Lorentz 変換の新解釈

(A New Interpretation of Lorentz Transformation)

村　田　茂　昭

1. は じ め に

H. Yilmaz の重力スカラに関する考察から、我々の時空は、4 次元正常Riemann ではないかという考えにとりつかれ、今まで、各種の検討を行ってきた。[(1),(2),(3)] 正常Riemann 空間でありながら、かつ、3 次元の Maxwll の方程式が正しいという理論を作ることは、難しいが不可能ではない。

しかし、最近になって、かねてより懸案であった、相対的に等速度で運動する座標系間の座標変換が Lorentz変換であることと、宇宙が一様に膨張しているように見えることを、我々の時空の基本的な構造から導きだそうとして、この正常空間論は破綻してしまった。

理論的見地からは、今までの私の論文との連続性を保つためには、正常Riemann 空間論と異常Riemann 空間論を並列に扱い、前者が不適切で、後者が正しそうであることを論述すべきである。しかし、我々の時空が、4 次元異常Riemann 空間であることは、今までの私以外の論者にとっては常識であるので、以下においては、我々の時空は異常Riemann 空間であることを想定し、議論を進める。なぜ、正常Riemann 空間であると都合が悪いかは、議論のなかで、補足的に解説する。本論文は、以前に、「Lorentz変換の非Einstein 的解釈」[(4)] として発表されたものと内容が重複する。この論文は、口頭発表の講演の前刷りとして準備されたものであり、すでに忘れ去られたものに等しいので、重複部分については、とくに指摘はしない。その後、測地線の方程式に関して格段の進歩があったことを付け加えておこう。

2. 時 空 の 構 造

時空の構造はどうあるべきか？　私は、現在の宇宙論に批判的である。現在の、理論家のほぼ全員が、E. Mach の哲学を深く信じているために、宇宙を覆い尽くすような、「慣性系のようなもの」の存在を考えることは、禁じられている。確かに、物質の全くない空虚な宇宙は無意味であろう。しかし、宇宙を、物質を取り去った座標系と物質とに分解できたらそのほうが扱いやすいことは明白である。すなわち、まず、宇宙全体を覆い尽くすような座標系を考え、その各所に物質を配置する。物質のイメージは重力場に関するかぎり、H. Yilmaz の考えが正しいのではないか？　これが私の持っている考えである。Yilmaz の理論までは、本論文では言及できない。しかし、多くの理論家の間での定説、「宇宙の物質の存在密度が、宇宙が膨張するか否かに関係する」という説はとらない。私の考えによると、宇宙の膨張とは、時間の経過そのものである。

我々の宇宙は、4 次元異常Riemann 空間と考えられるが、特定の座標系をとりだすと時間座標部分と Newton が考えたような 3 次元空間座標部分に分けることができると考える。通常の表現にしたがって、以下においては、3 次元空間の部分を、空間部分と呼ぶ。我々の宇宙は、観測結果や、理論の整合性から行って、次の条件を満たさなければならない。

(1) 物質のない空間部分に特別な点はない。

我々は、大宇宙の中心に住んでいるわけではなく、かと言って、端にすんでいるとも考えられない。ある条件を満たせば、任意の点をとっても、そこが宇宙の中心であると言えるはずである。(この条件とは、正常Riemann 空間論で述べたごとくに静止系の原点の条件であることと考えるが、異常Riemann 空間論ではまだ細部は未検討であり、本論文では論じない。)

(2) 時間的には特別の点がある。

ある種の時間座標を採用すれば、我々の宇宙は、過去の有限時刻に始まったと考えられる。

(3) 我々の宇宙の空間部分は、ある点を中心にして一様に膨脹しているように見える。

この点を、いつも原点だと考えるの軽率である。この件に関して、正常 Riemann 空間論で述べたことは、定性的には、変更はない。[2]

(4) 物質のない宇宙に追加された粒子の測地線上の平行移動は、等速度である。

(なんらかの事情で、光速度以下に制限されているべきであるが、それは、測地線の理論だけでは出てこないかも知れない。)

Newton 力学的に言うと、力を受けていない質点は等速度運動をする。

単純な、4次元の Minkowski時空は、上記の要請の(2)と(3)を満たさない。しかし、非常によい近似で、我々の時空は、Minkowski時空にそっくりであろう。少なくとも、電磁波の伝搬時の位相変化に関しては、Michelson-Morley型の実験を説明できる程度に空間は等方でなければならない。

