波動方程式をみたす電磁ポテンシャルの創成法

村　田　茂　昭

1. は じ め に

前論文までにおいては，私は，古典場の理論において，いくつかの仮説を提出した。現在，私の主張している要点は「我々の時空は，4次元正常 Riemann 空間であると考えた方が合理的である。」ということである。

それにもかかわらず，「なぜ，相対的に見えるか？」，「Maxwell の方程式に符号のねじれはあるのか？」等々について，今まで，種々述べたことは，いまだ試行錯誤の域を出ていない。

我々の時空が，4次元正常 Riemann 空間であれば，完全な相対性は成立しない。そのひとつのあらわれが，「宇宙の黒体輻射（cmb …cosmic microwave background）の偏り」であると言えば，正統派からの異論が殺到するであろう。しかし，自然現象は，常に客観的に見なければならない。膨張する宇宙に対する相対速度のあらわれが「cmb の偏り」であると解するのが，一番自然の理にかなっている。我々にとって，宇宙は，ただひとつしかない（と私は考える。…最近の宇宙論では，宇宙が無数にあるという説もある。）から，その相対速度を「絶対速度」と呼んでも，さしつかえないであろう。

この「絶対速度」が遠方の銀河から来る光のスペクトルの red shift に偏りをもたらしていないかどうか，検討してみたこともあるが，従来のこの方面のデータは，ばらつきが多すぎて何も成果を得ることができなかった。原理的に，視線速度（の影響）しか観測できない困難性はあるにしても，宇宙に打ち上げた Hubble 望遠鏡や，大気の安定している地域に建設された巨大望遠鏡による観測データがそろってくると，この方面の検討は，急速に進むであろう。cmb の偏りの方向は，かなり正確に測定されているので，電波天文学者のみならず，光天文学者も，このことにもっと注目してほしいと考える。

我々の時空が，正常 Riemann 空間であっても，電気磁気学的現象が，完全に相対的であるためには，「Einstein の擬似基本テンソル」[1] を仮定するだけで充分と思われる。しかし，前論文においては，この安易な道をすてた。もちろん，自然科学である以上は，何か，明白な実験結果を予言できるか，あるいは，すでに得られたデータに関する新しい事実（たとえば，物理定数間の未知の関係式）を発見できなければ，この理論は，成功したとは言えない。いまだ，その段階には達していないが，さしあたり，前論文の方針にしたがって解析を進める。

2. 波動方程式と Lorentz 条件

前論文[1]の主張を継続すると，4次元電磁ベクトルポテンシャル A^k は，次の波動方程式をみたさねばならない。

$$\zeta^{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu A^k = \eta A^k \tag{2.1}$$

ただし

D_μ：x^μ 軸に関する共変微分演算子

$\zeta^{\mu\nu}$：正常 Riemann 空間の基本テンソル

η：固有値

である。

電磁波の場合

$$\eta = -2k^2 \tag{2.2}$$

ただし

$$k = \frac{\omega}{c} \tag{2.3}$$

ω：角周波数

c：真空中の光速

である。

電磁場のテンソル $F_{\mu\nu}$ を

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{2.4}$$

$$F^{\mu\nu} = \zeta^{\mu\alpha}\zeta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \tag{2.5}$$

とすると

$$\begin{aligned} D_\nu F^{\mu\nu} &= -\eta A^\mu \\ &= 2k^2 A^\mu \end{aligned} \tag{2.6}$$

定義により $F^{\mu\nu}$ は，2階の反対称テンソルであるから，Riemann 幾何学の定理により

$$D_\mu A^\mu = 0 \tag{2.7}$$

でなければならない。また，この式が（2.6）式と，（2.1）式が等価であるための必要条件である。(重力場の影響は考えていない。すでに，電磁場の方程式は枠座標系[1][2]で成立すればよいという考えを私は持っている。)

