三次元 Hertz ベクトルと四次元 Hertz テンソル理論について

村田茂昭

1. はじめに

最近の論文において，私は，古典場の理論の舞台（時空）を，4次元異常 Riemann 空間から4次元正常 Riemann 空間への書き換えを試みている。本論文においては，電磁波解析の標準的な手法である，3次元 Hertz ベクトル解析と，その4次元化である Hertz テンソル解析をとりあげる。[1]

Hertz ベクトルには，電気型と磁気型の二つがあるが，さらに各々に，代表的な二つの型があることが知られている。歴史的には，まず，定方向を向く Hertz ベクトル理論が，Whittaker, Hertz, Righi によって確立された。その後，Debye と Bromwich によって，別の型の Hertz ベクトルが導入され，Sommerfeld は，それが定点より放射状に向いているベクトル（radial vector … 径ベクトル）であることを示した。[2]

また，これらのベクトルは，電磁ポテンシャル（電気スカラポテンシャル Φ，および磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$）と，磁電ポテンシャル（磁気スカラポテンシャル Φ^*，および電気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}^*$ … 本論文では，こう名付ける）に関連づけられた。

この段階で，電磁場の Hertz ベクトル解析の理論は確立したものと考ええられ，現在でも，主としてアンテナ工学の分野に応用されている。この理論によれば，関係する方程式群に一度表われる「符号のねじれ」を除くと，電磁場の電気的量と磁気的量は，対称な形で方程式群に現われる。これを，本論文では，非相対論的 Hertz ベクトル解析と名付ける。

その後，この理論は，Einstein の一般相対論の影響を受けた。以下においては，（一般相対論的と言う冠がついているが）簡単のため，重力場の影響が無視できる場合についてのみ論じている。今までの，私の重力場に関する解析[3),(4),(5] において，重力場の直接的影響は，測地線の方程式群の解の方面に現われるが，重力場自身に関してさえも，基本方程式は，枠座標系（真の基本テンソルから，重力場のスカラの指数関数の直積部分を取り除いた基本テンソルを持つ座標系）における，共変微分方程式で表現できることを示した。したがって，この限定（さしあたり，電磁場の方程式から，重力場の影響を省く）は，きわめて実際的なものであり，将来，わずかな手なおしによって，強い重力場の存在する場合に拡張できると考えられる。

一般の曲線座標系間の座標変換に対して共変な，4次元の Maxwell の方程式は，すでに確立している。[6] この理論によれば，電気的量と磁気的量の対称性は全くなく，磁気型 Hertz ベクトルの取り扱いは修正を要する。

そこで，二つの型（電気型と磁気型）の Hertz ベクトルは，一つの四次元2階反対称テンソル（six-vector）にまとめられた。[2] これを，本論文では，（従来の）相対論的 Hertz テンソル解析と称する。

この理論は，真空中のみならず，一般の媒質存在のもとで Nisbet によって[2] 完成されたと考えられている。なお，実際には，4次元時空におけるテンソル解析なのであるが，Einstein の一般相対論においては（重力場が存在しない場合），空間をデカルト座標系にとると，基本テンソルは，Lorentz 変換に不変である。故に，この理論を，三次元ベクトル方程式群で表示しても，不都合を生じない。以下において，これを「4次元理論の3次元表示」と称する。Maxwell-

Einsiteinの理論体系内においても，3次元理論（非相対論的Hertzベクトル解析）と4次元理論の3次元表示とは，微妙なちがいがあり，研究者を惑わせる原因となる。「Nisbetの感ちがい」[1]（彼は，磁気型のradial Hertzベクトルと対等な，電気型Hertzベクトルがあるとしている）も，このせいであろう。

なお，本論文ではNisbetとは異なり，真空中の場合しか論じていない。また，以前にMaxwell-Einstein理論体系内で，私が試みた電気的量と磁気的量の（4次元理論における）対称化[7]に関しては，本論文では行っていない。

2.　非相対論的Hertzベクトル解析

読者と共通の基盤に立って論ずるために，ここにおいては，従来の理論をそのまま掲げる。理論物理学者は，しばしば，国際条約を無視して，SI（国際単位系）以外の単位系を使用したがるので，この章は重要である。

Hertzベクトル解析は，通常，電磁波源と関連づけて論じられるが，本論文では，まず簡単のために，暗黙のうちに導波路の電磁場を想定している。

2.1.　Hertzベクトルと電磁場の成分

3次元の一般座標

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (x^1,\ x^2,\ x^3) \\ &= (u,\ v,\ w) \end{aligned} \tag{2.1}$$

において

◇電気型Hertzベクトル

$$\mathbf{\Pi}_e = (\Pi_{e,u},\ \Pi_{e,v},\ \Pi_{e,w}) \tag{2.2}$$

◇磁気型Hertzベクトル

$$\mathbf{\Pi}_m = (\Pi_{m,u},\ \Pi_{m,v},\ \Pi_{m,w}) \tag{2.3}$$

とする。以下において，∂_t は，時間に関する偏微分演算子を表わす。これは，非相対論的理論ではスカラ演算子である。

正弦波の解を想定すると，電磁場の各成分には $exp(j\omega t)$ なる因子が含まれる。ここで，j は単位虚数である。

$$\therefore\quad \partial_t = j\omega \quad (\omega\text{: 角周波数}) \tag{2.4}$$

3次元のMaxwellの方程式は，

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{H}-\partial_t\mathbf{D} &= \boldsymbol{i} &\text{(a)}\\ \nabla\cdot\mathbf{D} &= \rho &\text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{E}+\partial_t\mathbf{B} &= 0 &\text{(a)}\\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 &\text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

ここで，**E**は電場であり，**B**は磁束密度を表わすベクトルである。

また，

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0\mathbf{E} &\text{(a)}\\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B} &\text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

ここで，ε_0, μ_0 は，各々，真空中の誘電率および透磁率である。実のところ，理論物理学者達は，これらが1にならないのが，気に入らないのである。その影響で工学の分野においても，彼等の発言力の強い分野では，SI以外の単位が横行している。しかし，電気と磁気を同時に扱い，

かつ，実用単位も，つづけて使用しようとするならば，SI の方が便利である。π や c（光速度）が，無原則に出現することに悩む必要はない。我々は，むしろ，やっかいな係数をすべて ε_0 と μ_0 に封じこめてくれた Giorgi に感謝すべきである。なお，これ以後は，自由空間についてのみ論ずる。

$$\left.\begin{aligned} &\therefore \quad \rho = 0 && \text{(a)} \\ &\therefore \quad \boldsymbol{i} = 0 && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