なお、条件(4)は、実験事実からの要請である。しかし、特に注を加えると、すべての座標系で等速度である必要はない。Riemann幾何学の座標変換の自由度を考慮すれば、等速度であるのは、Minkowski時空的な座標系に限られるであろう。ある特定の宇宙モデルに関して、座標変換の結果、ある座標系で側地線上の平行移動が等速度運動になればよい。

3. 二次元時空論

本章では、公理論的に2次元時空論を展開する。もちろん、物理学は数学ではないので、公理論的展開に抵抗を感ずるむきもあるかも知れない。私の目的は、我々の経験を整理し、できるだけ少数の仮定(公理)から自然の法則を説明しようとするところにある。そうすることによって今まで何の関係もないと考えられていた事柄が関連づけられ、未知であったことが発見されるかも知れない。

ここで、2次元時空とは、時間軸と空間1軸からなる時空である。これは、宇宙のある特定の方向とその正反対の方向を注視した場合に相当する。

3.1 二次元源時空

[仮定1] スカラ宇宙時刻 τ がある。τ は、単調に増大する。

{解説} 私は、宇宙時刻の原点を宇宙誕生の時刻にとる。現在の宇宙時刻は、

$$
\begin{aligned}
\tau &= \tau_0 \\
&= \frac{1}{H_0} \quad (H_0 : \text{Hubble の定数}) \\
&\fallingdotseq 6.17\times10^{17}\,\text{sec} \\
&\fallingdotseq 196\text{億年}
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

ただし、Hubble の定数を、

$$H_0 \fallingdotseq 50\text{km}/\text{Mpc} \tag{3.2}$$

とする。なお、pc(parsec) は、年周視差（角度）に由来する距離の単位で

$$1\text{pc} \fallingdotseq 3.26\text{光年} \tag{3.3}$$

である。

［仮定 2］宇宙虚角 ξ がある。実数であり、数直線を構成する。

{解説}

$$
\begin{aligned}
\cos(j\xi) &= \cosh(\xi) \\
\sin(j\xi) &= j\sinh(\xi)
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

より、実数 ξ を虚角と呼ぶ。(ここでは j は、単位虚数である) ξ の単位は、(双曲線関数の定義には、指数関数が現れるから) neper を用いるのが適切である。

［仮定 3］光速度を c とするとき

$$
\begin{aligned}
\hat{x}^0 &= c\tau \qquad (\text{時間座標}) \\
\hat{x}^1 &= \xi \qquad (\text{空間座標})
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

とおいて得られる Riemann空間が、物理的に実在する。

{定義 1} $(\hat{x}^0, \hat{x}^1)$ 時空を、二次元源時空と呼ぶ。

［仮定 4］二次元源時空の基本テンソルは、

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (c\tau)^2 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

である。

{解説} (3. 6) 式によって、同宇宙時刻でかつ微小な宇宙虚角 $d\xi$ だけ離れた 2 点間の距離は、

$$d\hat{R} = c\tau\, d\xi \tag{3.7}$$

である。同宇宙時刻面上で積分すれば

$$
\begin{aligned}
\hat{R} &= \int_0^{\xi} d\hat{R} \\
&= c\tau\xi \quad (\because \tau = \text{const.})
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

◎定理 1　二次元源時空における、2 点間の距離は、τ に比例して増大する。

以上の理論は、Einstein の特殊相対論に全く似ていない。私は、特殊相対論は少し違うのではないかと考えているが、新理論は、少なくとも特殊相対論に非常に似ていなければならない。そうなっていないのは、源時空は我々が現実に時空として認識するものではないからであると考

えられる。Einstein は、認識論を軽視したように見受けられる。彼が、物理学に Riemann幾何学を導入し、座標変換の自由度を無限大に近くしたとき、どの座標系（複数）が、我々が時空と認識するものに相当するか深刻に考えなかったようである。いわゆる、black hole（私は、この存在に否定的であるが）そのときの都合で、いろいろな座標系で記述されるのはそのせいと思われる。我々は、たとえば、距離として、一般座標変換に不変な Riemann幾何学的スカラを認識しているのではないことは明白である。(光路上を考えてみよ。) では、我々が認識する距離とはなにか？

