四次元時空の基本テンソルと重力場の四次元スカラの関係について

—— H. Yilmaz's 1958 理論の再検討 ——

村　田　茂　昭

1. は　じ　め　に

重力場を解析する際，しばしば，試行解として，あるテンソルを提示し，これを「基本テンソルである」と宣言して解析をはじめることがある。線素を与えることもあるが，同様である。しかし，提示されたテンソルが，真の基本テンソルになり得るかどうかの検討が不充分であることが多い。(「解析の成果によって適否を判定する」つもりであろうが，もっと早い段階で，否定的結論が出る可能性がある。)

たとえば，H. Yilmaz の1958年理論は，四次元時空における重力場のスカラ波動方程式を仮定し，その解を基本テンソルの成分中に指数関数の形でとり入れることによって，四次元 Riemann 空間の基本テンソルを創出している。それは，非常に整然とした簡素な理論である。本論文では，これを例題としてとりあげ，二・三の類似した「基本テンソル」について検討している。そして，四次元スカラが，基本テンソルの成分中に，指数関数の形で入り込むためには，Yilmaz の当時の思惑どおりに行かないことを示す。そして結果的には Yilmaz の理論を数学的見地から修正した案を二つ提出している。

ひとつは，正常 Riemann 空間の基本テンソル，もう一方は，異常 Riemann 空間の基本テンソルである。一方，最近の相対論の分野における観測事実を，円満に説明するためには，むしろ(非常識ではあるが) 正常 Riemann 空間案をとるべきであることを示している。

2. H. Yilmaz's 1958 理論

H. Yilmaz は，何回か，その理論を修正しているが，原案はその後複雑化した理論よりも簡明であるので，ここでは原論文[1]をとり上げる。

当時，H. Yilmaz が提唱した基本テンソルは，一般の直交曲線座標系のものに書きなおすと，h_k を測度係数として，

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -exp(-2f), & & & 0 \\ & h_1^2\ exp(2f), & & \\ & & h_2^2\ exp(2f), & \\ 0 & & & h_3^2\ exp(2f) \end{pmatrix} \qquad (2.\ 1)$$

と言うものである。

ここで，f は，下記のスカラ波動方程式の解である。(場の源の外側の空間を考えている。)

$$g^{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu \mathrm{D}_\nu f=0 \qquad (2.\ 2)$$

ここで D_μ は座標 x^μ に関する共変微分演算子であり，またテンソルの縮約に関して「Einstein の省略記法」を採用した。(ただし，最近の傾向にしたがい，上下の同じ指標がラテン文字であっても和をとることとする。) (2. 2) 式は，具体的には

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu}\partial_\nu f)=0 \tag{2. 3}$$

である。ただし，g は基本テンソルから得られる行列式であり

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{2. 4}$$

である。

(2. 3) 式は，よく知られているように Lagrangean L を

$$\mathrm{L}=g^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu f \tag{2. 5}$$

として，$f, \partial_\mu f$ を変関数として，作用積分

$$\mathrm{S}=\int \mathrm{L}\sqrt{-g}\ d\Omega \tag{2. 6}$$

の変分 $\delta\mathrm{S}$ について

$$\delta\mathrm{S}=0 \tag{2. 7}$$

の条件より得られる。

第1章で提示した疑問は，「f がスカラ関数のとき，(2. 1) 式の形のテンソルが本当に 基本テンソル になり得るか？」と言うことである。言いかえると，「f がスカラであることと (2. 1) 式の $g_{\mu\nu}$ が基本テンソルであることの間に矛盾はないのか？」と言うことになる。(実は，あきらかに矛盾することが判明する。)

さしあたり，「f がスカラであることと (2. 1) 式の $g_{\mu\nu}$ が（ただの）テンソルであることとの間には矛盾がない。」ことを示そう。

ここで，基本テンソルが (2. 1) 式の $g_{\mu\nu}$ である一般座標系から，重力場を取り去った系を「がいこつ座標系」と呼ぼう。がいこつ座標系の基本テンソルを $g_{0,\,\mu\nu}$ とすると

$$g_{0,\,\mu\nu}=\begin{pmatrix} -1, & & & \mathbf{0} \\ & h_1^2, & & \\ & & h_2^2, & \\ \mathbf{0} & & & h_3^2 \end{pmatrix} \tag{2. 8}$$