ただし，ρ は電荷密度，$\boldsymbol{i}$ は電流密度である。(2.8) 式にかかわらず，$\rho, \boldsymbol{i}$ がもし存在したら電荷保存の法則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \boldsymbol{i} = 0 \tag{2.9}$$

が成立すべきことは，念頭においておく。

なお，第1章に述べた「符号のねじれ」とは，(2.5)，(2.6) 式の ∂_t の前の符号が異なることを言う。

以上の表記法より，電磁ポテンシャルは，

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}_e && \text{(a)} \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{c^2}\partial_t \boldsymbol{\Pi}_e && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

である。また，磁電ポテンシャルは，

$$\left.\begin{aligned} \Phi^* &= -\nabla \cdot \boldsymbol{\Pi}_m && \text{(a)} \\ \mathbf{A}^* &= \frac{1}{c^2}\partial_t \boldsymbol{\Pi}_m && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

である。ここで，c は真空中の光速度であり，

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{2.12}$$

なる関係がある。なお，SI においては，c は定義される値であって，測定値ではない。[8]

$$c = 2.99792458 \ (m/\mathrm{sec}) \tag{2.13}$$

これらより，

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{10^7}{4\pi c^2} \quad (\mathrm{F}/m) && \text{(a)} \\ \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \ (\mathrm{H}/m) && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

である。

これらのポテンシャルより導き出される電磁場は，

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A} - \frac{1}{\varepsilon_0}\nabla \times \mathbf{A}^* && \text{(a)} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{A} - \nabla\Phi^* - \partial_t \mathbf{A} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

である。この式においても，$\nabla \times \mathbf{A}^*, \nabla \times \mathbf{A}$ の符号に，ねじれが見られる。

これらのポテンシャルに関して，次の Lorentz 条件が成立しなければならない。(なぜかは，従来の理論では簡単ではない。)

◇電磁的 Lorentz 条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi = 0 \tag{2.16}$$

◇磁電的 Lorentz 条件

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^* + \frac{1}{c^2}\partial_t \Phi^* = 0 \tag{2.17}$$

上記，二つの Lorentz 条件が成立していれば，ベクトル代数にもとづき，Maxwell の方程式を変形して行くことによって，次のポテンシャル波動方程式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\Phi+k^2\Phi &= 0 \quad &\text{(a)}\\ \nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A} &= 0 \quad &\text{(b)}\end{aligned}\right\}\quad (2.18)$$

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\Phi^*+k^2\Phi^* &= 0 \quad &\text{(a)}\\ \nabla^2\mathbf{A}^*+k^2\mathbf{A}^* &= 0 \quad &\text{(b)}\end{aligned}\right\}\quad (2.19)$$

ただし，$\mathbf{A}$ が定方向を向くベクトルでない場合は，ベクトルに作用する ∇^2 演算子（ベクトル Laplacian）を下記のごとくに定義する。

$$\nabla^2\mathbf{A} \equiv \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{A} \quad (2.20)$$

この公式は，$\mathbf{A}$ ばかりでなく，一般の 3 次元ベクトルに適用する。

また，k は真空中の TEM 波の位相定数であり，

$$k = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{\omega}{c} \quad (2.21)$$

である。

Hertz ベクトルに関して，自由空間の Maxwell 方程式に対応するベクトル波動方程式は，

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\boldsymbol{\Pi}_e+k^2\boldsymbol{\Pi}_e &= 0 \quad &\text{(a)}\\ \nabla^2\boldsymbol{\Pi}_m+k^2\boldsymbol{\Pi}_m &= 0 \quad &\text{(b)}\end{aligned}\right\}\quad (2.22)$$

Hertz ベクトルと電磁場の直接の関係式は，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_e)+k^2\boldsymbol{\Pi}_e-j\omega\mu_0\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_m \quad &\text{(a)}\\ \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_0\nabla\times\boldsymbol{\Pi}_e+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_m)+k^2\boldsymbol{\Pi}_m \quad &\text{(b)}\end{aligned}\right\}\quad (2.23)$$

なお，上述の $j\omega$ があらわれるすべての式において，

$$j\omega \;\rightarrow\; \partial_t$$

と書きかえると，実数のみの関係式に，いつでも移行できる。また，私は，$\boldsymbol{\Pi}_e, \boldsymbol{\Pi}_m$ と $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ の直接の関係式を重視していない（ $\Phi, \mathbf{A}$ 等を本質的量と考える）が，従来の理論を論ずるためには，(2. 23) 式は必要である。

2. 2. Hertz ベクトル波動方程式の解

(2. 22) 式を解くことができれば，私の考えは，(2. 10)，(2. 11) 式を経て，(2. 15) 式より，または (2. 23) 式より直接に，電磁場の成分 $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ が定まる。(2. 22) 式において，$\boldsymbol{\Pi}_e, \boldsymbol{\Pi}_m$ を $\boldsymbol{\Pi}$ と書きなおすと，

$$\nabla^2\boldsymbol{\Pi}+k^2\boldsymbol{\Pi} = 0 \quad (2.24)$$

ここで，スカラ f を，次の Helmholtz 方程式の解であるとする。

$$\nabla^2 f+k^2 f = 0 \quad (2.25)$$

このとき，(2. 24) 式の解として，次の 5 つが知られている。[9]

ただし，$\boldsymbol{a}$ は定ベクトル，$\boldsymbol{r}$ は径ベクトルである。

$\boldsymbol{\Pi}$:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{K} &= \boldsymbol{a}f \quad &\text{(a)}\\ \mathbf{L} &= \nabla f \quad &\text{(b)}\\ \mathbf{M}_a &= \nabla\times\boldsymbol{a}f \quad &\text{(c)}\\ \mathbf{M}_r &= \nabla\times\boldsymbol{r}f \quad &\text{(d)}\\ \mathbf{N}_a &= \frac{1}{k}\nabla\times\mathbf{M}_a \quad &\text{(e)}\\ \mathbf{N}_r &= \frac{1}{k}\nabla\times\mathbf{M}_r \quad &\text{(f)}\end{aligned}\right\}\quad (2.26)$$