これについては、あとでふれる。

3．2　二次元実時空

{定義 2} 我々が、時空として認識するものを実時空と呼ぶ。

[仮定 5] 二次現実時空の座標 (x^0, x^1) と、源時空の座標 $(\hat{x}^0, \hat{x}^1)$ との関係は、ξ 軸上の任意の一点を ξ 座標の原点としたときに

$$\begin{aligned} x^0 &= ct = \hat{x}^0 \cosh(\xi) \\ &= c\tau \ \cosh(\xi) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} x^1 &= z = \hat{x}^0 \sinh(\xi) \\ &= c\tau \ \sinh(\xi) \end{aligned} \tag{3.10}$$

である。

◎定理 2．座標変換 (3.9)、(3.10) 式によって、二次元実時空の基本テンソルは、Minkowski 的となる。

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

ここで、下記の関係を使用した。

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \hat{x}^\nu} = \begin{bmatrix} \cosh(\xi) & \hat{x}^0 \sinh(\xi) \\ \sinh(\xi) & \hat{x}^0 \cosh(\xi) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

（μ 行 ν 列表示）

$$(\cosh(\xi))^2 - (\sinh(\xi))^2 = 1 \tag{3.13}$$

◎定理 3．等宇宙時刻線は、(x^0, x^1) 平面において、双曲線となる。

$$\because \ (x^0)^2 - (x^1)^2 = (c\tau)^2 \tag{3.14}$$

系 1．これらの二次元時空では、座標がそのまま、反変ベクトルとなる。これは、Riemann 幾何学としては例外的な場合である。

$$\begin{aligned} \hat{g}_{\mu\nu} \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ &= -(c\tau)^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

{定義 3} $R = c\tau$ を、宇宙の擬半径と呼ぶ。

◎定理4．τ の値には無関係に、ξ 座標の原点近傍においては、源時空と実時空は一致する。
［証明］ $|\xi|^2 \ll 1$ のとき

$$x^0 = c\tau\cosh(\xi) \fallingdotseq c\tau \tag{3.16}$$
$$x^1 = c\tau\sinh(\xi) \fallingdotseq c\tau\xi \tag{3.17}$$

｛定義4｝ $\xi = \xi_n(n = 0,1,2,3\cdots) = \mathrm{const.}$ の位置にある点を、宇宙の定点と呼ぶ。

◎定理5．実時空の原点から観測すると、宇宙の定点は、下記の速度 v_n で後退しているように見える。

$$v_n = c\ \tanh(\xi_n) \tag{3.18}$$

［証明］

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\xi=\xi_n} = \frac{\partial z}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}$$
$$= c\ \tanh(\xi) \tag{3.19}$$

｛解説｝ これが、私の理論体形内の Hubble の法則の真相である。次に述べる定理6から見て、これは理論としては、決定的であると信ずる。なお、「(3.11) 式から見て、(特殊相対性原理が成立するから) ξ 空間（空間一次元の場合は ξ 軸）は便宜的なもので、実体はないのではないか？」という主張に対しては、あとで答える。

なお、天文学的検証に関しては、距離の推定が難しく、信頼できるデータは少ないであろう。

$\tau = \tau_0$ のとき、遠方の銀河までの距離は次の三つが考えられる。

◇等宇宙時刻距離

$$R = c\tau_0\ \sinh(\xi) \tag{3.20}$$

◇等座標時刻距離

$$R' = c\tau_0\ \tanh(\xi) \tag{3.21}$$

◇光路の空間部分

$$R'' = c\tau_0\exp(-\xi)\sinh(\xi) \tag{3.22}$$

実際は、少なくともこのうちの二つが、混ざっていることが考えられる。球面波の性質から言うと、R' がもっともらしいように思うが。ξ の絶対値が小さいとき、すなわち、宇宙論的に原点の近傍においては、これら三つの距離は、近似的に等しい。いずれにしても、われわれが、マクロな距離と認識する量は、実時空の量であろう。

