# 応用数学としての *Riemann* 幾何学に関する一考察

(A Study on *Riemannian* Geometry from the Viewpoint of Applied Mathematics)

村　田　茂　昭

## 1. は　じ　め　に

*E. T. Bell* によれば[1]、*Newton, Gauss, Riemann, Einstein* は、応用数学にたんのうであった数学者として、同系列に分類されている。*Riemann* が創始し、*Einstein* とその後継者が極め尽くしたと考えられている、「*Riemann* 幾何学の物理学への応用」について論じることは無謀に見えるかも知れない。ことに、本論文の主題ではないけれども、「統一場の理論」に関係のある話に言及することになるが、この「*Einstein* 風のアプローチ」…電磁場を *Riemann* 空間の構造に結びつけようとする試み…は、現在では正しくないとされているのである。

しかし、今までの研究者たちが完璧に仕事を仕上げてしまったとはだれも断言できないであろう。

## 2. *Riemann* 幾何学

*Riemann* 幾何学は、ユークリッド幾何学を一般化した幾何学の一つである。応用物理学者のためには、次のような幾何学であると説明するのが有効であろう。

◇*Riemann* 幾何学の応用数学的説明
n 次元空間において、座標 $x^\mu$ が微小に異なる 2 点間の微小距離 $ds$ の二乗が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \qquad (2.1)$$

であるような幾何学である。ここで、$g_{\mu\nu}$ は n 次元空間の基本テンソルである。ただし、ここで、テンソルの成分の和に関する「*Einstein* の省略記法…式中の上下に同じギリシャ文字の指標があるときは両方の指標を座標軸の数だけ同時に動かして和をとる…」を採用した。

この説明は、おそらく、*Riemann* 幾何学を完璧に説明していないかも知れないが、かなり的を射ているであろう。

さて、純粋数学においては、少なくとも、当初は $g_{\mu\nu}$ は行列と見做した場合、対称であり正定値（positive definite）であった。

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \qquad (2.2)$$

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu > 0 \qquad (2.3)$$

しかし、*Einstein* の一般相対論において、正定値の条件は、放棄された。(これをもとに戻そうとする私の企み(2)は、失敗に終わった。)
この第2点における、純粋数学の側からの大幅な譲歩に反して、第1点（対称性）は、今日でも守られている。(だれも、この条件を取り外して、実りのある結果を得られなかった…ことによると *Einstein* を含めて)

それは、明らかに次のような事情である。

ユークリッド幾何学の直線の定義を *Riemann* 幾何学風に近代化すると測地線となる。この測地線の方程式は、次の作用積分

$$I = \int \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda \tag{2.4}$$

の変分 $\delta I$ をゼロとする *Euler* の式より得られる。(この場合汎関数は、座標である。)

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{dx^\mu}{d\lambda}\right)}\right\} - \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = 0 \tag{2.5}$$

ただし、

$$F = \sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} \tag{2.6}$$

であり、$\lambda$ は測地線上のパラメータである。
また、一般の場合、根号の内部に絶対値の記号が必要であるが、その点については、もし必要があれば、そのつど論ずる。

もしも、(2. 2) 式が成り立たないとしたら基本テンソルは、下記の形にかける。

$$g_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

ただし、$S_{\mu\nu}$ は、基本テンソルの対称成分、$A_{\mu\nu}$ は反対称成分である。

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu} \tag{2.8}$$

$$A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu} \tag{2.9}$$

ところで、(2. 4) 式で、積分すべき微小量を書き直すと

$$\sqrt{g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} \tag{2.10}$$

である。(だから、$I$ は、測地線上の距離を表す。) 反対称テンソルの性質 (2. 9) 式より、恒等的に次の式が成り立つ。

$$A_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{2.11}$$

ゆえに、基本テンソルの反対称成分は測地線の方程式に影響は与えないと言える。「基本式に影響を与えない物理量を、実在すると仮定することには、無理がある。」これが、基本テンソルを対称と断定する論者の物理哲学的根拠であろう。

しかし、*Riemann* 幾何学を物理学に応用する際、測地線の方程式さえ計算できればよいわけではない。
純粋数学的に必然性は薄いかもしれないが、物理学としては、一般の場合（基本テンソルが、非対称成分を含む場合）が意味を持つ場合がありうるのではないか？