A^k は，従来の理論によれば，4次元電流ベクトルのあるべき位置にあらわれる。前論文[1]においては，4次元電流ベクトルは，ミクロには存在しないと主張したが，ここでは，それを取り下げ，今後の検討課題とする。

本理論の当然の帰決として，$\eta = 0$ の場合を除き，電磁ポテンシャル A^k には，ゲージのスカラの偏微係数による任意性はない。

すなわち，従来言われているようなゲージのスカラ f があり，下式をみたすとする。

$$\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu f = 0 \tag{2.8}$$

ここで前述の A_μ にいわゆるゲージ変換をほどこす。そうすると，

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \tag{2.9}$$

$$A'^\mu = \zeta^{\mu\alpha}A'_\alpha \tag{2.10}$$

$$D_\mu A'^\mu = D_\mu A^\mu + \zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu f = 0 \tag{2.11}$$

となり，A'^μ は Lorentz 条件をみたすが，（2.1）式の波動方程式をみたることはできない。

すなわち

$$\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu A'^k = \eta A^k \fallingdotseq \eta A'^k \tag{2.12}$$

それでは，ゲージのスカラとして，下記のスカラ波動方程式の解を採用してはどうか？

$$\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu f = \eta f \tag{2.13}$$

後の議論のため，$f \to f_H$ を書き換え，これを Hertz のスカラと名付ける。

あらためて

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f_H \tag{2.14}$$

この A'_μ は

$$\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu A'^k = \eta A'^k \tag{2.15}$$

となって，波動方程式は，たしかに満足するが

$$D_\mu A'^\mu = \eta f_H \fallingdotseq 0 \tag{2.16}$$

となって，Lorentz 条件は，みたさない。

すなわち，この理論においては，電磁ポテンシャル A^k には，ゲージ変換に起因する任意性は（固有値 $\eta=0$ の場合を除き）存在しない。

最近の，私の研究の目標は，結局ところ波動方程式（2. 1）式と，Lorentz 条件（2. 7）式を満足する電磁ポテンシャル A^k を，Hertz のスカラ波動方程式（2.13）式の解から組織的に創成するところにある。

従来の理論は，（四次元的に解釈すれば）2 階の反対称テンソル $\Pi^{\mu\nu}$（Hertz テンソル）を作り

$$A^\mu = \mathrm{D}_\nu \Pi^{\mu\nu} \tag{2.17}$$

とするものであった。

このように，A^μ を定めると，$\Pi^{\mu\nu}$ の反対称性により，恒等的に

$$\mathrm{D}_\mu A^\mu = 0 \tag{2.18}$$

は，保証される。

しかし，前論文[1]において，Hertz テンソルの反対称性は，それより得られる電磁ポテンシャルが Lorentz 条件を満足するための，充分条件であって必要条件でないことを示した。

したがって，本論文においては，Hertz テンソルを論ずる場合には，必ずしも反対称性は要求しないこととする。

3．従来の解法の確認と，新理論の準備

前述のごとくに，本論文で述べる電磁ポテンシャル論は，従来の理論よりすこし変わってきているのであるが，従来の理論の簡単な手なおしである部分については，すべて，本理論に含まれていなければならない。

そこで，念のため，本章においては，従来の理論をそのまま掲げる。

Hertz のスカラ波動方程式は

$$\nabla^2 f + k^2 f = 0 \tag{3. 1}$$

このとき，従来の Maxwell の方程式と等価な，Hertz ベクトル $\mathbf{\Pi}$ に関する波動方程式は

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi} = 0 \tag{3. 2}$$

このベクトル波動方程式をみたす二つの Hertz ベクトル，すなわち，電気型 Hertz ベクトル $\mathbf{\Pi}_e$ と磁気型 Hertz ベクトル $\mathbf{\Pi}_m$ から，電磁ポテンシャル Φ，$\mathbf{A}$ が得られる。