◎定理6．二次元源時空における ξ 軸上の平行移動は、二次元実時空の Lorentz 変換に対応する。

あらためて、ある座標系を A 座標系とし、そのの二つの座標を

$$x_A^0 = c\tau\ \cosh(\xi)$$
$$x_A^1 = c\tau\ \sinh(\xi) = z_A \tag{3.23}$$

とおく。一方、ξ 軸上の、$\xi = \xi_0$ を、新しい原点とする B 座標系を考える。

$$x_B^0 = c\tau\ \cosh(\xi-\xi_0)$$
$$x_B^1 = c\tau\ \sinh(\xi-\xi_0) \qquad (3.24)$$
$$\therefore x_B^0 = c\tau\ \cosh(\xi)\cosh(\xi_0) - c\tau\ \sinh(\xi)\sinh(\xi_0)$$
$$= x_A^0 \cosh(\xi_0) - z_A \sinh(\xi_0) \qquad (3.25)$$
$$\therefore x_B^1 = c\tau\ \sinh(\xi)\cosh(\xi_0) - c\tau\ \cosh(\xi)\sinh(\xi_0)$$
$$= -x_A^0 \sinh(\xi_0) + z_A \cosh(\xi_0) \qquad (3.26)$$

この二つの座標系は、$\tau=0$ のとき原点が一致し、互いに等速度運動をしていることは自明である。ふたつの系の相対速度は、

$$\frac{v}{c} = \tanh(\xi_0) \qquad (3.27)$$

であり、これは、前述の宇宙の膨脹の反映である。

この二次元時空は、座標がそのままベクトルとなる例外的場合である。A 座標系と B 座標系の関係は、(これは、反変テンソルの関係である。)

$$x_B^\mu = L_\nu^\mu x_A^\nu \qquad (3.28)$$

反変変換の係数テンソルは

$$\because\ L_\nu^\mu = \begin{bmatrix} \cosh(\xi_0) & -\sinh(\xi_0) \\ -\sinh(\xi_0) & \cosh(\xi_0) \end{bmatrix} \qquad (3.29)$$

共変変換の係数テンソルは

$$\overline{L_\nu^\mu} = \begin{bmatrix} \cosh(\xi_0) & \sinh(\xi_0) \\ \sinh(\xi_0) & \cosh(\xi_0) \end{bmatrix} \qquad (3.30)$$

となる。これは、Lorentz 変換と同型である。

○系 2　ξ 座標の平行移動に関して、二次元実時空の基本テンソルは不変である。

[証明] A 座標系の基本テンソルを $g_{\mu\nu}$ B 座標系の基本テンソル $g'_{\mu\nu}$ と書くと

$$g'_{\mu\nu} = \overline{L_\mu^\rho}\ \overline{L_\nu^\lambda}\ g_{\rho\lambda} = g_{\mu\nu} \qquad (3.31)$$

ただし

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (3.11) \qquad (再掲)$$

$$(\cosh(\xi))^2 - (\sinh(\xi))^2 = 1 \qquad (3.13) \qquad (再掲)$$

これを見ると、特殊相対論の正当性には疑問の余地はなく、ξ 座標は便宜的にしか実在しないように見える。しかし、これは、二次元の場合に限られることを注意しておこう。すなわち、この系統の時空モデルで、Riemann空間が平坦になるのは、二次元の場合に限られる。時間軸と、三次元の ξ 空間を考えると、特殊相対論が成り立たない時空を考えることができる。問題は、それが、実験事実、とくに、Michelson-Morley型の実験と、矛盾しないかどうかということにあるが、本論文ではそれには触れない。

3.3　任意の宇宙時刻を時間座標の原点とする場合

(3.28) ～ (3.30) 式は、時間座標の原点を、宇宙の誕生の時刻にとった場合である。通常の、特殊相対論における、座標変換としての Lorentz 変換はそうではない。ξ 座標の原点で、$\tau=\tau_0$ のとき、座標時刻 $t=0$ とおくと

$$\left.\begin{aligned} x_A^0 &= c\tau\ \cosh(\xi)-c\tau_0 = ct &\quad (a)\\ x_A^1 &= c\tau\ \sinh(\xi) = z_A &\quad (b)\end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