であるから，その行列式を g_0 とすれば，

$$f=\frac{1}{4}\log\frac{g}{g_0} \tag{2. 9}$$

となる。

ここで，対数関数の引数はスカラでなければならないが，

$$\frac{g}{g_0}=\frac{\text{重み2のスカラ密度}}{\text{重み2のスカラ密度}}=\text{スカラ} \tag{2. 10}$$

であるから，この段階では矛盾はない。しかし，このチェックは，$g_{\mu\nu}$ や $g_{0,\,\mu\nu}$ が単なるテンソルであることと，f がスカラであることの間に矛盾がないことにしか有効でない。

$g_{\mu\nu}$ が，基本テンソルであるとき，これより所定の方法によって得られるリーマン空間の曲率はスカラである。このとき，曲率が f の汎関数であるとしたならば，曲率は，f のスカラ形式になっていなければならない。

3. 曲 率 の 計 算

ここでは，通常の方法によって，曲率 R をもとめる手順を念のため示す。[2]（読者が，「著者が，何か，一般には知られていない独創的な理論にもとずき解析をすすめるのではないか？」との不

安を持つのを打ち消すためである。)

時空の基本構造には，異説もあるが，基本テンソルから Riemann テンソル，Ricci のテンソルを経て曲率および Einstein の方程式に至る正統的[2]計算法は以下のとおりである。

アフィン (affine) 接続係数 (Christoffell の三指標記号) は

$$\Gamma^i_{jk}=\frac{1}{2}g^{il}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right) \tag{3.1}$$

であるとする。

Riemann のテンソルは

$$\mathrm{R}^h_{ijk}=\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^h_{ik}-\frac{\partial}{\partial x^k}\Gamma^h_{ij}+\Gamma^l_{ik}\Gamma^h_{jl}-\Gamma^l_{ij}\Gamma^h_{kl} \tag{3.2}$$

次に Ricci のテンソンは

$$\mathrm{R}_{ik}=\mathrm{R}^h_{ihk} \tag{3.3}$$

以上より曲率 R は

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}^\mu_\mu=g^{\mu\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu} \tag{3.4}$$

となる。

以上で，第 4 章以降の準備は終ったが，Riemann 空間の曲率が非常に重要な量であることを示すために，正統的な理論を，若干補足する。

R を Lagrangean として作用積分

$$\mathrm{S}=\int \mathrm{R}\sqrt{-g}\, d\Omega \tag{3.5}$$

を作り，汎関数を $g^{\mu\nu}$ にとり，S の変分

$$\delta\mathrm{S}=0 \tag{3.6}$$

とおけば,

$$\mathrm{G}_{\mu\nu}=\mathrm{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{R}g_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

と言う Einstein のテンソルが得られる。(いわゆる宇宙項は省略した。)

重力場のエネルギテンソルは

$$\mathrm{T}_{\mu\nu}=\frac{1}{\kappa}\mathrm{G}_{\mu\nu} \tag{3.8}$$

ただし，κ は Einstein の重力定数である。

$$\kappa=\frac{8\pi\mathrm{G}}{\mathrm{c}^4} \tag{3.9}$$

ここで

G：万有引力の定数

c：真空中の光速度

なお，次の式が恒等的に成立する。

$$\mathrm{D}_\nu\mathrm{T}^{\mu\nu}=0 \tag{3.10}$$

また，(3. 7), (3. 8) を

$$\mathrm{R}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}\mathrm{R}g_{\mu\nu}=\kappa\mathrm{T}_{\mu\nu} \tag{3.11}$$

と書いたものが，重力場に関する Einstein の方程式と呼ばれる。

4. 基本テンソルの必要条件

Riemann 空間の曲率がスカラであることは，数学的定理である。したがって，ある2階のテンソルを「基本テンソルである。」と仮定すると，それより第3章の手続きによって計算された曲率は，必ずスカラとなる。ところが，もし，その「基本テンソル」にスカラ関数 f が含まれていれば，曲率は f の汎関数となる。そして，その汎関数は f に関するスカラ形式になっていなくてはならない。

以下において，簡単のため「がいこつ座標系」の（時間軸以外の）空間部分をデカルト座標系とする。ここでは，次の四つの「H. Yilmaz 風指数型基本テンソル候補」をテストする。（がいこつに，因子 $exp(2f)$, $exp(-2f)$ が肉付され，重力場のある空間の基本テンソルになるというイメージを思いうかべてほしい。）

テストは，さしあたり曲率を正統的計算法によって導出しただけである。正常 Riemann 空間を含めたのは，著者が，Einstein の理論をも疑う必要があると考えているからである。記述を簡単にするために，次の省略記法を採用した。

$$f_\mu \equiv \partial_\mu f \tag{4.1}$$

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\nu \partial_\mu f \tag{4.2}$$