## 3．自然律の *Riemann* 幾何学と平均律の *Riemann* 幾何学

もし仮に、基本テンソルが対称でなかったとしたらどう言うことになるであろうか？

$$g_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

反変基本テンソル $g^{\mu\nu}$ と共変基本テンソル $g_{\mu\nu}$ の関係自体が、どうなるか問題であるが、ともかく、反変基本テンソルが存在するとしよう。
典型的共変ベクトルとして、スカラの偏微分係数を例にとる。

$$P_\mu = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{3.2}$$

このベクトルの反変成分はどうなるであろうか？
反変指標として、基本テンソルの第1指標が残るか、第2指標が残るかによって、次の二つの成分が得られる。

$$P'^\mu = g^{\mu\nu} P_\nu \tag{3.3}$$

$$P''^\mu = g^{\nu\mu} P_\nu \tag{3.4}$$

この場合、一般には、

$$g^{\mu\nu} \neq g^{\nu\mu} \tag{3.5}$$

であるから

$$P'^\mu \neq P''^\mu \tag{3.6}$$

である。
同様なことは、反変成分を共変成分に変換するときにもおこる。一回の指標の上げ下げで、2とおりの結果が得られるから、n 回の指標の上げ下げの結果 $2^n$ とおりの異なった結果が得られる。
上記では、ベクトルについて論じたが、一般のテンソルの指標の各々についても同様なことがおこる。全部が、独立の値ではないであろうが、これは大変面倒なことである。

このような、複雑なシステムは、できれば避けたいのは当然である。ここで、同一の共変成分 $P_\mu$ から得られる二つの反変成分 $P'^\mu$、$P''^\mu$ の平均をとってみよう。

$$\begin{aligned}\bar{P}^\mu &= \frac{P'^\mu + P''^\mu}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(g^{\mu\nu} + g^{\nu\mu}\right)P_\nu \\ &= \bar{g}^{\mu\nu}P_\nu \end{aligned} \tag{3.7}$$

ただし

$$\bar{g}^{\mu\nu} \equiv \frac{g^{\mu\nu} + g^{\nu\mu}}{2} \tag{3.8}$$

である。

つまり、ある共変ベクトルの指標を上げる際、反変基本テンソルの対称成分 $\bar{g}^{\mu\nu}$ を使用すると、二つの反変成分の平均が得られる。

同様にして、本来的反変ベクトル（座標の微分等）$Q^\mu$ に関しては、

$$Q'_\mu = g_{\mu\nu}Q^\nu \tag{3.9}$$
$$Q''_\mu = g_{\nu\mu}Q^\nu \tag{3.10}$$

のごとくに、二つの共変成分を考えることができ、その平均を取ると

$$\begin{aligned}\bar{Q}_\mu &= \frac{Q'_\mu + Q''_\mu}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}\right)Q^\nu \\ &= \bar{g}_{\mu\nu}Q^\nu \end{aligned} \tag{3.11}$$

ここで

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\mu\nu} &\equiv \frac{g_{\mu\nu} + g_{\nu\mu}}{2} = S_{\mu\nu} \\ &= \bar{g}_{\nu\mu} \end{aligned} \tag{3.12}$$

である。

つまり、基本テンソルが対称テンソルではない一般の場合、本当の成分は指標の上げ下げで、二とおりできるのであるが、我々は、その平均値のみに注目することにしよう。その場合、指標の上げ下げには、基本テンソルの対称成分を使用すればよい。

そうであるとすれば、現在の、基本テンソルが対称であるとしている *Riemann* 幾何学は、これら平均の成分のみを扱っている幾何学ではないかという仮説に到達する。本論文は、*Riemann* 幾何学に2種類あると主張しているのではない。本来の *Riemann* 幾何学は一種類であり、基本テンソルは、一般には対称テンソルではない。指標の上げ下げの演算法に基本テンソルの対称成分を使う規則（平均律）と、本来の基本テンソルを使う規則（自然律と呼ぼう）があり、それを場合によって使い分けしなければならないと主張しているのである。つまり、われわれが、今まで、 *Riemann* 幾何学であると思っていたものは、真の *Riemann* 幾何学の部分集合

なのではないか？。そして、たぶん、多くの場合は、平均律で充分である事が予想されるが、それは、純粋数学的に自然律はありえないことを意味しない。また、平均律とは指標の上げ下げに関する規則であるから、平均律の *Riemann* 幾何学と言えども、基本テンソルの対称性を必要とはしない。

ここで、平均律の *Riemann* 幾何学（前述のように、これは真の *Riemann* 幾何学の部分集合である）において、指標の上げ下げに使用する基本テンソルを、平均律基本テンソルと名づける。