前論文で指摘したように（このことは，あまり注目されていないが） 3 次元の Hertz ベクトル理論と 4 次元の Hertz テンソル理論を忠実に 3 + 1 次元に表記したものとは微妙なちがいがある。これについては，後でふれる。

（3. 2）式の解として，次の六個が知られている。ただし，$\mathbf{a}$ は定ベクトル，$\mathbf{r}$ は径ベクトルである。

$$\left.\begin{array}{lll}
\mathbf{K}_{\mathrm{a}} = \mathbf{a} f & & \text{(a)} \\
\mathbf{L} = \nabla f & & \text{(b)} \\
\mathbf{M}_{\mathrm{a}} = \nabla \times \mathbf{a} f & & \text{(c)} \\
\mathbf{M}_{\mathrm{r}} = \nabla \times \mathbf{r} f & & \text{(d)} \\
\mathbf{N}_{\mathbf{a}} = \dfrac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_{\mathbf{a}} & & \text{(e)} \\
\mathbf{N}_{\mathrm{r}} = \dfrac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M}_{\mathrm{r}} & & \text{(f)}
\end{array}\right\} \tag{3. 3}$$

前述の理論を 4 次元化すると，定ベクトル $\mathbf{a}$ は，定テンソル $a^{\mu\nu}$ に変更される。径ベクトルにあたるものは，2 階の反対称テンソル（Hertz テンソル）の空間－空間成分となる。

Hertz テンソルは

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}, & -\Pi_e^1/c, & -\Pi_e^2/c, & \Pi_e^3/c \\ \Pi_e^1/c, & \mathbf{0}, & \Pi_m^3, & -\Pi_m^2 \\ \Pi_e^2/c, & -\Pi_m^3, & \mathbf{0}, & \Pi_m^1 \\ \Pi_e^3/c, & \Pi_m^2, & -\Pi_m^1, & \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

電磁ポテンシャルは

$$A^\mu = D_\nu \Pi^{\mu\nu} \tag{3.5}$$

である。

$$A^\mu = (\frac{\Phi}{c}, A^1, A^2, A^3) \tag{3.6}$$

とすると，4次元理論の3＋1次元表現は，

$$\Phi = \nabla\cdot\mathbf{\Pi}_e \tag{3.7}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathbf{\Pi}_e}{\partial t} + \mu_o\nabla\times\mathbf{\Pi}_m \tag{3.8}$$

となる。4次元のテンソルの成分と3次元のベクトルの成分との対応関係は前論文[1]と参照されたい。

なお，3次元理論と，4次元理論の3＋1次元表現が完全に等価でないために，次のような変更が必要である。

すなわち，Hertz ベクトルに関する波動方程式（3.2）よりも，電磁ポテンシャルに関する方程式

$$\nabla^2\Phi + k^2\Phi = 0 \tag{3.9}$$

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0 \tag{3.10}$$

が優先させねばならない。このため $\mathbf{\Pi}_m$ に関して

$$\mathbf{\Pi}_m = \mathbf{K}_r = \mathbf{r}f \tag{3.11}$$

は，（3.2）式の解ではないが，これを，（3.8）式に代入した電磁ポテンシャルは（3.10）式を満足する。((3.8) 式の $\mathbf{\Pi}_m$ の前には rotation 演算子がついているから当然である。)

これに関連して $\mathbf{\Pi}_m$ に関しては，（3.3）式の $\mathbf{N}_a$, $\mathbf{N}_r$ は，もはや独立の解ではなくなってしまう。すなわち，得られる電磁界に関して，$\mathbf{N}_a$ は，$\mathbf{K}_a$ と，$\mathbf{N}_r$ は，今回つけ加えた $\mathbf{K}_r$ と，定係数を乗じただけのちがいしかない。