また，

D_μ ：座標 x^μ に関する共変微分演算子。

$D_{0,\mu}$：座標 x^μ に関する，がいこつ座標系における共変微分演算子。

である。

また，基本テンソルおよび曲率に関して ζ, ρ は正常 Riemann 空間の量，g, R は異常 Riemann 空間の量を表わし '(prime) の有無は4次元スカラ関数 f の基本テンソルへの入り方の区別を示す。なお，H. Yilmaz の1958年理論では，④の $g'_{\mu\nu}$ を基本テンソルとしている。

① 正常 Riemann 空間1型

◇基本テンソル

$$\zeta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} exp(2f), & & & 0 \\ & exp(2f), & & \\ & & exp(2f), & \\ 0 & & & exp(2f) \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

◇がいこつ座標系の基本テンソル

$$\zeta_{0,\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1, & & & 0 \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

これより，曲率 ρ を計算すると

$$\begin{aligned}\rho = &-6(f_{00}+f_{11}+f_{22}+f_{33})\,exp(-2f) \\ &-6(f_0^2+f_1^2+f_2^2+f_3^2)\,exp(-2f)\end{aligned} \tag{4.5}$$

この式を変形して行けば

$$\begin{aligned}\rho &= -6\left\{\frac{1}{\sqrt{\zeta_0}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{\zeta_0}\,\zeta_0^{\mu\nu}\partial_\nu f\right)+\zeta_0^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu f\right\} exp(-2f) \\ &= -6(\zeta_0^{\mu\nu} D_{0,\mu} D_{0,\nu} f + \zeta_0^{\mu\nu}\partial_\mu f \partial_\nu f)\, exp(-2f)\end{aligned} \tag{4.6}$$

ただし，ζ_0 は $\zeta_{0,\mu\nu}$ の作る行列式である。
(4. 6) 式は，任意の座標変換に際して不変な，f のスカラ形式になっている。

② 正常 Riemann 空間 2 型
◇基本テンソル

$$\zeta'_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} exp(-2f), & & & \mathbf{0} \\ & exp(2f), & & \\ & & exp(2f), & \\ \mathbf{0} & & & exp(2f) \end{pmatrix} \tag{4. 7}$$

◇がいこつ座標系の基本テンソル

$$\zeta'_{0,\mu\nu}=\begin{pmatrix} 1, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4. 8}$$

曲率を ρ' とすると

$$\begin{aligned}\rho'=&-6f_{00}exp(2f)-2exp(-2f)(f_{11}+f_{22}+f_{33})\\ &-18f_0^2exp(2f)-2exp(-2f)(f_1^2+f_2^2+f_3^2)\end{aligned} \tag{4. 9}$$

この式は，4 次元時空では，これ以上簡単に書きなおせない。このような複雑な量が，スカラである必要があるとき，f もやはりスカラである事を要求するのは無理である。

③ 異常 Riemann 空間 1 型
◇基本テンソル

$$g_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -exp(2f), & & & \mathbf{0} \\ & exp(2f), & & \\ & & exp(2f), & \\ \mathbf{0} & & & exp(2f) \end{pmatrix} \tag{4. 10}$$

◇がいこつ座標系の基本テンソル

$$g_{0,\mu\nu}=\begin{pmatrix} -1, & & & \mathbf{0} \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ \mathbf{0} & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4. 11}$$

曲率を R とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{R}=&-6(-f_{00}+f_{11}+f_{22}+f_{33})\,exp(-2f)\\ &-6(-f_0^2+f_1^2+f_2^2+f_3^2)\,exp(-2f)\end{aligned} \tag{4. 12}$$

この式を変形して行けば

$$\begin{aligned}\mathrm{R}&=-6\left\{\frac{1}{\sqrt{-g_0}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-g_0}\,g_0^{\mu\nu}\partial_\nu f)+g_0^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu f\right\}exp(-2f)\\ &=-6(g_0^{\mu\nu}\mathrm{D}_{0,\mu}\mathrm{D}_{0,\nu}f+g_0^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu f)\,exp(-2f)\end{aligned} \tag{4. 13}$$