なお，(2. 24) 式は，数学的には，2 階の線形斉次微分方程式であるから，線形独立な解が二

つあり，導波管内の電磁場であれば，各々 TE モードと TM モードの電磁場に対応する。その源は，やはり，2階の斉次微分方程式である (2.25) 式の解が二つあるからである。しかし，本論文においては，混乱のおそれのないかぎり，(2.25) 式の解を，ただひとつの文字 f で表わしている。二つのモードを区別しなければならないときは，添字をつけて，$f_{\mathrm{TE}}, f_{\mathrm{TM}}$ のように表記する。

なお，導波管の問題においては，しばしば，スカラ f の代りに，電磁界の縦方向の成分 $\mathrm{H}_z, \mathrm{E}_z$ が用いられる。これで，通常の用途には，正しい解が得られる理由は，TE モードまたは TM モードのどちらか一方のみが存在する場合，

$$\mathrm{H}_z \propto j\omega f_{\mathrm{TE}} \tag{2.27}$$

$$\mathrm{E}_z \propto j\omega f_{\mathrm{TM}} \tag{2.28}$$

であるからである。すなわち，TE モードの H_z および TM モードの E_z は (2.25) 式を満たす。

しかし，3次元のみの解析においても，ベクトルとスカラは，物理哲学の見地から区別すべきである。

3. 正常 Riemann 時空における波動方程式

この章においては，我々の時空が，4次元正常 Riemann 空間であるとしたら，波動方程式は，いかにして得られるか論ずる。

3.1 Einstein の擬似基本テンソル

4次元正常 Riemann 時空において，スカラ波動方程式を得る，もっとも安易な方法は Einstein の擬似基本テンソル[4] を導入する方法である。

本論文では，せいぜい太陽系の近傍程度のひろがり内でしか，電磁波論を展開しないので，文献(4)で論じた「源時空」と「実時空」のちがいは省略する。

静止系の基本テンソルを $\zeta_{\mu\nu}$ とする。

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} h_0^2, & & & \mathbf{0} \\ & h_1^2, & & \\ & & h_2^2, & \\ \mathbf{0} & & & h_3^2 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

ただし，h_μ は測度係数であり，h_0 はほとんどすべての場合1に等しくとるのが，ふつうである。

静止系時間軸反転テンソルを Δ_ν^μ とすると，

$$\Delta_\mu^\nu = \begin{bmatrix} -1, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

である。

このとき，Einstein の疑似基本テンソルは，

$$g_{\mu\nu} = \Delta_\nu^\rho \zeta_{\mu\rho} = \Delta_\mu^\rho \zeta_{\rho\nu} \tag{3.3}$$

ただし，テンソルの縮約に関して「Einstein の省略記法」を採用した。このとき，従来のスカラ波動方程式は，

$$g^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f = 0 \tag{3.4}$$

ここで，

D_μ: x^μ 座標に関する共変微分演算子

である。

この理論が合理的であるためには，静止系において，

$$\left.\begin{aligned}\zeta_{0\mu} &= 0 \quad (\mu \neq 0) && \text{(a)}\\ \zeta_{\nu 0} &= 0 \quad (\nu \neq 0) && \text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

でなければならない。これは，実時空では太陽系の近傍であれば，相対誤差 10^{-10} 以下で満足される。[4] また，Δ_μ^ν の形が (3. 2) 式で表現できるのは，静止系の内に限られる。

以上の案にしたがい，Lagrangean を $g^{\mu\nu}$ を含む形に作り上げると，電磁場の方程式は，全く変更を要しない。故に，この理論が正しいと言う主張は，さしあたり，何の不都合も生じないのであるが，従来の理論とどこが異なるのか，実験的に確かめる方法は Maxwell の方程式にもとづく現象に関する限り存在しない。

今，判明している難点は，変分法における，汎関数を $\zeta^{\mu\nu}$ にとると，エネルギテンソル $\mathrm{T}_{\mu\nu}$ が，対称テンソルではなくなる点である。(重力場のエネルギテンソルについては，文献(4)で述べた。電磁場のエネルギテンソルについては，未発表であるが，やはり同じようなことになる。)

3. 2　正常 Riemann 時空における波動方程式

以前に，H. Yilmaz との論争において，4 次元正常 Riemann 空間における斉次スカラ方程式

$$\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f = 0 \tag{3.6}$$

には，波動解はないと述べたが，その後の検討により，それは誤りであることが判明した。空間部分が，円筒座標系の場合，すなわち，

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \varphi, z) \tag{3.7}$$

であるとき，スカラ関数 f を，次のように変数分離する。

$$f = \boldsymbol{R}(\mathrm{r}) \cdot \boldsymbol{\Phi}(\varphi) \cdot \boldsymbol{P}(x^0, \mathrm{z}) \tag{3.8}$$

ただし，

$\mathbf{R}(r)$: r のみの関数

$\mathbf{\Phi}(\varphi)$: φ のみの関数　$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ (m\varphi)$

$\mathbf{P}(x^0, z)$: 伝播を表わす関数　$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ (kx^0 - kz)$

とすると，変数分離後の r 座標に関する微分方程式は，

$$\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} - \left(2k^2 + \frac{m^2}{r}\right)\mathbf{R} = 0 \tag{3.9}$$

となる。

この式の解は，あきらかに，変形ベッセル関数 $\mathrm{K}_n(\sqrt{2}\,kr), \mathrm{I}_n(\sqrt{2}\,kr)$ である。[10] つまり，(3. 6) 式には，円筒座標系の伝播解があるのであり，何か光速で飛行する粒子に対応するのではないかと考えられる。

しかし，この解は，我々のよく知っている各種の導波管内の電磁場には対応しないことは明白である。

4 次元正常 Riemann 空間内において，(3. 6) 式の次に簡単なスカラ微分方程式は，次の形の固有値型非斉次方程式である。

$$\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f = \eta f \tag{3.10}$$

ただし，ここで η は固有値である。

ここで，f が伝播因子 $\exp\,(j(kx^0 - kz))$ を含むとすれば，静止座標系において，

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \zeta^{ij} D_i D_j f - k^2 f = \eta f \tag{3.11}$$

もしも，

$$\eta = -2k^2 \tag{3.12}$$

であれば,

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \zeta^{ij} D_i D_j f + k^2 f = 0 \tag{3.13}$$

