札幌大学総合論叢　第4号（1997年10月）

〈研究ノート〉

偏微係数に関するノート

村　田　茂　昭

1．はじめに

いわゆる偏微分の計算法は，常微分よりは簡単であると考えられている。すなわち，複数個ある独立変数の一つのみを注目し，他のすべての独立変数を，定数と見なして計算すると，結果（偏微係数）が得られる。このような事情で，偏微分よりは，常微分の方が条件は厳しいと考えるのはもっともと言える。常微分演算法で正しい法則は，偏微分演算法でも（条件がゆるいから）いつも正しそうに思える。しかし，常微分法に関する法則が，偏微分法の分野で，すべて成立すると考えるのは危険である。

以下に述べることは，以前の職場で，電気工学基礎演習を担当していたときに見つけた事例である。演習の解答を調べているとき，答えは確かに正しくないのであるが，計算法に，にわかには間違いが発見できない答案を見つけた。検討したところ，その答案には，次のような式が使われていた。

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} \qquad (1)$$

以下に述べるようにこの式は，一般には成立しない。

数学の専門家には，あたりまえのことであっても，私のように，つまみ食い的に公式を利用しているものにとっては，あらためて考えてみなければわからない。なお，私ばかりでなく相当の大家でも誤用しているので[(1)]，発表する価値がありそうである。

2．常微分係数の場合

常微分係数の場合は，微分可能なｘの関数ｕに対して，

$$\frac{du}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \tag{2}$$

であるから，x と u に関して常に

$$\frac{dx}{du}=\frac{1}{\dfrac{du}{dx}} \tag{3}$$

である。すなわち，常微分係数には，微少な量の比という概念が成立するから，逆数にしても差しつかえないのである。

しかるに，偏微分係数については，(1)式が成立するのは，u が，独立変数 x のみの関数（すなわち，他の独立変数には無関係）の場合だけである。これは，形式的に，偏微分の記号を使用しただけであって，事実上は常微分演算なのである。

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{dx}{du}=\frac{1}{\dfrac{du}{dx}} \tag{4}$$

3．偏微分係数の場合

偏微分係数の場合，(1)式が成立しないことを説明しよう。独立変数は，2個あるものとし，x，y とする。

x，y の関数 u(x, y) は，一般的に下記の形に書くことができる。

$$u(x, y)=f(x, y)+g(x)+h(y) \tag{5}$$

ただし，

f(x, y)：x，y の関数

g(x)　：x のみの関数

h(y)　：y のみの関数

である。

このように，独立変数が二つ以上あってはじめて，偏微分が意味を持つ。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x} \tag{6}$$

なお，$\dfrac{\partial g}{\partial x}$は，実質的には常微分係数であるが，表現をそろえるために偏微分の形で書

いた。次に，$\dfrac{\partial x}{\partial u}$を求めることを考えよう。もともと，uで偏微分するという以上，もうひとつ以上独立変数があるはずである。今，独立変数は二つの場合を考えているから，uと組をなす独立変数をvとする。ここで，たとえば，u=u(x, y)と書いて，uは，xとyの関数であることをあらわすものとする。

$$\left.\begin{aligned} u&=u(x,\ y) && \text{(a)} \\ v&=v(x,\ y) && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

この式を，xとyについて解いて

$$\left.\begin{aligned} x&=x(u,\ v) && \text{(a)} \\ y&=y(u,\ v) && \text{(b)} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

となる。このように，この偏微分演算の場合には，ある独立変数の組x，yに対応して，別の独立変数の組u，vがあるのである。各々の組に属する独立変数の数は，それぞれ同じであるべきであるが，座標変換の場合の偏微分演算を除くと，これはあまり明解でないことが多い。

(8 a) 式より

$$x(u,\ v)=F(u,\ v)+G(u)+H(v) \tag{9}$$

ただし，

F(u, v)：u，vの関数
G(u)　：uのみの関数
H(v)　：vのみの関数

である。
もしも，(9)式が，わかっておれば，

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial G}{\partial u} \tag{10}$$

より目的の偏微係数を計算できる。しかし，一般には，(9)式が，簡単には求められない場合がしばしばある。また，この小論文の目的は，(1)式が成立しないことを説明することにある。そこで，(5)式より出発しよう。

この式の両辺を，uで偏微分する。

$$\frac{\partial u}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{11}$$

u は x と y の関数であることを忘れてはいけない。あきらかに，上式の左辺は，1 であるから，

$$1=\left(\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{12}$$

$$\therefore \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1-\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}-\dfrac{\partial h}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial g}{\partial x}} \tag{13}$$