ある共変テンソルの指標をいったん上げてから元に戻した場合、同じテンソルに戻らないと都合が悪い。

$$P_k = \bar{g}_{k\mu}\bar{g}^{\mu\nu}P_\nu \tag{3.13}$$

$$\therefore\ \bar{g}_{k\mu}\bar{g}^{\mu\nu} = \delta_k^\nu \qquad (\textit{Kronecker}\ \text{の}\ \textit{delta}) \tag{3.14}$$

したがって、従来の *Riemann* 幾何学でよく知られているとおり、平均率基本テンソル（基本テンソルの対称成分）の共変成分と反変成分は、行列とみなした場合、逆行列の関係になければならない。

$$\mathrm{mat}\left(\bar{g}^{\mu\nu}\right) = \mathrm{mat}^{-1}\left(\bar{g}_{\mu\nu}\right) \tag{3.15}$$

ここで、mat( ) は、括弧内のテンソルの作る行列、$\mathrm{mat}^{-1}$( ) は、括弧内のテンソルの作る行列の逆行列である。

これで、一般の基本テンソルの共変成分が与えられた場合、その対称成分（平均率基本テンソルの共変成分）を求め、行列式を作り逆行列（平均率基本テンソルの反変成分）を求めると、指標の上げ下げに使用する平均率基本テンソルの二つの成分が定まる。

（ *Riemann* 幾何学の成り立ちからいって…座標が､微小に違う 2 点間の距離の定義が基本であるから…基本テンソルの共変成分が基本である。はじめに、基本テンソルの反変成分については、その存在のみを仮定してきた。この段階で、基本テンソルの共変成分が与えられると反変基本テンソルの対称成分の計算が可能であるから、その点については一段落ついたと言うことである。）

一般の基本テンソルもテンソルであるから、平均律の *Riemann* 幾何学においては、基本テンソルの指標の上げ下げも、平均率基本テンソルによる。

$$\bar{g}^{\mu\nu} = \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\beta}\bar{g}_{\alpha\beta} \tag{3.16}$$

一方

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\beta}g_{\alpha\beta} \\ &= \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\beta}\left(S_{\alpha\beta}+A_{\alpha\beta}\right) \qquad (3.17) \\ \therefore\ \bar{g}^{\mu\alpha} &= \frac{g^{\mu\nu}+g^{\nu\mu}}{2} \\ &= \bar{g}^{\mu\alpha}\bar{g}^{\nu\beta}S_{\alpha\beta} \\ &= S^{\mu\nu} \qquad (3.18) \end{aligned}$$

さきほどは、平均率基本テンソルの反変成分を、共変成分の逆行列から計算できることを示したが、(3.17)、(3.18) 式によって、一般の場合を含め、さらに明確になった。(なお、これらは、数学的証明ではなく数学的説明であることに注意せよ。)
一方

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$
$$= \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{3.19}$$

であるから、測地線の方程式に関する理論の根幹部分は訂正する必要はない。
ただし、この理論に現れる、従来基本テンソルと呼ばれていた量は、平均律基本テンソル (基本テンソルの対称成分) であることに注意しなければならない。測地線の方程式は、下記のように書くことが出来る。[3]

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2} + \Gamma^k_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{3.20}$$

この測地線の方程式に現れる量

$$\Gamma^i_{jk} \equiv \frac{1}{2} \bar{g}^{i\alpha} \left( \frac{\partial \bar{g}_{j\alpha}}{\partial x^k} + \frac{\partial \bar{g}_{k\alpha}}{\partial x^j} - \frac{\partial \bar{g}_{jk}}{\partial x^\alpha} \right) \tag{3.21}$$

が共変微分演算に現れる affine 接続係数かどうか？　もっと端的には、affine 接続係数の、下付きの添え字 (指標) は交換可能か否か？…つまり、曲がった空間において、偏微係数を補正して共変微分を作る際の補正項における、座標の微分に関する補正と、ベクトルの成分の変化に関する補正の作業順序が変換可能か？[4]…については、なお議論の余地があるが、ここでは通常の理論にしたがって、変換可能と言うことにしよう。つまり (3.21) 式が affine 接続係数の定義式であると言う通常の理論を採用する。(ただし、式中に現れる基本テンソルは、真の (一般の) 基本テンソルではなくて、平均率基本テンソルであることに注意せよ！)

すなわち affine 接続係数 $\Gamma^i_{jk}$ に関して

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \tag{3.22}$$

そうであれば、たとえば、反変ベクトルの共変微分は

$$D_\mu A^k = \frac{\partial A^k}{\partial x^\mu} + \Gamma^k_{\mu\nu} A^\nu \tag{3.23}$$