(3. 13) 式は, 静止系内で, 数値的に (3. 4) 式と等価である。すなわち, 従来の形のスカラ波動方程式が得られた。

3. 3　正常 Riemann 空間化によって生ずる問題点

変分法によってエネルギテンソル $T_{\mu\nu}$ を求める過程を考えると,「Einstein 擬似基本テンソル」のような量は, 導入しない方が無難である。したがって, スカラ波動方程式としては, (3. 10) 式の方が有望であるが, 4 次元ベクトルポテンシャル, 電磁場の各成分と計算が進んだ場合の問題点を予見すると次のごとくになる。

(1)　Maxwell の方程式の符号のねじれがあるとは思えない。

(2)　電荷・電流の存在する場合に拡張したときに, 電荷保存の法則が成立しない。

この二つの点は, いずれも, 従来の常識にしたがえば, ここで, この企画を放棄するに充分な理由となる。しかし, 私は熟慮の結果, この案 ((3. 10)～(3. 13) 式) を検討した方が, 意義が大きいと言う結論に達した。(「Einstein の擬似基本テンソル」案に戻るのは, いつでもたやすいのである。)

上記(1)は, Maxwell の方程式を書き変えることを意味し,「火あぶりの刑」にされかねない程の批判を受けることになるであろう。

彼等 (私に対する批判者) の言い分は, Maxwell の方程式は「100万回」も, 実験で確認されたと言う点にある。私も, 実験物理学者は, それほど「うかつ」ではないと思う。しかし次のような可能性はないだろうか？

(2. 5) 式において, $\boldsymbol{i}=0$ としてから, 次のように書きなおす ($\partial_t \mathbf{D}$ の前の符号を反転させる)

$$\nabla \times \mathbf{H} + \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{S} \tag{3.14}$$

ただし, $\mathbf{S}$ は未知のベクトルである。

$$\therefore \quad \nabla \times \mathbf{H} + (\partial_t \mathbf{D} - \mathbf{S}) = 0 \tag{3.15}$$

もし, 常に

$$\partial_t \mathbf{D} - \mathbf{S} = -\partial_t \mathbf{D} \tag{3.16}$$

つまり,

$$\mathbf{S} = 2\partial_t \mathbf{D} \tag{3.17}$$

であれば, 実験結果を尊重しつつ符号のねじれを解消できる。(静止系においては, $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$ は, むきも値も従来の理論と同じである。) 残った問題点は, 我々の太陽系が, 300 km/sec 程度の絶対速度を持っていることは確実であり, その影響は (3. 14) 式にあらわれるだろうと言う点である。彼等は, そこまで確認したろうか。

Mickelson-Morley 型の実験から Lorentz 変換が, 発見されたのであるが, 逆に言うと等速で運動する座標系間の座標変換が, Lorentz 的 (いわゆる Lorentz 変換と, 4 軸すべてに均等の伸縮変換の合成) でありさえすれば, この実験結果は説明できる。

(2)について論ずると, 単純に従来の理論を延長すれば,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{i} = 0 \tag{3.18}$$

となる。これは, 非常に変な式であり, 無理なこじつけをあきらめると, $\rho, \boldsymbol{i}$ そのものの存在を放棄せざるを得ない。すなわち, $\rho, \boldsymbol{i}$ はその定義からして, マクロな量 (電子の粒子密度と流量密度) であり, ミクロには存在しないと考える。(3. 14) とおく見地からも, $\mathbf{S}$ の位置に余分な

ベクトルはない方が，理論は簡単なのである。したがって，従来の4次元電流ベクトル（$c\rho, i^1, i^2, i^3$）は，いかなる場合も存在せず，代りに今のところ未知の4次元ベクトル（s^0, s^1, s^2, s^3）が，その位置にあると推定される。マクロな電気磁気学は，別に考慮する必要があるのではないか？

4. 4次元 Riemann 時空における Maxwell の方程式

4.1 従来の Maxwell の方程式

Maxwell の方程式は，はじめ3次元の式として発表された。現在のような便利な単位系は存在せず，「何が実験式で，何が理論式か？」判然としない状況の中で，水力学で発達した応用数学を取り入れ，ひとつの体系にまとめあげた Maxwell の業績（1861年）は実に偉大である。

彼は，当時の実験結果が，今の単位系で表記すると（以下同様）

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \boldsymbol{i} \tag{4.1}$$

しか示していないのに，変位電流の項をつけ加え，

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{4.2}$$

とした。

このため，彼は電磁場の成分で波動方程式を作ることができ，その波動の伝播速度は数値計算すると，光速に非常に近かった。（光速は，すでに天文学上の観測や，高速回転する歯車状シャッターによって測定されていた。）彼は，この段階で光を電磁波であると断定した。つまり，光の電磁波説の発表と電磁波の存在の予言が，同時に行なわれた。

その後，Einstein 等によって，(4.2) 式は（変位電流の項を左辺に移動し）

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \boldsymbol{i} \tag{4.3}$$

とされたが，特別な変更は加えられなかった。一方，もうひとつのベクトル方程式は，

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0 \tag{4.4}$$

であった。第2章，第3章で述べたように，この符号のねじれ（∂_t の前の符号のちがい）は，Einstein まで持ちこされた。したがって，Einstein の4次元時空は，「異常 Riemann 空間」にならざるを得なかった。

以下において，簡単のため当分の間，空間座標はデカルト系であるとする。

Einstein は，虚数を採用する Minkovski 時空をとおるまわり道をした後，次のような基本テンソルを持つ4次元異常 Riemann 空間にたどりついた。（4次元異常 Riemann 空間においては，実空間で正の値をとる4次元ベクトルの成分の符号を，数式上は空間成分か時間成分のどちらか一方をマイナスにしなければならない。どちらをとるかで2通り。時間軸を0番目にするか4番目にするかで，合計4通りの表記法がある。以下の表記法を，私は「平川－Weber 型」と称している。）

Einstein の基本テンソルは，（x^0, x, y, z）系において（重力場のない場合）

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

である。

電磁場のベクトルポテンシャル A_μ は，

$$A_\mu = \left(-\frac{\Phi}{c}, \mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z \right) \tag{4.6}$$