座標系Aに対して等速度運動する座標系Bを考える。$t=0$ のとき二つの座標系の原点が一致したとすると、

$$x_B^0 = c\tau\ \cosh(\xi-\xi_0)-c\tau_0\cosh(\xi) \tag{3.33}$$

$$(\because x_B^0=0 \quad \text{when } \tau=\tau_0,\ \xi=0)$$

$$\begin{aligned}\therefore x_B^0 &= c\tau\ \cosh(\xi)\cosh(\xi_0)-c\tau\ \sinh(\xi)\sinh(\xi_0)-c\tau_0\cosh(\xi_0)\\ &= (c\tau\ \cosh(\xi)-c\tau_0)\cosh(\xi_0)-c\tau\ \sinh(\xi)\sinh(\xi_0)\\ &= x_A^0\cosh(\xi_0)-z_A\sinh(\xi_0)\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}x_B^1 &= c\tau\ \sinh(\xi-\xi_0)+c\tau_0\sinh(\xi_0)\\ &= c\tau\ \sinh(\xi)\cosh(\xi_0)-c\tau\ \cosh(\xi)\sinh(\xi_0)+c\tau_0\sinh(\xi_0)\\ &= -(c\tau\ \cosh(\xi)-c\tau_0)\sinh(\xi_0)+c\tau\ \sinh(\xi)\cosh(\xi_0)\\ &= -x_B^0\sinh(\xi_0)+z_A\cosh(\xi_0)\end{aligned} \tag{3.35}$$

これが、特殊相対論におけるLorentz 変換と考えられる。
すなわち、(3.28) ～ (3.30) 式は、同様に成立する。

4.　二次元時空における測地線

4.1　二次元実時空における測地線

測地線の方程式は、

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2}+\Gamma^k_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}=0 \tag{4.1}$$

ただし、

$$\Gamma^k_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{k\alpha}\left\{\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu}-\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\right\} \tag{4.2}$$

である。

二次元実時空においては、基本テンソルは、(3.11) 式より

$$g_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.3}$$

であるから、すべての $\Gamma^k_{\mu\nu}$ の値はゼロである。したがって、測地線の方程式は、単に

$$\frac{d^2x^k}{d\lambda^2}=0 \tag{4.4}$$

となり、測地線は、x^0 と x^1 に関する一次式（直線）となる。(x^0, x^1) 平面上の直線の傾斜が光速度で規格化された速度の逆数（c/v）となる。光子以外の粒子の測地線上の平行移動が、光速度以下に限られるかどうか（|c/v|が、1より大きいかどうか）は、測地線の方程式の理論だけでは決定できないように思われる。理論家のなかには、光速度だけが禁止されるとして、超高速で飛行する粒子に tachion という名前まで付けているが、物理学においては過度に数学を信頼することは危険である。

ここで、

$$\frac{v}{c} = \tanh(\xi_0) \tag{4.5}$$

とする、

実時空の時刻の原点を、$\tau = \tau_0$ に置いたとき、原点をとおる直線の式は

$$x^0 = \coth(\xi_0)x^1 \tag{4.6}$$

この式を、源時空の量で書くと

$$c\tau\cosh(\xi) - c\tau_0 = \frac{\cosh(\xi_0)}{\sinh(\xi_0)}\,c\tau\sinh(\xi) \tag{4.7}$$

これを整理すると

$$\sinh(\xi_0 - \xi) = \frac{\tau_0}{\tau}\sinh(\xi_0) \tag{4.8}$$

$$\therefore\ \xi = \xi_0 - \sinh^{-1}\left(\frac{\tau_0}{\tau}\sinh(\xi_0)\right) \tag{4.9}$$

上式を見れば、実時空の等速度運動は、源時空では減速運動であることがわかる。また、

$$\begin{aligned} &\tau = \tau_0 \quad \text{のとき} \quad \xi = 0 \\ &\tau \to \infty \quad \text{のとき} \quad \xi \to \xi_0 \end{aligned}$$

という、妥当な結果が得られる。このことは、次節で別の計算により確認する。以上の結論として、この宇宙モデルでは、通説とは異なり、等速度運動では有限時間内に無限遠方までは到達できないことを示す。私は、もし宇宙が膨張しているとすれば、哲学的にそうあるべきだと思う。

4.2 対数時刻源時空

より扱いやすい形にするために、源時空の座標に対して次のような変換を行う。

$$\hat{x}'^0 = c\tau_0 \log\left(\frac{\hat{x}^0}{c\tau_0}\right) = c\tau_0 \log\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \tag{4.10}$$

$$\hat{x}'^1 = c\tau_0\, x^1 = c\tau_0\, \xi \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial \hat{x}'^\mu}{\partial \hat{x}^\nu} = \begin{bmatrix} \dfrac{c\tau_0}{\hat{x}^0} & 0 \\ 0 & c\tau_0 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

であるから、この変換によって、基本テンソルは

$$\hat{g}'_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\exp(2\alpha\hat{x}^0) & 0 \\ 0 & \exp(2\alpha\hat{x}^0) \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