ただし，g_0 は $g_{0,\mu\nu}$ の作る行列式である。
(4. 13) 式は，任意の座標変換に際して不変な，f のスカラ形式になっている。

④ 異常 Riemann 空間 2 型
◇基本テンソル

$$g'_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} -exp(-2f), & & & 0 \\ & exp(2f), & & \\ & & exp(2f), & \\ 0 & & & exp(2f) \end{pmatrix} \tag{4. 14}$$

◇がいこつ座標系の基本テンソル

$$g'_{0,\,\mu\nu}=\begin{pmatrix} -1, & & & 0 \\ & 1, & & \\ & & 1, & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \tag{4. 15}$$

曲率を R′ とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{R}'=&6f_{00}exp(2f)-2exp(-2f)(f_{11}+f_{22}+f_{33}) \\ &+18f_0^2exp(2f)-2exp(-2f)(f_1^2+f_2^2+f_3^2) \end{aligned} \tag{4. 16}$$

この式は４次元時空では，これ以上簡単に書きなおせない。これについても，② の ρ' と同様な事が言える。

以上を総合すると曲率 ρ および R は，（がいこつ座標系における共変微分演算と言ういささか耳なれない方法で記述されているが）一般座標変換に対して不変な，f に関するスカラ形式で表現できることがわかる。一方，曲率 ρ', R′ は，f に関してスカラ形式になっていない。逆に言うと，ρ', R′ が４次元スカラであると言うことと，f が４次元スカラであることとは同時に成立できない。したがって「基本テンソルが (4. 14) の $g'_{\mu\nu}$ で与えられるとき，その中に含まれる関数 f が，４次元スカラ波動方程式

$$g'^{\mu\nu}\mathrm{D}_\mu\mathrm{D}_\nu f=0 \tag{4. 17}$$

を満足する。」と言う仮定は，数学的に無理があり，この段階で，この案は，捨て去らなければならない。

つまり，前記の４つの基本テンソル候補のうち ② と ④は，（物理学以前に）Riemann 幾何学により否定されてしまう。

1984年に H. Yilmaz と直接話す機会があった時，彼は「time-independent case の解析をしたのだから，これはこれでよい。」と言っていた。たしかに，④ の場合，

$$\partial_0=0 \tag{4. 18}$$

とおくと

$$\mathrm{R}'=-2(g_0'^{\mu\nu}\mathrm{D}_{0,\,\mu}\mathrm{D}_{0,\,\nu}f+g_0'^{\mu\nu}\partial_\mu f\partial_\nu f)\,exp(-2f) \tag{4. 19}$$

となる。これは，４次元 Riemann 空間から時間軸を取り去り，３次元正常 Riemann 空間にした場合の曲率である。（あくまでも (4. 18) の条件…静重力場である。）つまり，静重力場の場合は，R′ がスカラであることと f が，スカラであることの矛盾は表面には表われない。H. Yilmaz の理論で，一応「水星の近日点の前進」が説明できる[3]のは，そのためである。「太陽の重力場による光線の屈折」も，この理論をやりくりして説明できる。（こちらは，相当に苦しい。）なぜならば，これらは，静重力場の問題であるからである。

「静重力場の場合に正しいから，④ 型の基本テンソル ($g'_{\mu\nu}$) は，それでよいのだ。」と言う考え方は正しくない。我々は，何のために４次元時空で解析するのであろうか？　それは，４次元時空において，一般座標変換に共変的な式を追求するためである。我々が，「基本テンソルの成分が，時間の関数である例題」に出あうことは，めったにないにしても，そのような例題を原理的に扱えない理論はいさぎよく捨て去るべきである。

したがって，この段階で，テストに合格したのは，① の $\zeta_{\mu\nu}$ と ③ の $g_{\mu\nu}$ の二つの基本テンソルである。

5. Schwarzschild 時空との比較

第4章のテストによって二つの基本テンソルが，重力場のスカラを含む基本テンソル案として残った。ここで，いわゆる Schwarzschild 時空と比較するために，これらの二つを，空間部分を球座標にとり線素で示す。なお，第4章の番号は，そのままひきつぐ。

① 正常 Riemann 空間案 ($\zeta_{\mu\nu}$)

$$ds^2=exp(2f)\{c^2dt^2+dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2\} \tag{5. 1}$$

③ 異常 Riemann 空間案 ($g_{\mu\nu}$)

$$ds^2=exp(2f)\{-c^2dt^2+dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2\} \tag{5. 2}$$

ただし，(x^0, r, θ, φ) 座標系を仮定しており，

$$x^0=ct \tag{5. 3}$$

である。

質量 M の質点が，原点にある場合，原点の近傍以外では，（三次元の重力理論の延長より）

$$f=\frac{\mathrm{GM}}{c^2r}=\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r} \tag{5. 4}$$