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu}$$
$$= \left(\frac{\Phi}{c}, \mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z\right) \tag{4.7}$$

sign (x) を x の符号を表わす関数とすると,

$$\mathrm{sign}\ (A_0) = -\mathrm{sign}\ (A^0) \tag{4.8}$$

であることに注意しなければならない。

電磁場の共変テンソルは,

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$$
$$= \begin{bmatrix} 0, & -\mathrm{E}_x/\mathrm{c}, & -\mathrm{E}_y/\mathrm{c}, & -\mathrm{E}_z/\mathrm{c} \\ \mathrm{E}_x/\mathrm{c}, & 0, & \mathrm{B}_z, & -\mathrm{B}_y \\ \mathrm{E}_y/\mathrm{c}, & -\mathrm{B}_z, & 0, & \mathrm{B}_x \\ \mathrm{E}_z/\mathrm{c}, & \mathrm{B}_y, & -\mathrm{B}_x, & 0, \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

(μ 列 ν 行表示)

電磁場の反変テンソルは,

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$$
$$= \begin{bmatrix} 0, & \mathrm{E}_x/\mathrm{c}, & \mathrm{E}_y/\mathrm{c}, & \mathrm{E}_z/\mathrm{c} \\ -\mathrm{E}_x/\mathrm{c}, & 0, & \mathrm{B}_z, & -\mathrm{B}_y \\ -\mathrm{E}_y/\mathrm{c}, & -\mathrm{B}_z, & 0, & \mathrm{B}_x \\ -\mathrm{E}_z/\mathrm{c}, & \mathrm{B}_y, & -\mathrm{B}_x, & 0, \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

(μ 列 ν 行表示)

(4. 9), (4. 10) 式を比較すると, 符号のねじれの効果は, **E** の各成分に対応する項にあらわれる。Maxwell-Einstein 体制の理論では, このねじれは, まさに必要だったのである。

3 次元の Maxwell の方程式の片方の組,

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 && \text{(a)} \\ \nabla\times\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} &= 0 && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

は, (4. 9) 式の $F_{\mu\nu}$ の定義によって, Riemann 幾何学上の恒等式である。あまり, 以下のような書き方はしないが, Levi-Civita の記号[11] を使用すると, (4. 11) 式は,

$$e^{\mu\nu\varrho\lambda} \partial_{\nu} F_{\varrho\lambda} = 0 \tag{4.12}$$

となる。(右辺=0 であるため, Levi-Civita の記号の成分の符号が, Riemann 空間が正常か異常かによって左右されることは考慮しなくともよい。)

3 次元の Maxwell の方程式のもう一方の組は,

$$\left.\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{D} &= \rho && \text{(a)} \\ \nabla\times\mathbf{H} - \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} &= \boldsymbol{i} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

この式は, 4 次元では,

$$D_{\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 i^{\mu} \tag{4.14}$$
$$i^{\mu} = (\mathrm{c}\rho, \mathrm{i}_x, \mathrm{i}_y, \mathrm{i}_z) \tag{4.15}$$

となる。

なお, Lorentz 条件は,

$$D_{\mu} A^{\mu} = 0 \tag{4.16}$$

上式を 3 次元理論で書くと,

$$\frac{1}{c^2} \partial_t \Phi + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{4.17}$$

となる。

4. 2 従来の Maxwell の方程式にみあう Hertz テンソル

(2. 10) 式のすなおな 4 次元化は，二階の反対称テンソルを，次のように定義することである。

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0, & -\Pi_e^1/c, & -\Pi_e^2/c, & -\Pi_e^3/c \\ \Pi_e^1/c, & 0, & 0, & 0 \\ \Pi_e^2/c, & 0, & 0, & 0 \\ \Pi_e^3/c, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

(μ 行 ν 列表示)

そして，4 次元電磁ポテンシャル A^μ を，

$$A^\mu = D_\nu \Pi^{\mu\nu} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} A^\mu &= (A^0, A^1, A^2, A^3) \\ &= \left(\frac{\Phi}{c}, A^1, A^2, A^3\right) \end{aligned} \tag{4.20}$$

(4. 18) 式を見ると，$\Pi^{\mu\nu}$ の空間—空間成分として，2 階の反対称テンソル，すなわち，3 次元理論のいわゆる軸性ベクトルを入れる余地がある。これが，磁気型 Hertz ベクトルに対応すると考えるのが自然である。

以上のごとく，現在の 4 次元理論によれば，磁電ポテンシャルの入る余地はなく，電磁場のテンソルからの類推により，3 次元理論の Hertz ベクトルの対は，2 階の反対称テンソル (six-vector) の成分と解される。

$$\therefore \quad \Pi^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0, & -\Pi_e^1/c, & -\Pi_e^2/c, & -\Pi_e^3/c \\ \Pi_e^1/c, & 0, & \Pi_m^3, & -\Pi_m^2 \\ \Pi_e^2/c, & -\Pi_m^3, & 0, & \Pi_m^1 \\ \Pi_e^3/c, & \Pi_m^2, & -\Pi_m^1, & 0 \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

(μ 行 ν 列表示)

$\Pi^{\mu\nu}$ を電磁的 Hertz テンソルと名付ける。

かくして，

$$A^k = D_\mu \Pi^{k\mu} \tag{4.22}$$

とおけば，Riemann 幾何学の二階の反対称テンソルに関する定理から，Lorentz 条件は自動的にみたされる。

すなわち，

$$\Pi^{\mu\nu} = -\Pi^{\nu\mu} \tag{4.23}$$

であれば，

$$D_\mu A^\mu = D_\mu D_\nu \Pi^{\mu\nu} = 0 \tag{4.24}$$

上式は，重力場が存在する場合でも成立する恒等式である。

Hertz テンソル $\Pi^{\mu\nu}$ の成分と，三次元理論の，二つの型の Hertz ベクトルの成分との関係は，

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1, & & & \mathbf{0} \\ & h_1^2, & & \\ & & h_2^2, & \\ \mathbf{0} & & & h_3^2 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

のとき，

$$\Pi_{e,k} = [h_k \Pi_e^k] \tag{4.26}$$

ただし，$k = 1, 2, 3$ であるが，Einstein の省略記法ではない（和をとる操作ではない）ことを示すため，かぎカッコをつけた。

同様にして，

$$\Pi_{m,k} = \left[\frac{\ddot{\sqrt{-g}}}{h_k}\Pi_m^k\right] \tag{4. 27}$$

（なお，$\sqrt{-g}$ の上につけた二つのドットは文献(11)参照）

一般に，2階の反対称テンソルの成分と，いわゆる軸性ベクトルの成分の関係は，かなり複雑である。

以上の理論を Nisbet は，3次元形式で記述している。すなわち，時間因子を exp $(j\omega t)$ で書きかえ（彼は単位虚数を i としている），SI（国際単位系）で表記すれば，

$$\Phi = -\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_e \tag{4. 28}$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c^2}\partial_t\mathbf{\Pi}_e + \mu_0\nabla\times\mathbf{\Pi}_m \tag{4. 29}$$