なお，$\mathbf{\Pi}_e$ に関しては，従来の理論の範囲で，変更はない。

4．定テンソルとスカラの直積より作る Hertz テンソル

定テンソルを $a^{\mu\nu}$ とする。これを，創成テンソルと名付ける。Hertz のスカラを f_H とすると，

$$\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f_H = \eta f_H \tag{4.1}$$

$$\Pi^{\mu\nu} = a^{\mu\nu} f_H \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} A^k &= D_\nu \Pi^{k\nu} \\ &= (D_\nu a^{k\nu}) f_H + a^{k\nu} D_\nu f_H \\ &= a^{k\nu}\partial_\nu f_H \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\because D_\nu a^{\mu\nu} = 0 \tag{4.4}$$

なお，前述のように，重力場の影響は考えていない。このように，定めた電磁ポテンシャル A^k は，（4.1）と同形の波動方程式をみたす。

$$\begin{aligned}\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu A^k &= a^{k\alpha}\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu D_\alpha f_H \\ &= a^{k\alpha}D_\alpha\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu f_H \\ &= a^{k\alpha}D_\alpha\eta f_H \\ &= \eta a^{k\nu}\partial_\nu f_H \\ &= \eta A^k \end{aligned} \tag{4.5}$$

ただし，重力場の影響を考慮しなくともよいときは，共変微分は順序に関して変換可能である。

創成テンソル $a^{\mu\nu}$ が反対称テンソルであれば，Lorentz 条件は自動的にみたされる。すなわち，

$$a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu} \tag{4.7}$$

であれば，

$$\Pi^{\mu\nu} = -\Pi^{\nu\mu} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\therefore D_\mu A^\mu &= D_\mu D_\nu \Pi^{\mu\nu} \\ &= 0\end{aligned} \tag{4.9}$$

この型の解は，従来の理論の $\mathbf{K_a}$（Π_e に関して）および $\mathbf{M_a}$（Π_m に関して）に対応するものである。(空間が正常 Riemann 空間に変更されているので，全く同じと言うわけではないが)

前論文で，述べたように，創成テンソル $a^{\mu\nu}$ の反対称性は，一般的には，必要条件ではない。

$a^{\mu\nu}$ が，定テンソルでさえあれば，若干の工夫によって (4. 2), (4. 3) 式で作られる電磁ポテンシャルが Lorentz 条件を満足することができる。しかし，今のところ，これには試行錯誤が必要である。

5．いわゆる径 Hertz ベクトルの 4 次元的解釈

5.1　定数テンソルではない創成テンソル

前節の要点は，創成テンソル $a^{\mu\nu}$ が

$$D_\alpha a^{\mu\nu} = 0 \tag{5.1}$$

をみたす点にあった。このためには，$a^{\mu\nu}$ が定テンソル（デカルト座標系において，$a^{\mu\nu}$ の各成分が定数）であれば，充分である。

しかし，目標は

$$A^k = D_\alpha(a^{k\alpha}f_H) \tag{5.2}$$

とおいたとき

$$\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu A^k = \eta A^k \tag{5.3}$$

であればよいのであって，上式に (5. 2) 式を代入した際

$$右辺 = a^{k\alpha}D_\alpha(\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu f_H) \tag{5.4}$$

$$= a^{k\alpha}D_\alpha(\eta f_H) \tag{5.5}$$

と変形できればよい。

ちょっと考えると，$a^{\mu\nu}$ の各成分がデカルト座標系において，座標の一次式であれば，充分であるかのように見える。しかし，$\zeta^{\mu\nu}D_\mu D_\nu$ と言う演算子が，単一の演算子でないために事態は，もっと複雑である。