となる。ただし

$$\alpha = \frac{1}{c\tau_0} \tag{4.14}$$

である。

この時空を、規格化された二次元対数時刻源時空と名付ける。

4.3 対数時刻源時空の測地線

以下において、混乱の恐れがないかぎり、座標変数の上に付けた cap（$\hat{}$）を省略する。
(4.13) より、(4. 2) 式にしたがって、$\Gamma^k_{\mu\nu}$ を計算すると、ゼロでない成分は

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \alpha \\ \Gamma^0_{11} &= \alpha \\ \Gamma^1_{10} = \Gamma^1_{01} &= \alpha \end{aligned} \tag{4.15}$$

$k = 1$ の場合の測地線の方程式より

$$\frac{d^2x^1}{d\lambda^2} + 2\Gamma^1_{01}\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^2}{d\lambda} = 0 \tag{4.16}$$

$$\therefore \frac{d^2x^1}{d\lambda^2} + 2\alpha\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^1}{d\lambda} = 0 \tag{4.17}$$

ここで

$$S = \frac{dx^1}{d\lambda} \tag{4.18}$$

とおくと

$$\frac{dS}{d\lambda} + 2\alpha\frac{dx^0}{d\lambda}S = 0 \tag{4.19}$$

この式より

$$\frac{dS}{S} = -2\alpha dx^0 \tag{4.20}$$

となり、積分を実行して

$$S = \frac{dx^1}{d\lambda} = K\exp(-2\alpha x^0) \qquad (K = \text{const.}) \tag{4.21}$$

を得る。

前述のごとくに、実時空において光子以外の測地線上の平行移動は、光速度以下で行われるとすると（原点近傍で、規格化された対数時刻源時空と実時空は、限りなく一致するように、係数が選ばれているから）、測地線上の微少距離は、time-like でなければならない。測地線上の time-like な、微少距離を、あらためて $d\lambda$ とおくと

$$-1 = -\exp(2\alpha x^0)\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 + \exp(2\alpha x^0)\left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right) \tag{4.22}$$

となる。この式と、(4.21) 式より

$$\frac{dx^0}{d\lambda} = \sqrt{\exp(-2\alpha x^0) + K^2\exp(-4\alpha x^0)} \tag{4.23}$$

となり、さらに、上式と（4.21）式より

$$\frac{dx^0}{dx^1} = \frac{dx^0}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dx^1} \tag{4.24}$$

$$\therefore dx^1 = \frac{K\exp(-2\alpha x^0)dx^0}{\sqrt{\exp(-2\alpha x^0)+K^2\exp(-4\alpha x^0)}} = \frac{Kdx^0}{\sqrt{\exp(2\alpha x^0)+K^2}} \tag{4.25}$$

となる、ここで

$$u = \exp(\alpha x^0) \tag{4.26}$$

と置くと

$$dx^1 = \frac{K}{\alpha}\frac{1}{u}\frac{du}{\sqrt{u^2+K^2}} \tag{4.27}$$

岩波「数学公式 I」[7] p107より

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+C}} = -\frac{1}{a}\left|\mathrm{arccosech}(\frac{x}{a})\right| \tag{4.28}$$

$$(\text{where } a = \sqrt{C},\ C > 0)$$

ここで、定数 K の意味を考える。前述のごとくに、この時空の原点近傍では、実時空と一致する。したがって、光子以外の速度は、原点近傍で、光速度未満である。この条件は、原点で

$$\frac{dx^1}{dx^0} = \tanh(\eta) \tag{4.29}$$

$$\because x^1 = 0 \tag{4.30}$$

であると実現される。η を速度虚角と名付ける。x^1 軸の正の方向の速度を標準にとると、(4.23) 式を、考察すれば、(4.29) 式が成立するためには

$$K = \sinh(\eta) \tag{4.31}$$

であればよいことは、自明である。

一方、公式（4.28）式にしたがって、(4.25) 式を注意深く積分すると

$$x^1 = \int_{x^0=0}^{x^0} dx^1 = \frac{\sinh(\eta)}{\alpha}\left(-\frac{1}{\sinh(\eta)}\sinh^{-1}(\frac{\tau_0}{\tau}\sinh(\eta)+\frac{\eta}{\sinh(\eta)}\right) \tag{4.32}$$

ここで、(4.14) 式を考慮し、かつ、$\eta \to \xi_0$ と置き変えると、

$$\therefore \xi = \xi_0 - \sinh^{-1}(\frac{\tau_0}{\tau}\sinh(\xi_0)) \tag{4.33}$$