ただし，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{\Pi}_e &= (\Pi_{e,1}, \Pi_{e,2}, \Pi_{e,3}) \quad &\text{(a)}\\ \mathbf{\Pi}_m &= (\Pi_{m,1}, \Pi_{m,2}, \Pi_{m,3}) \quad &\text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{4. 30}$$

以上の式より，電磁場の量 $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ は，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t\mathbf{A} \quad &\text{(a)}\\ \mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} \quad &\text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{4. 31}$$

以上より，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_e) + k^2\mathbf{\Pi}_e - j\omega\mu_0\nabla\times\mathbf{\Pi}_m \quad &\text{(a)}\\ \mathbf{H} &= j\omega\varepsilon_0\nabla\times\mathbf{\Pi}_e + \nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi}_m \quad &\text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{4. 32}$$

ここで，ベクトル Laplacian の式 (2. 20) を $\mathbf{\Pi}_m$ に適用し，

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_m = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_m) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi}_m \tag{4. 33}$$

を考慮に入れると，(4. 32) 式は (2.23) 式と全く等価であるように見える。(Nisbet もそう考えたらしい。) しかし，両式が等価であるためには，

$$\nabla^2\mathbf{\Pi}_m + k^2\mathbf{\Pi}_m = 0 \tag{4. 34}$$

である必要がある。

ところが，第2章の $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}, f$ の組合せにおいて，

$$\mathbf{\Pi}_m = \boldsymbol{r}f$$

は，この式をみたさない。もともと，この形の解は (2. 24) 式つまり (4. 34) 式にはないのである。

$$\nabla^2(\boldsymbol{r}f) + k^2(\boldsymbol{r}f) = 2\nabla f \fallingdotseq 0 \tag{4. 35}$$

その代り，

$$\mathbf{A} = \nabla\times(\boldsymbol{r}f) \tag{4. 36}$$

が，

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0 \tag{4. 37}$$

をみたすのである。

つまり，

$$\mathbf{\Pi}_m = \boldsymbol{r}f \tag{4. 38}$$

は，Hertz ベクトルに関する波動方程式の解ではないが，それを (4. 29) に代入して得られるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は，ベクトルポテンシャルに関する波動方程式の解である。これは，三次元 Hertz ベクトル理論と，4次元 Hertz テンソル理論の3次元表示が，完全には同じでないために，おこったことである。

ところで，Nisbet は，(4. 32) 式を見て，

$$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{\Pi}_e) + k^2\mathbf{\Pi}_e \rightarrow \nabla\times\nabla\times\mathbf{\Pi}_e$$

と考え,

$$\mathbf{\Pi}_e = \boldsymbol{r}f \tag{4.39}$$

を (4.28) 式に代入して得られる Φ, $\mathbf{A}$ が, 波動方程式 (2.18) をみたすと錯覚してしまった。これは, もちろん正しくない。このような, まちがいをおかしたもうひとつの理由は, 彼が, 波動方程式が非斉次の場合（波源のある場合）について, 扱ったためであろう。

つまり, 彼の取扱った問題は右辺 $\neq 0$ であっても, よかったのである。

なお,

$$\mathbf{\Pi}_e = \nabla \times \boldsymbol{r}f \tag{4.40}$$

は, 正しい Hertz ベクトルであることは, まちがいない。

〔注〕これに関連して, 文献(1)における, Conical Horn の TM モードの解が, 従来の 4 次元理論には含まれていないと言う主張は, まちがっている。この解は, (4.40) にあたる Hertz ベクトルから得られる。しかし, 文献(1)で述べている創成テンソル理論では, これを扱うことはできない。一般に, 第 2 章の Hertz ベクトルの解のうち, かなりの部分が, 文献(1)の方法では, 扱うことができない。このことは, 同論文の中で, 具体的に述べているが, Conical Horn の電磁場に対応する Hertz ベクトルが, 取り扱い不能の例にまぎれこんでいることに気がつかなかったのである。〔注〕終り

5. 正常 Riemann 時空における Maxwell の方程式

5.1 ベクトルポテンシャルと Hertz テンソル

4 次元理論の 3 次元表現において, ベクトル波動方程式の解ではない磁気型 Hertz ベクトルが, ベクトル波動方程式をみたすベクトルポテンシャルをもたらすことを見た。

よって, Hertz テンソルを, Hertz ベクトルに分解して論ずるのは得策ではなく, Hertz テンソルから, 直接ベクトルポテンシャルを得るように理論化すべきである。

すなわち, Hertz テンソル $\Pi^{\mu\nu}$ と A^μ の関係は,

$$A^\mu = D_\nu \Pi^{\mu\nu} \tag{5.1}$$

Hertz ベクトルと縁が切れたことにより, 必ずしも, $\Pi^{\mu\nu}$ は反対称である必要はない。

$$D_\mu A^\mu = 0 \tag{5.2}$$

のためには,

$$\Pi^{\mu\nu} = \Pi^{\nu\mu} \tag{5.3}$$

であれば充分であるが, 必要ではない。

第 3 章で述べたごとく, $\rho, \boldsymbol{i}$ はマクロにしか存在しないものとして切りすてると, 電荷と電場の間に働く力と, 仕事量より定義されるスカラポテンシャルも, その意義があやしくなる。A^μ, A_μ の時間成分は, A^0, A_0 としておくだけでよいようにおもわれるが, 従来の理論との対比上, 一応, Φ との関係をつけておく。

静止系において, 基本テンソルを

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} h_0^2, & & & \mathbf{0} \\ & h_1^2, & & \\ & & h_2^2, & \\ \mathbf{0} & & & h_3^2 \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

とする。ただし,

$$h_0 = 1 \tag{5.5}$$

としてよいであろう。正常 Riemann 時空においては,

$$\mathrm{sign}\ (A^0) = \mathrm{sign}\ (A_0) \tag{5.6}$$

であるから，場を作るスカラポテンシャルと，Lorentz 条件に表われるスカラポテンシャルの符号を一致させることはできない。

もし，

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \partial_t \mathbf{A} && \text{(a)} \\ \mathbf{B} &= \nabla\times\mathbf{A} && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