(5. 2) 式を (5. 3) 式の右辺に代入して，すべての項を書き上げる。以下簡単のため，f_H を f と書く。

$$\begin{aligned}左辺 = \zeta^{\mu\nu}[\{&\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu(\mathrm{D}_\alpha a^{k\alpha})\}f \\ &+\{\mathrm{D}_\nu(\mathrm{D}_\alpha a^{k\alpha})\}\mathrm{D}_\mu f \\ &+\{\mathrm{D}_\mu(\mathrm{D}_\alpha a^{k\alpha})\}\mathrm{D}_\nu f \\ &+\{(\mathrm{D}_\alpha a^{k\alpha})(\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu f)\} \\ &+\{(\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu a^{k\alpha})\mathrm{D}_\alpha f\} \\ &+\{(\mathrm{D}_\nu a^{\kappa\alpha})\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\alpha f\} \\ &+\{(\mathrm{D}_\mu a^{k\alpha})\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\alpha f\} \\ &+\{a^{k\alpha}(\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu\mathrm{D}_\alpha f)\}] \qquad (5.6)\end{aligned}$$

重力場の影響のない場合は，共変微分演算子の順序は変換可能であるから，上式の第8項は，

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_8 &= \zeta^{\mu\nu}a^{k\alpha}\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu f \\ &= a^{k\alpha}\mathrm{D}_\alpha\zeta^{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu f \qquad (5.7)\end{aligned}$$

ただし，基本テンソルの定義より

$$\because\ \mathrm{D}_\alpha\zeta^{\mu\nu} = 0 \qquad (5.8)$$

(5.5) 式を見ると，I_8 が残すべき項である。

$$\begin{aligned}\therefore\ \mathrm{I}_8 &= a^{k\alpha}\mathrm{D}_\alpha(\eta f) \\ &= \eta a^{k\alpha}\mathrm{D}_\alpha f \\ &= \eta A^k \qquad (5.9)\end{aligned}$$

$a^{\mu\nu}$ の各成分が，デカルト座標の一次式であるとし，共変微分演算をデカルト座標系で行うものとすると，(5.6) 式の，第1，第2，第3，第5項は，恒等的にゼロとなる。
第4項をあとまわしとし，さしあたり，第6項と第7項の和をゼロにすることを考える。

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_6+\mathrm{I}_7 = \zeta^{\mu\nu}[\{&(\mathrm{D}_\nu a^{k\alpha})\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\alpha f\} \\ &+\{(\mathrm{D}_\mu a^{k\alpha})\mathrm{D}_\nu\mathrm{D}_\alpha f\}] \qquad (5.10)\end{aligned}$$

この式の，すべての項を書き出して，検討すると，$a^{\mu\nu}$ の成分が，特定の値(座標の一次式)のときにゼロになることがわかる。

すなわち，(x^0, x, y, z) 系において

$$\left.\begin{aligned} &a^{23} = -a^{32} = x && \text{(a)} \\ &a^{31} = -a^{13} = y && \text{(b)} \\ &a^{12} = -a^{21} = z && \text{(c)} \\ &\text{他の}\ a^{\mu\nu} = 0 && \text{(d)}\end{aligned}\right\} \qquad (5.11)$$

このとき

$$\mathrm{I}_6+\mathrm{I}_7 = 0 \qquad (5.12)$$

である。

すなわち，(5.6) 式の第6項と第7項の和をゼロとする $a^{\mu\nu}$ は，デカルト座標系において

$$a^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & z, & -y \\ 0, & -z, & 0, & x \\ 0, & y, & -x, & 0 \end{pmatrix} \qquad (5.13)$$

(μ 行 ν 列表示)

この形の $a^{\mu\nu}$ に関しては，(5.6) 式の第4項に，あらわれる因子 $\mathrm{D}_\alpha a^{k\alpha}$ は

$$\mathrm{D}_\alpha a^{k\alpha} = 0 \qquad (5.14)$$

である。よって残された第4項もゼロとなる。

したがって，創成テンソル $a^{\mu\nu}$ を (5.13) 式の値にとると，Hertz テンソル

$$\Pi^{\mu\nu} = a^{\mu\nu}f \qquad (5.15)$$

より得られる電磁ポテンシャルは，波動方程式 (5.3) 式をみたす。また，あきらかに，$a^{\mu\nu}$ は，

2階の反対称反変テンソルであるから，これによって作られる Hertz テンソルも反対称テンソルとなり，結果として得られる電磁ポテンシャルは Lorentz 条件をみたす。