このような、*Riemann* 空間であれば、(3.21) 式は、次の式と等価である。

$$D_k \bar{g}_{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}}{\partial x^k} + \Gamma^\alpha_{k\mu} \bar{g}_{\alpha\nu}$$
$$= 0 \tag{3.24}$$

一方反変ベクトルの 4 次元ダイバージェンスの式は

$$D_\mu A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} A^\nu$$
$$= \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} + \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\alpha}\frac{\partial \bar{g}_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} A^\nu \tag{3.25}$$

この式の計算は、平均率基本テンソルの二つの指標に関する対称性（(3.12) 式）と、affine 接続係数の下付きの指標に関する対称性（(3.22) 式）に基づき、通常の計算[5]によって導出できる。

かくして、4 次元異常 *Riemann* 空間では、通常の教科書にあるごとく

$$D_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-\bar{g}}\, A^\mu\right) \tag{3.26}$$

となる。

なお、

$$g \equiv \det\left[\mathrm{mat}\left(g_{\mu\nu}\right)\right] \tag{3.27}$$

ここで det[ ] は、カギ括弧内の行列の行列式を計算する関数である。

読者諸君は、私が、新しい数学を提案しているに関わらず、重要な分岐点で、常に従来の路を選んだことに奇異の念を抱くであろう。しかし、基本テンソルの部分が、平均律基本テンソルになっていることに留意してほしい。わざわざ分岐点で立ち止まって考えたのは、他の路もあることを、別な提案を考えるかも知れない読者に指摘するためである。

これまでの議論を総括すると、基本テンソルは、一般には、対称テンソルではない場合でも、物理学上重要な式には、常にその対称成分のみが現れることになる。そうすると、非対称成分は、そもそも考える必要はなく、現在の *Riemann* 幾何学のままで必要充分であることになりはしないか？

その点については、次の章で論ずる。

## 4．基本テンソルの反対称成分

前章の理論より、指標の上げ下げは平均律を使用すべきであるとの結論になった。そこで、いままで触れていなかった、一般の場合の基本テンソルが意味を持つ場合について論じよう。

物理学の重要な式は、しばしば Lagrangean 解析によって導かれる。Lagrangean を $L$ とした場合、作用積分を下式のように書く。

$$I = \int L d\Omega \tag{4. 1}$$

ここで $d\Omega$ は、4 次元空間の微小 4 次元体積要素である。

$$d\Omega = -\sqrt{-g}\ e_{\mu\nu\rho\lambda}dx^{\mu}dx^{\nu}dx^{\rho}dx^{\lambda} \tag{4.2}$$

（ただし $e_{\mu\nu\rho\lambda}$ は、共変的 *Levi－Civita* の記号）

(4.2) 式にある二つの負号は、われわれの時空を異常 *Riemann* 空間とした場合、必要なものである。[6]

汎関数 F を適切に選び、作用積分の変分 $\delta I$ を最小にする *Euler* の式

$$\frac{d}{dx^{\mu}}\left\{\frac{\partial L\sqrt{-g}}{\partial\left(\dfrac{dF}{dx^{\mu}}\right)}\right\}-\frac{\partial L\sqrt{-g}}{\partial F}=0 \tag{4.3}$$

が、物理法則をあらわす重要な方程式と一致すると大変格好のよい理論と言える。(現実には、Lagrangean をどのように選べば良いか、確立した理論はなく、もっぱら試行錯誤に頼ることになるが)

ここで、

$$L = g^{\mu\nu} f_{\mu} f_{\nu} \tag{4.4}$$

ただし

$$f_{\mu} \equiv \frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \tag{4.5}$$

とすると

$$L = \bar{g}^{\mu\nu} f_{\mu} f_{\nu} \tag{4.6}$$

と書き直すことができるので、*Euler* の式は、$f$ を汎関数にして、

$$\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{g}^{\mu\nu} f_{\nu}\right)=0 \tag{4.7}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-\bar{g}}\,\bar{g}^{\mu\nu} f_{\nu}\right)=0 \tag{4.8}$$

つまり

$$\bar{g}^{\mu\nu} D_{\mu} D_{\nu} f = 0 \tag{4.9}$$

かくして、またもや、基本テンソルの反対称分は無効である。

しかし、$f$ とは異なるスカラ $h$ について

$$h_{\mu} \equiv \frac{\partial h}{\partial x^{\mu}} \tag{4.10}$$

として、Lagrangean を

$$L = g^{\mu\nu} f_{\mu} h_{\nu} \tag{4.11}$$

に選ぶと、異なった結果を得る。すなわち、*Euler* の式は

$f$ を汎関数に選んだ場合

$$\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-\bar{g}}\,g^{\mu\nu}h_{\nu}\right)=0 \tag{4.12}$$

