロである。

$$0 = \cosh \eta x^1 - \sinh \eta x^0 \quad (5.15)$$

K系上での、K'系の原点の軌跡は

$$\begin{aligned} x^1 = x &= vt \\ &= \frac{v}{c} ct = \beta x^0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

(5.15)、(5.16) 式を見ればただちに

$$\beta = \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta} = \tanh \eta \quad (5.17)$$

すなわち

$$\eta = \tanh^{-1} \beta \quad (5.18)$$

$$\cosh \eta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5.19)$$

$$\sinh \eta = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (5.20)$$

である。

これにより (5.12) 式が、*Lorentz* 変換であることがわかる (*Minkowski* 座標系では、座標自身が反変ベクトルである。また、*Riemann* 幾何学を採用すれば、ベクトルやテンソルの変換公式がもう一つあることは自明である。すなわち、この他に共変指標にかかわる変換法則がある。(5.12) は反変 *Lorentz* 変換と呼ぶべきであり、(5.13) 式は共変 *Lorentz* 変換である)。

なお、(5.18) 式のごとくに  $\eta$  を定義すると、同一方向の2つの速度の合成法則は、双曲線正接関数 ( $\tanh \eta$ ) の加法定理から説明できる。

以上が、*Riemann* 幾何学に基づく特殊相対論の説明の大筋である。

## 5.2 4次元時空の電磁場の方程式

4次元時空では、電磁場の反変テンソルは

$$f^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\mathbf{E}_x}{c} & \frac{\mathbf{E}_y}{c} & \frac{\mathbf{E}_z}{c} \\ -\frac{\mathbf{E}_x}{c} & 0 & \mathbf{B}_z & -\mathbf{B}_y \\ -\frac{\mathbf{E}_y}{c} & -\mathbf{B}_z & 0 & \mathbf{B}_x \\ -\frac{\mathbf{E}_z}{c} & \mathbf{B}_y & -\mathbf{B}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

と考えられる。

3次元空間部分の座標がデカルト座標以外の場合は、4次元テンソルの成分と3次元のベクトル代数の成分には測度係数が入り込むのは

当然としても、別の原因もあり簡単な関係ではなくなる。これについては、別の機会に論じる。

(5.21) 式を  $K'$  系における電磁場の反変テンソルに変換する式は

$$f'^{\alpha\beta} = M_{\mu}^{\alpha} M_{\nu}^{\beta} f^{\mu\nu} \quad (5.22)$$

であり、これが *Lorentz* 変換による電磁場成分の変換の式 (4.20)、(4.21) 式と一致することは容易に確かめられる。

3 + 1 次元の *Maxwell* の方程式のうち

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (2.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{i} \quad (2.2)$$

にあたる式は

$$D_{\beta} f^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} f^{\alpha\beta})}{\partial x^{\beta}} = \mu_0 i^{\alpha} \quad (5.23)$$

である。

ここで、 $g$  は、共変基本テンソルから得られる行列式であり、*Minkowski* 時空では、単に  $-1$  である。異常 *Riemann* 空間では、 $g$  が負になるため、かわりに、 $-g$  を使用する。また、 $D_{\beta}$  は、 $x^{\beta}$  軸に関する共変微分演算子である。

(5.23) 式の右辺の、4次元電流ベクトルの反変成分は

$$i^{\mu} = (c\rho, i_x, i_y, i_z) \quad (5.24)$$

である。

3次元の *Maxwell* 方程式のもうひとつの組

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

にあたる式は、電磁場の共変テンソルの式である。電磁場の反変テンソルから共変テンソルへの変換は

$$f_{\alpha\beta} = g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} f^{\mu\nu} \quad (5.25)$$

である。この計算を実行すると

$$f_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\mathbf{E}_x}{c} & -\frac{\mathbf{E}_y}{c} & -\frac{\mathbf{E}_z}{c} \\ \frac{\mathbf{E}_x}{c} & 0 & \mathbf{B}_z & -\mathbf{B}_y \\ \frac{\mathbf{E}_y}{c} & -\mathbf{B}_z & 0 & \mathbf{B}_x \\ \frac{\mathbf{E}_z}{c} & \mathbf{B}_y & -\mathbf{B}_x & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

となる。

このようにすると、3次元の *Maxwell* 方程式のもうひとつの組は

$$\frac{\partial f_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial f_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = 0 \quad (5.27)$$