5.2 径ベクトルの形の Hertz ベクトル

座標系の空間部分を球座標系に変換する。
すなわち，

$$\left.\begin{aligned} x'^0 &= x^0 && \text{(a)} \\ x'^1 &= \mathrm{r} = \sqrt{x^2+y^2+z^2} && \text{(b)} \\ x'^2 &= \theta = \cos^{-1}(z/r) && \text{(c)} \\ x'^3 &= \phi = \tan^{-1}(y/x) && \text{(d)} \end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

$$\therefore a'^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dfrac{1}{\mathrm{r}\sin\theta} \\ 0, & 0, & \dfrac{1}{\mathrm{r}\sin\theta}, & 0 \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

$a^{\mu\nu}$ や $a'^{\mu\nu}$ の空間－空間成分は，いわゆる軸性ベクトルである。テンソルの成分と軸性ベクトルの成分の関係に簡単ではないがこれについてはすでに述べた。[3]

以上の場合は，Hertz テンソルが，反対称性を持つので，二つの Hertz ベクトルに対応づけられる例である。すなわち，この場合は，

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_e &= (0,\ \ 0,\ \ 0) && \text{(a)} \\ \mathbf{\Pi}_m &= (\mathbf{r}f,\ \ 0,\ \ 0) && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

と書くことができる。これが，径ベクトルの形の Hertz ベクトルであり，4次元正常Riemann空間においても，やはり存在することがたしかめられた。

なお，解法を見れば，わかるように

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_e &= (\mathbf{r}f,\ 0,\ 0) && \text{(a)} \\ \mathbf{\Pi}_m &= (0,\ 0,\ 0) && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

の形の解は存在しない。

5.3 その他の解

（5. 6）式を詳細に，検討すると，別の形の解が存在することがわかる。

たとえば，デカルト系において

$$\left.\begin{aligned} a^{01} &= -a^{10} = y && \text{(a)} \\ a^{02} &= a^{20} = -x && \text{(b)} \\ a^{12} &= -a^{21} = x^0 && \text{(c)} \end{aligned}\right\} \tag{5.20}$$

も，波動方程式と，Lorentz 条件を，満足する電磁ポテンシャルを創成する。しかし，この形の解は，x^0 を，あらわに含むので，電磁波工学的には，あまり意味がないと考えられる。ここでは，数学的見地から，この形の解が存在することを指摘しておくにとどめる。

5.1 節において，デカルト座標の一次式という表現を使用した。当然，$a^{\mu\nu}$ の成分に，定数項のある場合もあり得る。しかし，その場合は，第4章で述べた電磁ポテンシャルが，重ねあわせになっている場合に帰着する。

6．定ベクトルの4次元 rotation により創成される解

第3章の (3. 3) 式の $\mathbf{M_a}$ は，4次元空間では，どのような形になるか考えてみよう。

4次元の定ベクトルを a_μ とする。デカルト系において

$$a_\mu = (a_0, a_1, a_2, a_3) \tag{6.1}$$

Hertz のスカラを f として，$a_{\mu\nu}$ と f の直積を作り

$$p_\mu = fa_\mu \tag{6.2}$$

とすると，

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu} &= \partial_\mu p_\nu - \partial_\nu p_\mu \\ &= a_\nu \partial_\mu f - a_\mu \partial_\nu f \end{aligned} \tag{6.3}$$