$h$ を汎関数に選んだ場合

$$\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\sqrt{-\bar{g}}\,g^{\mu\nu}f_{\mu}\right)=0 \tag{4.13}$$

すなわち、基本テンソルが対称でない場合、$f$ と $h$ は非常に似てはいるが、反対称成分の影響が、逆になるような、二つのスカラ方程式の各々の解である。

なお、これらの式を導出するとき

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L\sqrt{-g}}{\partial f}=0 &&\text{(a)}\\ &\frac{\partial L\sqrt{-g}}{\partial h}=0 &&\text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

として計算しているが、上式は重力場のある場合は成立しないかもしれない。(重力場の話は、まったく触れていないのであるが、後述のように、$h$ を電磁場のスカラとすれば、$f$ は、重力場のスカラかもしれない。)

平坦な時空に限ると、以上の話は、創成テンソルによる電磁場のベクトルポテンシャルの組織的創造の理論[7]にはなはだ似ている。

ここで

$$\begin{aligned}A^{k}&\equiv g^{k\mu}\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}\\&=\bar{g}^{k\mu}\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}+a^{k\mu}\frac{\partial h}{\partial x^{\mu}}\end{aligned} \tag{4.15}$$

と書いてみると、第1項はベクトルポテンシャルのうち電磁場を作らない部分、第2項は電磁場を作る部分の形をしている。なお、基本テンソルの反対称分は、創成テンソル理論[7]にあわせて文字を書き換えた。

また、(4.12) 式は *Lorentz* 条件の式と同形である。

$$D_{\mu}A^{\mu}=0 \tag{4.16}$$

既に発表した、電磁ベクトルポテンシャルの創成法[7]と異なる点は、

(1)スカラ $h$ の満たすべき方程式 (4.12) が、形は同じでも基本テンソルの反対称分の存在により、既発表の論文とは異なる。

(2)既発表の論文では、$a^{\mu\nu}$ は定数テンソル (*Minkowski* 時空で、各成分が定数) であったが、(4.15) 式ではそういう制限はない。(もちろん、基本テンソルの反対称分でなければならない。)

である。

以上の理論が、電磁場をあらわす有効なベクトルポテンシャルの創造につながるかどうか、未

知数である。ここでは、基本テンソルの反対称成分が意義を持ちそうな例として記すのみとする。

## 5. 結　　言

従来の常識に反して、*Riemann* 空間の基本テンソルの対称性の仮定を取り払ったらどのようなことになるか、検討してみた。基本テンソルに反対称成分があっても、指標の上げ下げに基本テンソルの対称成分を使用すれば、平均の成分のみを注目していることに当たる。また、従来得られている成果をほぼそのまま利用できることがわかり、この基本テンソルの対称成分を平均律基本テンソルと命名した。

基本テンソルに反対称成分を仮定し、それを電磁場のベクトルポテンシャルに関連付けることはよく試みられることであるが、本論分においても、もうひとつのもっともらしい試案が得られた。

［完］

## ［参 考 文 献］

(1) E. T. Bell「数学をつくった人びと」上、下　東京図書　1976

(2) 村田茂昭「H. Yilmaz の1958年理論の正常リーマン空間への書き直し(Ⅰ)」
札幌大学女子短期大学部紀要　第25号　1995年3月
村田茂昭「H. Yilmaz の1958年理論の正常リーマン空間への書き直し(Ⅱ)」
札幌大学女子短期大学部紀要　第26号　1995年9月
村田茂昭「H. Yilmaz の1958年理論の再検討(Ⅱ)」
札幌大学女子短期大学部紀要　第31号　1998年3月

(3) 矢野健太郎「リーマン幾何学入門」§2.6　森北出版

(4) たとえば、平川浩正「相対論」第Ⅱ版　§4.5参照

(5) たとえば、同上§4.8参照

(6) 村田茂昭「相対論的電磁界方程式の対称化について」
札幌大学女子短期大学部紀要　第22号　p16　1993年9月
村田茂昭「Levi-Civita の記号と擬テンソルについて」
札幌大学女子短期大学部紀要　第24号　1994年9月

(7) 村田茂昭「波動方程式を満たす電磁ポテンシャルの創成法」
札幌大学女子短期大学部紀要　第28号　1998年9月
(ただし、この論文では、空間は正常 *Riemann* 空間であるとしている。)