を優先させるならば，

$$[A^0] = [A_0] = \left[-\frac{\Phi}{c}\right] \tag{5.8}$$

ただし，かぎカッコは数値を表わす。(テンソル式ではないことを示す)

よって，Lorentz 条件 (5. 2) 式の 3 次元表現は，

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \tag{5.9}$$

となる。

この式をみても，スカラポテンシャルを，3 次元理論のそれに，無理にむすびつける必要はなさそうである。

5. 2 Maxwell の方程式

以下においては，また，しばらくの間静止系で，かつ，空間がデカルト系の場合に限る。

$$\therefore\quad h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = 1 \tag{5.10}$$

$F_{\mu\nu}$ は，の成分は，第 4 章と全く同じである。一方，反変テンソル $F^{\mu\nu}$ は，

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0, & -\mathrm{E}_x/\mathrm{c}, & -\mathrm{E}_y/\mathrm{c}, & -\mathrm{E}_z/\mathrm{c} \\ \mathrm{E}_x/\mathrm{c}, & 0, & \mathrm{B}_z, & -\mathrm{B}_y \\ \mathrm{E}_y/\mathrm{c}, & -\mathrm{B}_z, & 0, & \mathrm{B}_x \\ \mathrm{E}_z/\mathrm{c}, & \mathrm{B}_y, & -\mathrm{B}_x, & 0 \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

つまり，符号のねじれはなく，$F_{\mu\nu}$ と同じ形である。

第3章で述べたごとく，自由空間（すなわち $\rho = 0, \boldsymbol{i} = 0$ ）においても，第 3 章で述べたごとく，右辺はゼロベクトルではない。

$$D_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 S^\mu \tag{5.12}$$

実験物理学者の言うことが正しければ，彼等の実験した範囲では，3 次元の式，

$$\mathbf{S} = 2\partial_t \mathbf{D} = 2\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \tag{5.13}$$

が成立しているべきである。

この議論が，つじつまがあうためには，実験物理学者が観測した範囲（電磁波のみか？）で，

$$[A_0] = [A^0] = 0 \tag{5.14}$$

でなければならない。($F^{00} = 0$ であるから)

従来の理論で，方形導波管の TE モードの電磁場をもたらす Hertz テンソルは，

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & f, & 0 \\ 0, & -f, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \tag{5.15}$$

である。[12] これは，f を，

$$\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu f = -2k^2 f \tag{5.16}$$

の解であるとすれば，正常 Riemann 空間論にそのまま利用できる。

この場合，(5. 1) 式より，

$$\left.\begin{array}{l} A^0 = A^3 = 0 \\ A^1 = \partial_2 f = f_2 = f_y \\ A^2 = -\partial_1 f = -f_1 = -f_x \end{array}\right\} \quad (5.17)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_x &= cF_{10} \\ &= -c\partial_0 A_1 \\ &= -cf_{20} \\ &= [-\partial_t A_1] = [-\partial_t A^1] \quad (5.19) \\ &\because \quad f_{20} = \partial_0\partial_2 f \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_y &= cF_{20} \\ &= cf_{10} \\ &= [-\partial_t A_2] = [-\partial_t A^2] \quad (5.20) \\ &\because \quad f_{10} = \partial_0\partial_1 f \end{aligned}$$

$$\mathrm{E}_z = 0 \quad (5.21)$$

ここで，第3章（3. 14）式より，3次元ベクトル $\mathbf{S}$ について，

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= 2\partial_t \mathbf{D} \\ &= 2\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \\ &= -2\varepsilon_0 \partial_t^2 \mathbf{A} \quad (5.22) \end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z) &= (A^1, A^2, A^3) \\ &= (A_1, A_2, A_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathbf{S} &= -2\varepsilon_0 c^2 \partial_0^2 \mathbf{A} \\ &= 2\varepsilon_0 c^2 k^2 \mathbf{A} = 2\frac{k^2}{\mu_0}\mathbf{A} \quad (5.23) \end{aligned}$$

ここで，$\mathbf{A}$ は $exp(j(kx^0-\beta z))$ なる因子を含むとした。

よって，この TE モードの例では，（5. 12）式より，

$$D_\mu F^{k\mu} = 2k^2 A^k \quad (5.24)$$

（5. 24）式の右辺は Lorentz 条件の成立するとき $-\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu A^k$ に等しい。[13]（文献(13)の計算法は，形式的に $g_{\mu\nu} \to \zeta_{\mu\nu}$ とおきかえても成立する）

よって，

$$\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu A^k = -2k^2 A^k \quad (5.25)$$

つまり，スカラ f をみたす固有方程式と同じ形の微分方程式が，ベクトルポテンシャル A^k についても成立しなければならない。

（5. 24）が成立すれば（これは恒等式ではない。電磁場を制約する式である。）反対称テンソルに関する Riemann 幾何学の定理より，

$$D_\mu A^\mu = 0 \quad (5.26)$$

でなければならない。これで，Lorentz 条件の意味が，きわめて明確になった。

以上は，TE モードに関する一考察なのであるが，この式は一般的に成立してしかるべき形をしている。

つまり，推定によれば，修正された Maxwell の方程式は，4次元正常 Riemann 時空においては，

$$D_\nu F^{\mu\nu} = 2k^2 A^\mu \quad (5.27)$$

これと等価な，ベクトルポテンシャルに関する波動方程式は，

$$\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu A^k = -2k^2 A^k \tag{5.28}$$

ただし，(5. 27) より恒等的に，

$$D_\mu A^\mu = 0 \tag{5.29}$$

であるべきである。

4 時元理論の 3 次元表示は，重要な式なので再び書くと，

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \mathbf{E}+\partial_t \mathbf{B} &= 0 && \text{(a)} \\ \mathrm{div}\ \mathbf{B} &= 0 && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{5.30}$$

これは変更はない。もう一組の式は，

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{rot}\ \mathbf{H}+\partial_t \mathbf{D} &= 2\frac{k^2}{\mu_0}\mathbf{A} && \text{(a)} \\ -\mathbf{c}\ \mathrm{div}\ \mathbf{D} &= 2\frac{k^2}{\mu_0}\left(-\frac{\Phi}{c}\right) \\ &= -2k^2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\Phi \\ &= 2\frac{k^2}{\mu_0}A_0\left(\because\ \ c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}\right) && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{5.31}$$