$$p^\mu = \zeta^{\mu\nu} p_\nu \tag{6.4}$$

が，Lorentz 条件をみたせば，$\Pi_{\mu\nu}$ は電磁場のテンソル $F_{\mu\nu}$ そのものとなるが，そうでない場合のみを考える。

$$\Pi^{\mu\nu} = \zeta^{\mu\alpha}\zeta^{\nu\beta}\Pi_{\alpha\beta} \tag{6.5}$$

とすれば

$$A^k = \mathrm{D}_\nu \Pi^{k\nu} \tag{6.6}$$

より，得られる電磁ポテンシャルは (2. 1) 式の形の波動方程式を満足する。何故ならば，(6. 3) 式において

$$\partial_\mu \to \mathrm{D}_\mu$$
$$\partial_\nu \to \mathrm{D}_\nu$$

と書き変えることは，いつでも可能であり，枠座標系では，共変微分演算子は，順序に関して変換可能であるからである。

しかし，これを，第3章の $\mathbf{M_a}$ に相当させるためには，若干の細工が必要である。

静止系において，次のような定数混合テンソルを定義する。

$$b_\mu^\nu = \begin{bmatrix} 0, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

これは，2階のテンソルの空間－空間成分のみを抜きだす演算子の動きをする。

あらためて

$$\Pi'_{\mu\nu} = b_\mu^\alpha b_\nu^\beta (\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha) \tag{6.8}$$

とおき，二つの指標を上に上げると，

$$A'^k = \mathrm{D}_\nu \Pi''^{k\nu} \tag{6.9}$$

となる。これが，$\mathbf{M_a}$ から作られる電磁ポテンシャルに相対する。

A'^k は，Lorentz 条件を満足するが，(6. 8) 式には，空間－空間成分のみをぬき出す操作が入っているので，p_μ の代りに A'_μ を代入しても，作られる2階のテンソルは，電磁場のテンソルではない。

$$\Pi''_{\mu\nu} = b_\mu^\alpha b_\nu^\beta (\partial_\alpha A'_\beta - \partial_\beta A'_\alpha) \tag{6.10}$$

ただし，この A'_μ は (6. 9) 式で定義される反変ベクトル A'^μ の指標を下げたものである。

$$A''^k = \mathrm{D}_\nu \Pi''^{k\nu} \tag{6.11}$$

とすれば，この A''^k が，$\nabla\times\mathbf{M_a}$ から，作られる電磁ポテンシャルに相当する。

なお，テンソルの空間－空間成分をぬき出す操作が入っているために，(6. 8) 式，(6.10) 式は，三次元空間で rotation をとる操作と等価である。したがって，三次元理論ですでに，証明

されているように，さらに rotation をとると，出発点（A'^k にあたる）に戻ってしまうので，このタイプの電磁ポテンシャルは，これらの他にはない。

7．別の形の，径 Hertz ベクトル

第6章を参考にすると，いわゆる径 Hertz ベクトルについて，別の形もあることがわかる。以下の証明は，すべて，空間部分がデカルト系の枠座標系で行う。

すなわち

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1, \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

ここで，4次元のデカルト座標ベクトルを

$$R^\mu = (x^0,\ x,\ y,\ z) \tag{7.2}$$

とすると，R^μ と Hertz のスカラ f の直積より

$$\begin{aligned} p^\mu &= R^\mu f \\ &= (x^0 f,\ xf,\ yf,\ zf) \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$p_\mu = \zeta_{\mu\nu} p^\nu \tag{7.4}$$

とすれば，(6. 3)(6. 4)(6. 5)(6. 6) を同様の計算によって

$$\Pi_{\mu\nu} = \partial_\mu p_\nu - \partial_\nu p_\mu \tag{7.5}$$

$$A^k = \mathrm{D}_\nu \Pi^{k\nu} \tag{7.6}$$

が得られる。この A^k が Lorentz 条件をみたすことは，$\Pi^{\mu\nu}$ の反対称性より自明である。A^k が (2. 1) 式の，波動方程式をみたすことは，(7. 6) の A^k を (2. 1) 式に代入して，具体的に，各項を計算することにより証明できる。