であることがわかる。ただし  $\alpha, \beta, \gamma$  は、(0, 1, 2, 3) のうちの任意の3個である。

4次元の *Maxwell* 方程式と3次元の *Maxwell* 方程式の関係が正しいことは、単に偏微分の規則にしたがって計算すれば容易に確認できる。

なお、(5.27) 式は、

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (5.28)$$

ただし

$$A_\alpha = \left(-\frac{\phi}{c}, A_x, A_y, A_z\right) \quad (5.29)$$

とすれば、恒等式になることが知られている。

4次元の *Maxwell* の方程式にあらわれるテンソルが、片方は反変テンソルであり、片方が共変テンソルであることは、第2章で述べた *Maxwell* の方程式の「符号のねじれ」と密接な関係がある。共変成分と反変成分が、座標変換の際、異なった変換…(5.12), (5.13) 式…を受けるのにもかかわらず、3次元の電磁場成分の *Lorentz* 変換の際の変換式が一種類しかないことに注目すべきである。

これらが正しく成立するためには、異常 *Riemann* 空間でなければならない。(5.21) 式と (5.26) 式を注意深く見れば、異常 *Riemann* 空間であるため、電場に関する成分の符号が反変テンソルと共変テンソルでは逆転していることがわかる。

かようにして *Maxwell* の方程式の「符号のねじれ」は、我々の時空が異常 *Riemann* 空間であることに由来しており、また、そうでなければ特殊相対性原理は成立しない。

## 6. 終章

電気磁気学の歴史について、*Maxwell* の方程式から *Einstein* の特殊相対理論にいたるまでの歴史をかいつまんで考察した。

これらの流れを考察すると、「*Einstein* が哲学的に考察して、突如特殊相対論を提案した」という説は正しくないことがわかる。彼の学界への登場が、諸般の事情でいささか唐突であったとしても、電気磁気学から特殊相対論に至る流れは非常に泥臭い試行錯誤であった。高

名な理論家の説は、疑い深い実験家に否定され、理論家は何度も理論を書き直した。それを、さらに実験家が検討し直すという作業が営々と続けられ、20世紀のはじめに一応の完成を見たのである。

第5章においては、特殊相対論の *Riemann* 幾何学的説明を試みた。このような解釈は、私の独創とは主張しにくいだが、参考書や教科書にあまり書かれていないものである。*Maxwell* の方程式の「符号のねじれ」については、それが我々の時空が異常 *Riemann* 空間になっている原因であることを指摘した。また、*Lorentz* 変換が慣性系間の対等性から数学的に導出されるためにも、やはり我々の時空は異常 *Riemann* 空間でなければならない。

我々の時空が異常 *Riemann* 空間であることは、私は非常に「異常」だと思うが…2点間の距離の二乗和に相当する量が負になるのである…しかし、これが現代理論物理学の根本原理であることを確認した。

[完]



**参考文献**

- 1) 電気学会大学講座「電気磁気学(第2次改訂版)」オーム社 1987年
- 2) 細野敏夫著「メタ電磁気学」p16 森北出版 1999年
- 3) 砂川重信著「理論電気磁気学」第3版 p320 紀伊国屋書店 1999年
- 4) 同上 p324
- 5) 同上 p314
- 6) 同上 p345

## 付録 ポテンシャルの波動方程式

スカラポテンシャル  $\phi$  とベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  の存在を仮定し

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} & (a) \\ \mathbf{B} &= \text{rot } \mathbf{A} & (b) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.1})$$

とおいてみる。このように、電磁場のベクトル量を二つのポテンシャルで表現すると、まず (A1.1b) 式より、(2.3) 式がただちに成立することがわかる。つぎに、通常のベクトル代数の公式に従って計算を進めてゆくと、(2.4) 式も成立する。第5章で述べるように、二つのポテンシャルによって電磁場の量 ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) が表現されるのであれば、(2.3), (2.4) 式は恒等式である。残りの式を、(2.5) 式に従って、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  と  $\rho$ ,  $\mathbf{i}$  の関係式に書き直すと

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{A1.2})$$

$$\text{rot } \mathbf{B} - \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu \mathbf{i} \quad (\text{A1.3})$$