α は，いわゆる Schwarzschild の定数で

$$\alpha=\frac{2\mathrm{GM}}{c^2} \tag{5. 5}$$

である。

相対論の初歩を知っておれば，ただちに ① はすてるのが，ふつうである。しかし，観測事実は，むしろ ① を支持することを示そう。

Schwarzschild の解は，異常 Riemann 空間における Einstein 方程式の空間に物質のない静的な場合の厳密な解ではあるが，物理学的に二つの問題がある。第1は，Einstein の重力場理論が完全であるかどうか疑問がある。第2に，Schwarzschild の行った強引な座標変換を，H. Yilmaz 型基本テンソルに適用すると，多価関数を物理学に持ちこむことになる。このことは，(5. 1) や (5. 2) の形（実は第4章であげた，すべての基本テンソル）の場合について，Schwarzschild の方法に沿って解析してみると自明である。

しかし，Schwarzschild の解が弱い重力場を解析する際有効であることは，今のところ否定できない。

Schwarzschild の解はいろいろな座標系で表現されるが（この点が，著者が，不信の念をいだく理由のひとつである。我々が，観測する時空は，そのうちのどれなのであろうか？）原案では

$$ds^2=-(1-\frac{\alpha}{r})c^2dt+\frac{1}{1-\frac{\alpha}{r}}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\, d\varphi \tag{5. 6}$$

弱い重力場については $\frac{1}{r}$ の項のみの比較で充分であろう。

$$\zeta_{00}=exp(2f)\fallingdotseq 1+2f=1+\frac{\alpha}{r} \tag{5. 7}$$

$$g_{00}=-exp(2f)\fallingdotseq -1-2f=-1-\frac{\alpha}{r} \tag{5. 8}$$

一方，Schwarzschild の基本テンソルを $g_{s,\mu\nu}$ とすると

$$g_{s,00}=-1+\frac{\alpha}{r} \tag{5. 9}$$

以上の三つを比較すると，変動項の符号が g_{00} と $g_{s,00}$ では反対になっており，これは，$g_{\mu\nu}$ で，観測事実を説明しようとするときに，何か困難な問題がおこる可能性を示す。定数項をぬかす

と，この点では，ζ_{00} には問題がない。

(5. 6) 式の空間座標は非等方的であるが，これを，等方座標系に書きなおして比較すると

$$\left.\begin{array}{l} \zeta_{11} \fallingdotseq 1+\dfrac{\alpha}{r} \\ g_{11} \fallingdotseq 1+\dfrac{\alpha}{r} \\ g_{s,11} \fallingdotseq 1+\dfrac{\alpha}{r} \end{array}\right\} \tag{5. 10}$$

となり，この点では $\zeta_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ とも，問題はない。

以上より，弱い重力場に関するもので基本テンソルの時間—時間成分の定数項が影響を与えないような問題があれば，基本テンソルを $\zeta_{\mu\nu}$ を採用しても，$g_{s,\mu\nu}$ を採用した場合と同じ結果が得られるはずである。

6. 終　　章

Einstein や，その後継者達が，「我々の時空は異常 Riemann 空間である。」と確信した理由は，多分次の二つである。

1. 波動方程式が，基本式として簡単に得られる。(g_{00} と $g_{\mu\mu}(\mu \fallingdotseq 0)$ の符号は反対である方が簡単)
2. 重力場のないところで，基本テンソルが Lorentz 変換に不変である。

しかし，異常 Riemann 空間においては，測地線の方程式は，ほとんど無意味である。したがって，物理学を正常 Riemann 空間中に建設できれば，その方がよいことは言うまでもない。

上記の二つの「理由」を打ちやぶるために，著者は，Einstein の「擬似基本テンソル」と言う概念を導入し，ある程度の成功をおさめた[4]が，これについては，さらに検討して，別の機会に発表する予定である。

〔参 考 文 献〕

(1) H. Yilmaz "New Approach to General Relativity" Phys. Rev. Vol. 111, No. 5, Sept. (1958)
(2) 平川浩正「相対論」共立出版 §4, §5, §6
(3) 村田茂昭「Yilmaz's 1958 理論の再検討」電気学会電磁界理論研究会資料 EMT-83-24 (1983)
(4) 村田茂昭「電磁場に関する新理論」電気学会電磁界理論研究会資料 EMT-85-37 (1985)