しかし，この電磁ポテンシャルには，x^0 があらわに含まれており，我々の期待する解ではないであろう。

ベクトルとみなせる4次元のデカルト座標で，$x^0 = 0$ とおいたものを

$$r^\mu = (0,\ x,\ y,\ z) \tag{7.7}$$

とし，

$$p'^\mu = r^\mu f \tag{7.8}$$

とおいて，同様な計算をしてみると，生成した，電磁ポテンシャルが (2. 1) 式の波動方程式をみたすためには，第6章でのべた，2階のテンソルの空間－空間成分をぬき出す操作が必要であることが判明する。すなわち，(6. 7) 式の b_μ^ν を用いて

$$\Pi'_{\mu\nu} = b_\mu^\alpha b_\nu^\beta (\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha) \tag{7.9}$$

$$A'^k = \mathrm{D}_\nu \Pi'^{k\nu} \tag{7.10}$$

とすると，波動方程式および Lorentz 条件をみたす電磁ポテンシャルが得られる。これが，第3章の $\mathbf{M}_\mathrm{r}$ から作られる電磁ポテンシャルに相当する。

第6章と同様にして

$$\Pi_{\mu\nu} = b_\mu^\alpha b_\nu^\beta (\partial_\alpha A'_\beta - \partial_\beta A'_\alpha) \tag{7.11}$$

とおくと，

$$A''^k = \mathrm{D}_\nu \Pi''^{k\nu} \tag{7.12}$$

が得られる。これは，第3章の $\nabla\times\mathbf{M}_\mathrm{r}$ から作られる電磁ポテンシャルに相当する。

8．∇f に相等する電磁ポテンシャル

従来の Hertz ベクトルの解で（3. 3）式の

$$= \nabla f \tag{8.1}$$

のみが残された。

この解を4次元化して，電磁ポテンシャル化すると，

$$A_\mu = \partial_\mu f \tag{8.2}$$

となるが，この形の電磁ポテンシャルは，（固有値 η がゼロでないかぎり）波動方程式と Lorentz 条件を同時にみたすことはできない。すなわち，本理論は，例外的（すなわち $\eta = 0$ ）場合を除き，ゲージ変換による電磁場の不変性を否定するものである。

なお，（8. 2）式より得られる A_μ が，波動方程式と Lorentz 条件を同時にみたす電磁ポテンシャルになり得ないのは，あくまでも，これ一項のみの場合である。（8. 2）式の右辺に，別の項を追加することによって，適切な電磁ポテンシャルを作ることは可能であるが，それを一般的に論ずるのは困難である。

9．終　　章

以上で，従来の Hertz ベクトル理論およびそれを4次元化した Hertz テンソル理論を，4次元正常 Riemann 空間に書き変えることができた。その際，若干の変更や，拡張があったが，ひとつを除き，「ほんの手なおし」だと言える。

そのひとつとは，新しい理論では，固有値 η が，ゼロの場合を除き，電磁ポテンシャルのゲージ変換に際して，電磁場は不変ではない点である。このことは，電磁場のエネルギテンソル式の中に，電磁ポテンシャルが，陽にあらわれることの正当性を保証するものである。

次の段階は，具体的電磁場の電磁ポテンシャルを決定して行くことになろう。

［完］

[参考文献]

(1) 村田茂昭　「三次元 Hertz ベクトルと四次元 Hertz テンソル理論について」札幌女子短期大学部紀要　第27号　pp1.～17（1996.3.）

(2) 村田茂昭　「H. Yilmaz の1958年理論の正常 Riemann 空間への書きなおし（Ⅰ）」札幌女子短期大学部紀要　第26号　p48（1995.3.28）

（注）枠座標系とは，真の基本テンソルから，重力場のスカラの指数関数の直積部分を取り除いた基本テンソルを持つ座標系である。

なお，「古典場に関する主要な方程式は枠座標で成立する。」と言うのは，私の提出した仮説であって，未だ証明はされていない。

（論文終り）