(A1.2)、(A1.3) 式において、電磁場の源は、電荷密度と電流密度ベクトルと考えられる。しかるに (通常 *Maxwell* の方程式に含めないが)、これらに関して別の基本関係式が存在する。すなわち、電荷密度・電流密度ベクトルの成分は独立ではなく、次の連続方程式を満たさねばならない。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{i} = 0 \quad (\text{A1.4})$$

そうすると、電磁場の源の  $\rho$ ,  $\mathbf{i}$  の4個の成分のうち、独立なものは3個でしかない。すなわち、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  の6個の成分のうち、独立なものは3個しかない。これを「電磁場の成分の自由度が3である」と表

現しよう。

一方、 $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  を、(A1.1) 式によって2個のポテンシャル（4個の成分）で表現するとすれば、これらのポテンシャルの4個の成分は独立ではなく、何か自由度を1個減らす式を追加すべきである。この式は、(現在の理論では) 確定せず複数の案がありうる（これは、ポテンシャル表現に任意性があることを意味する）。

電磁波工学の理論においては、この追加すべき式として、通常 *Lorentz* の条件式が採用される。

$$\mu\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \quad (\text{A1.5})$$

この *Lorentz* 条件を考慮に入れて、*Maxwell* の方程式を変形していくと、ポテンシャルに関する次の方程式が得られる。

$$\nabla^2\phi - \mu\epsilon \frac{\partial\phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (\text{A1.6})$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mu\mathbf{i} \quad (\text{A1.7})$$

上の二つの式は、真空中の場合、次の形になる。

$$\nabla^2\phi - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \quad (\text{A1.8})$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2\mathbf{A} - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.9})$$

上式は、あきらかに波動方程式の形をしており、その波動の進行速度は

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} \quad (\text{A1.10})$$

である。

現在の理論によれば

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_0 &\equiv \frac{10^7}{4\pi(c_0)^2} \\ \mu_0 &\equiv 4\pi \times 10^7 \\ c_0 &: \text{真空中の光速} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.11})$$

であり、「まさにそのとおり」である。

このように、*G. Giorgi* の提案した有理化 MKS 単位系から発展した国際単位系 (SI) で電気磁気学を習っている学生にとっては、真空中の *Maxwell* の方程式が、光の速度で伝播する波動解を持つことは、簡単な演習問題でしかない。

しかし、*Maxwell* の時代は、事態はもっと複雑であった。

電磁場の諸量に対して、各種の単位系と各人各様の定義が存在していたが、大まかに言うと二つの流れがあった。なお、以下においては議論を真空中に限る。

#### (1) 静電単位系 (esu) の場合

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0 = 1 \\ \mu &= \mu_0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A1.12})$$

ここで  $\mu_0$  は、実験によって定められる定数である。このとき、静電気学や電気分極の式の記述に適した静電単位系で、無理やり磁気関係の式を作り、この定数を定める必要がある。なおこの際、各種の関係式の中に10のべき乗や  $\pi$  が、ほとんど無原則の形であらわれる。

#### (2) 電磁単位系 (emu) の場合

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon_0 \\ \mu = \mu_0 = 1 \end{array} \right\} \quad (\text{A1.13})$$

ここで  $\epsilon_0$  は、実験によって定められる定数である。このとき、静磁気学や磁気分極、磁気誘導の式の記述に適した電磁単位系で、無理やり電気関係の式を作り、この定数を定める必要がある。なおこの際、各種の関係式の中に10のべき乗や  $\pi$  が、ほとんど無原則の形であらわれる。

さらに、電気の関係式では esu にあわせ、磁気の関係式では emu にあわせるガウス単位系があり、こちらは今でもファンが多いが、議論の本筋とは関係ないので省略する。

上記の静電単位系の記述の中に電気誘導という単語を省いたが、これは、*Maxwell* によって存在が追加仮定された概念であるからである。つまり *Maxwell* が、電磁場の基本式の構築作業に取り掛かったときは、この概念は存在しなかった。

*Maxwell* は、他の研究者の論文がどの単位系で書かれているかを注意しながら、報告された実験データを含む理論式を整理し、(A1.10) 式に相当する式を数値計算した結果、すでに測定されている光速度に極めて近いことに気づき、 $c_0$  を光速度と考えたのである。

なお (A1.1) 式は、第5章の末尾で4次元 *Riemann* 空間において、4次元ベクトルポテンシャル

$$A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3) \quad (5.29)$$

より、4次元電磁場テンソルを

$$f_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (5.28)$$

とおいているのと等価である。

[付録 終]