すなわち、4．1節でもとめた値（(4.9) 式）と同じ結果を得る。

5. 正常Riemann 空間論について

ここで、なぜ、二次元時空論の段階で、正常Riemann 空間論を捨てざるを得なかったか、論じよう。すでに論じたごとくに、二次元正常Riemann 空間について、第 3 章、第 4 章と同じ議論を進めると、実時空の基本テンソルとして、次のものを得る。

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \cosh(2\xi) & \sinh(2\xi) \\ \sinh(2\xi) & \cosh(2\xi) \end{bmatrix} \qquad (5.1)$$

形式的には、ξ 軸上の平行移動として、Lorentz 変換を説明でき、定性的には（異常Riemann 空間論と）優劣がないように見える。しかし、測地線が、直線になることを説明できない。このことは、対数時刻源時空で使用した数学公式の形からも明らかであある。正常Riemann 空間の場合、(4.22) 式に当たる式は

$$1 = \exp(2\alpha x^0)\left(\frac{dx^0}{d\lambda}\right)^2 + \exp(2\alpha x^0)\left(\frac{dx^1}{d\lambda}\right)^2 \qquad (5.2)$$

と変化する。このため dx^1 を積分するときの式の中の符号が 1 ヶ所反対になる。

$$\begin{aligned} dx^1 &= \frac{K\exp(-2\alpha x^0)dx^0}{\sqrt{\exp(-2\alpha x^0) - K^2\exp(-4\alpha x^0)}} \\ &= \frac{Kdx^0}{\sqrt{\exp(2\alpha x^0) - K^2}} \end{aligned} \qquad (5.3)$$

したがって、使用すべき積分公式は

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + C}} = -\frac{1}{a}\mathrm{arccosec}\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (5.4)$$
$$(\text{where } a = \sqrt{-C},\ C < 0)$$

となり[7]、解に逆三角関数が現れる。この関数は、原点の近傍では逆双曲線関数と似たような形をしているが、無限に開いた空間にはそぐわない。また、「実時空では、測地線上の平行移動が、等速度である」と言った実験事実を説明できない。

もちろん、Lorentz 変換も近似であるとしてしまい、空間を閉じたものとして考え直せば、正常Riemann空間論が正しい可能性は皆無ではないが、それは、私の根本理念（ξ 軸上の平行移動が Lorentz 変換となる…双曲線関数の性質から言って、空間は開いてなければならない）に反するので、これ以上は追求しない。

6. 今後の問題点

本論文で論じた 2 次元時空は平坦であった。したがって、完全な特殊相対性原理が成立し、ξ 空間（ξ 軸）は、便宜的で仮想的なものにすぎないと言える。故に、この段階では、「ξ 軸上の減速運動」を論じても無意味である。しかし、ξ 軸を、3 次元空間に拡張すると、もはや、

平坦な空間を考案することは難しい。Einsteinの理論が正しいという見地から言うと、それは、私の理論が不完全なのだという結論になる。しかし、Einsteinの理論によく似ていて、少し違う理論は、魅力がある。今後の方針としては、「宇宙の黒体輻射（ｃｍｂ）の偏り」を太陽系の絶対速度で説明し、かつ、Michelson-Morley型の実験を説明できる理論に挑戦するつもりである。

[参　考　文　献]

(1) 村田茂昭「四次元時空の基本テンソルと重力場の四次元スカラの関係について」
－ H. Yilmaz 1958理論の再検討－　札幌大学女子短期大学部紀要　第21号（1993.3.28）

(2) 村田茂昭「H. Yilmazの1958年理論の正常Riemann空間へのかきなおし(Ⅰ)」
札幌大学女子短期大学部紀要　第25号（1995.3.28）

(3) 村田茂昭「H. Yilmazの1958年理論の正常Riemann空間へのかきなおし(Ⅱ)」
札幌大学女子短期大学部紀要　第26号（1995.9.28）

(4) 村田茂昭「Lorentz変換の非Einstein的解釈」
電気学会電磁解理論研究会資料EMT-80-55（1980.10.8）

(5) Riemann幾何学については、主として下記の文献を参考にした。
矢野健太郎「Riemann幾何学入門」 森北出版㈱

(6) 相対性理論については、主として下記の文献を参考にした。
平川浩正「相対論」 共立出版㈱

(7) 森口・宇田川・一松　岩波全書「数学公式Ⅰ」§24　岩波書店