これが，我々の求めていた式である。

あきらかに，

$$\frac{\partial y}{\partial u}=0 \tag{14}$$

であれば，(13)式は，(1)式に一致する。しかしそれは，y が，u に関して，定数であることを意味し，もともと偏微分の演算をする必要がない場合なのである。さらに，(13)式を眺めると，$\frac{\partial x}{\partial u}$ を求める際に，$\frac{\partial y}{\partial u}$ の値を知る必要があることを意味する。これは，(8)式の形の逆関数が発見できない場合は，一般には，連立方程式を解かなければならないことを意味する。

この場合，未知数は，$\frac{\partial x}{\partial u}$，$\frac{\partial y}{\partial u}$，$\frac{\partial x}{\partial v}$，$\frac{\partial y}{\partial v}$ の四つであるが，四元連立方程式を解く必要はなく，二元連立方程式を二回解けばよい。すなわち，一般に独立変数の数が n 個の場合，求むべき偏微係数は，n^2 個になるが，解くべき連立方程式は，n 元連立方程式を，n 回解けばよく，n^2 元連立方程式を解く必要はない。筆算で，代数項の連立方程式を解く限界は，せいぜい四元連立までであるから，これは多少安心な話しである。

(7)式について書くと，x，y の関数としての u，v は既知であるが，u，v の関数としての x，y の形が未知である場合下記の二つの連立方程式を解けばよい。

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=1 & \text{(a)}\\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=0 & \text{(b)}\end{array}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}&=0 \qquad \text{(a)}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}&=1 \qquad \text{(b)}\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

一般の場合の拡張は容易であろう。

4．具体例

次のような例を考えてみよう。

$$\begin{aligned}u&=r\cos(\phi)\\ v&=r\sin(\phi)\end{aligned} \tag{17}$$

これは平面の極座標から，直角直交座標への座標変換の例である。通常，直角直交座標の変数は，x，y と書かれることが多いが，混乱を避けるため u，v とした。

前節にあわせると

$$\begin{aligned}x&\rightarrow r\\ y&\rightarrow \phi\end{aligned}$$

である。

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\cos(\phi) \tag{18}$$

もはや，(1)式が成立しないことはわかっている。それでは，

$$\frac{\partial r}{\partial u}=\frac{1-[A]}{\cos(\phi)} \tag{19}$$

とおいてみる。ここで，A は補正項である。多くの場合，A は小さいあでろうと信じたくなるかもしれないが，そんなことはない。この例は，あとで述べるように簡単な逆関数が存在する場合なのであるが，正統的に連立方程式を作ってみよう。(15)式に当たる式は，

$$\begin{aligned}\cos(\phi)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)-r\sin(\phi)\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)&=1\\ \sin(\phi)\left(\frac{\partial r}{\partial u}\right)+r\cos(\phi)\left(\frac{\partial \phi}{\partial u}\right)&=0\end{aligned} \tag{20}$$

この $\frac{\partial r}{\partial u}$ と $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ に関する連立方程式を解くと

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \cos(\phi) \qquad \text{(a)}$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = -\frac{\sin(\phi)}{r} \qquad \text{(b)} \qquad (21)$$

となる。つまり，補正項Aは，$\sin^2(\phi)$であったのである。そのため，$\frac{1}{\cos(\phi)}$に近いと期待されていた$\frac{\partial r}{\partial u}$は，$\cos(\phi)$になってしまったのである。

つまり，この例では，

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial u}{\partial r} = \cos(\phi) \qquad (22)$$

という常微分演算法の常識とは，全く異なる事態となっているのである。

前述のごとくに，この例では，簡単な逆関数が存在する。

$$r = \sqrt{u^2+v^2}$$
$$\phi = \tan^{-1}\frac{v}{u} \qquad (23)$$

直接計算してみると，この意外な結果が正しいことが確認できる。

5．まとめ

なるべく，面倒な計算は避けて，効率的にしたいのはやまやまであるが，偏微係数の逆数を利用しようという考えは，この種の問題の場合やめたほうが安全である。

［完］

[参考文献]

(1) たとえば，細野敏夫著「電磁波工学の基礎」昭晃堂 p 56（§4.6 群速度）
安達三郎著「電磁波工学」コロナ社 p 32（1.3.5 群速度）
これらをよく読むと，必ずしも数学的に間違いとは断言できないが，群速度ないしエネルギー速度は，本来常微分係数で計算されるべきではないかと思われる。だから，逆数をとっても正しい値が得られるのであろう。下記の著作を参照されたい。（きちんと常微分演算で解析している。）
内藤喜之著「情報伝送入門」昭晃堂 p 265～p 269（§16.3 位相速度，群速度）

(2) 微分演算（常微分・偏微分）は，簡単なので，逆に余りよい公式集がないが，私は，下記を愛用している。
ピアース・フォスター「簡約積分表」No.900～No.980　ブレイン図書出版㈱

なお，この公式集で，

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad \text{etc.}$$

である。