この変更によって，電磁波に関するかぎり実験事実に矛盾せずに，正常 Riemann 時空に Maxwell の方程式を構築できると考えられる。

5. 3 TM モードの場合

従来の Hertz テンソル理論によれば，TM モードの電磁場をもたらす，Hertz テンソルは，

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & f \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ -f, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

しかし，これによれば，

$$A^0 \neq 0 \tag{5.33}$$

となり，前節の手法は使用できない。磁電ポテンシャル（$\Phi^*, \mathbf{A}^*$）を 4 次元化し，電場と磁場を完全に対称にすれば，今度は前節の手法は，そのまま応用できる。しかし，それは問題をかなり複雑にする。

ここで，前にふれたように，

$$\Pi^{\mu\nu} \neq \Pi^{\nu\mu} \tag{5.34}$$

とすれば，電磁ポテンシャルでも何とかできる。

すなわち，方形導波管の TM モードについて，

$$\Pi^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -f, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -f, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dfrac{k_x^2+k_y^2}{\beta^2}f \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

ただし，

$$f = \mathrm{K}\ \sin\left(k_x x\right)\sin\left(k_2 y\right)\sin\left(kx^0-\beta z\right) \tag{5.36}$$

$$\because\quad \mathrm{K} = \mathrm{const.}$$

とすれば，

$$
\left.\begin{aligned}
A^0 &= 0 \\
A^1 &= -\partial_1 f = [A_1] \\
A^2 &= -\partial_2 f = [A_2] \\
A^3 &= \frac{(k_x^2+k_y^2)}{\beta^2}\partial_3 f = [A_3]
\end{aligned}\right\} \tag{5.37}
$$

$$
\begin{aligned}
D_\mu A^\mu &= -\partial_1^2 f - \partial_2^2 f + \frac{k_x^2+k_y^2}{\beta^2}\partial_3^2 f \\
&= \left\{k_x^2+k_y^2+\frac{k_x^2+k_y^2}{\beta^2}(-\beta^2)\right\} f \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.38}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B}_3 &= \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \\
&= -\partial_1\partial_2 f + \partial_2\partial_1 f = 0
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

である。実際に，方形導波管の TM モードの電磁場を調べると,[14] (5. 35)～(5. 37) は，妥当であることがわかる。

また,

$$
\mathrm{E}_x = -\partial_t \mathrm{A}_x = -\mathrm{c}\partial_0 \mathrm{A}_x \qquad \text{etc.} \tag{5.40}
$$

であるから,

$$
\mathbf{S} = 2\frac{k^2}{\mu_0}\mathbf{A} \tag{5.41}
$$

は成立する。

したがって,

$$
\zeta^{\mu\nu} D_\mu D_\nu A^k = -2k^2 A^k \tag{5.42}
$$

も問題なく成立するが，この式は (5. 36) 式をみると,

$$
k_x^2+k_y^2+\beta^2 = k^2 \tag{5.43}
$$

より，自明である。

6. お わ り に

方形導波管の電磁場からの推定により,「Einstein の擬似基本テンソルを使用せずに，電磁場の方程式を正常 Riemann 空間に構築できた。現在のところ，これはひとつの案にしかすぎない。正常 Riemann 時空においては，静止系以外は (x^0, x, y, z) 系といえども，デカルト座標系にはならない。我々の太陽系の膨張する宇宙に対する相対速度は 300 km/sec と推定される。これは，基本テンソルの時間空間成分の最大の項が 10^{-3} 程度あることを示している。これは，現在の技術で検出可能であると考えられる。逆に言うと，実験物理学者は，これに，本当に気付いていないのか，非常に疑問である。もし，検出できないとしたら,「Einstein の擬似基本テンソル」に戻らざるを得ない。

〔完〕

〔参 考 文 献〕

(1) 村田茂昭「Hertz テンソル解析の問題点」 電気学会電磁会理論研究会資料 EMT-88-147 (1988. 10. 8)

……本論文上に示すように，上記資料には，明白な誤りがあるが，Maxwell-Einstein 理論体系内における，Hertz ベクトルと Hertz テンソルの関係は，書かれている範囲内では正しい。

(2) A. Nisbet "Hertzian electromagnetic potentials and associated gauge transformations", Proc. Roy. Soc. 231A pp. 250～263 (1955).
(3) 村田「四次元時空の基本テンソルと重力場の四次元スカラの関係について――H. Yilmaz's 1958 理論の再検討――」 札幌大学女子短期大学部紀要　第21号　pp. 21～28 (1993. 3. 28).
(4) 村田「H. Yilmaz の 1958 年理論の正常 Riemann 空間への書きなおし（Ⅰ）」 札幌大学女子短期大学部紀要　第25号　pp. 43～65 (1995. 3. 28).
(5) 村田「H. Yilmaz の 1958 年理論の正常 Riemann 空間への書きなおし（Ⅱ）」 札幌大学女子短期大学部紀要　第26号　pp. 27～41 (1995. 9. 28).
(6) L. D. Landau and E.M. Lifshitz "The Classical Theory of Fields," The 4th Revised English Edition, PERGAMON PRESS §90 pp. 255～257.
(7) 村田「相対論的電磁界方程式の対称化について」 札幌大学女子短期大学部紀要　第22号　pp. 11～20 (1993. 9. 28).
(8) 国立天文台編「理科年表」 1955　物10　丸善.
(9) たとえば，安達三郎，石曽根孝之「電磁波工学演習」 §1. 2　コロナ社.
(10) 森口，宇田川，一松「数学公式Ⅲ」 §41　岩波全書.
(11) 村田「Levi-Civita の記号と擬テンソルについて」 札幌大学女子短期大学部紀要　第24号 (1994. 9. 28).
なお，この論文は，4 次元正常 Riemann 空間の場合に，書きなおす予定である。文献(4)付録〔Ⅲ〕参照.
(12) 村田「電磁界の新解析法（Ⅰ）」 電気学会電磁界理論研究会資料　EMT-87-35 (1987. 7. 27).
(13) 村田「電磁場のエネルギテンソルについて」 電気学会電磁界理論研究会資料　EMT-79-36 (1979. 9. 27).
(14) たとえば，中島正光「マイクロ波工学」 §2. 3　森北出版.

（論文終）