

Una descomposición convexa

MARIO LOMELÍ-HARO*, VERÓNICA BORJA M.,
J. ALEJANDRO HERNÁNDEZ T.

Universidad Tecnológica de la Mixteca, Instituto de Física y Matemáticas, Huajuapán de León, Oaxaca, México.

Resumen. Dada una colección P de puntos en el plano, una descomposición convexa de P es un conjunto Γ de polígonos convexos con vértices en P que satisfacen lo siguiente: La unión de todos los elementos de Γ es el cierre convexo de P , cada elemento de Γ es vacío (no contiene a ningún otro elemento de P en su interior) y para cualesquiera 2 elementos diferentes en Γ sus interiores son disjuntos (se intersecan en a lo más una arista). Únicamente se sabe que existen descomposiciones convexas con a lo más $\frac{7n}{5}$ elementos para toda colección de n puntos. En este trabajo diremos cómo obtener una descomposición convexa específica de P con a lo más $\frac{3n}{2}$ elementos.

Palabras clave: Aristas girables en triangulaciones, descomposiciones convexas, triangulaciones

MSC2010: 68U05, 68R05, 68R10.

A convex decomposition

Abstract. Given a point set P on the plane, a convex decomposition of P is a set Γ of convex polygons with vertices in P satisfying the following conditions: The union of all elements in Γ is the convex hull of P , every element in Γ is empty (that is, they no contain any element of P in its interior), and any given 2 elements in Γ its interiors are disjoint intersecting them in at most one edge. It is known that if P has n elements, then there exists a convex decomposition of P with at most $\frac{7n}{5}$ elements. In this work we give a procedure to find a specific convex decomposition of P with at most $\frac{3n}{2}$ elements.

Keywords: Flipping edges in triangulations, convex decompositions, triangulations.

*E-mail: lomeli@mixteco.utm.mx

Recibido: 07 de diciembre de 2013. Aceptado: 06 de agosto de 2014.

Para citar este artículo: M. Lomelí-Haro, V. Borja, J.A. Hernández, Una descomposición convexa, *Rev. Integr. Temas Mat.* 32 (2014), no. 2, 169-180.

1. Introducción

Comenzaremos con algunos antecedentes de este problema a manera de motivación. En 1931 Esther Klein probó que si tenemos un conjunto de cinco puntos en el plano, de manera que no haya tres de ellos en una misma línea recta, siempre podemos encontrar cuatro elementos que son los vértices de un cuadrilátero convexo.

Este problema lo planteó de manera más general: Dado un entero $c \geq 4$, ¿existe un número $N(c)$ tal que en cualquier colección de puntos en el plano con al menos $N(c)$ elementos, que no contenga 3 de ellos en una misma línea recta, siempre sea posible obtener un subconjunto de tamaño c formando el conjunto de vértices de un polígono convexo?

Este problema lo resuelven P. Erdős y G. Szekeres [4] de manera afirmativa con el siguiente resultado, conocido como el Teorema de Erdős-Szekeres:

Teorema 1.1. *Sea $c \geq 4$ un entero. Entonces existe un natural $N(c)$ tal que, en cualquier colección de puntos en el plano con al menos $N(c)$ elementos, que no contenga 3 de ellos en una misma línea recta, siempre es posible seleccionar un subconjunto de tamaño c formando el conjunto de vértices de un polígono convexo.*

Este resultado ha sido muy estudiado por su belleza y por ser un gran reto encontrar el valor exacto de $N(c)$. Han pasado más de 60 años sin que se haya logrado un avance substancial. Hasta ahora lo que se sabe es que existe una constante α tal que:

$$2^c \leq N(c) \leq \alpha 4^c.$$

La cota inferior es del mismo artículo [4], mientras que la cota superior la obtienen G. Thot y P. Valter [13]. Para otra demostración del Teorema de Erdős-Szekeres referiremos al lector al libro de M. Boná [2].

Cabe aclarar que el polígono que nos garantiza el Teorema de Erdős-Szekeres puede contener algunos elementos de la colección en su interior. Así, si tenemos un conjunto de puntos P y un polígono γ , diremos que γ es *vacío* si no contiene ningún elemento de P en su interior.

1.1. Polígonos convexos vacíos

Desde luego, también podemos plantear el siguiente problema: Sea $c \geq 3$ un entero. ¿Existe un número $H(c)$ tal que en cualquier colección de al menos $H(c)$ puntos sea posible seleccionar c de ellos formando un polígono convexo vacío?

Trivialmente tenemos que $H(3) = 3$. Como podemos encontrar colecciones de 4 puntos sin que formen un cuadrilátero convexo, $H(4) \geq 5$ (véase la Figura 1 (a)). Dado que el cuadrilátero que nos garantiza el resultado de Esther Klein puede ser vacío, $H(4) = 5$.

En la Figura 1(b) vemos una colección de 9 puntos donde no hay pentágonos convexos, indicando esto que $H(5) \geq 10$. H. Harbort [8] prueba que $H(5) = 10$.

M. Overmars [12] encuentra una familia de 29 puntos sin hexágonos, hasta que recientemente T. Gerken [7] prueba que $H(6)$ existe, y que es a lo más 219. No se conoce el valor exacto de $H(6)$.

Por otro lado, J.D. Horton [9] da colecciones de puntos arbitrariamente grandes en las que no hay heptágonos convexos vacíos, ni heptágonos, ni octágonos, etc, mostrando que $H(k)$ no existe para $k \geq 7$.

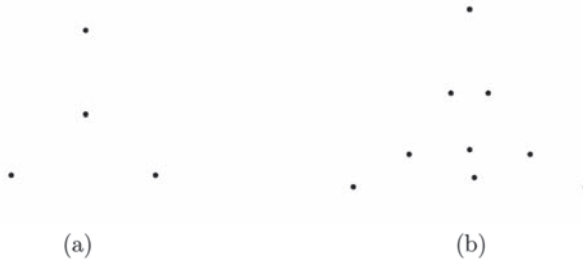


Figura 1. (a) Colección de 4 puntos sin cuadrilátero convexo, (b) colección de 9 puntos sin pentágono convexo.

Debido a la naturaleza de nuestro problema a estudiar, todas las colecciones de puntos bajo consideración estarán en el plano y en posición general, esto es, no tendrán 3 o más de sus elementos sobre una misma línea recta.

Tenemos la siguiente definición:

Definición 1.2. Sea P una colección de puntos. El *cierre convexo* de P es el polígono convexo más pequeño que contiene a P . Lo denotaremos como $Conv(P)$.

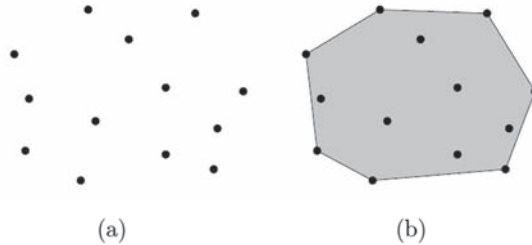


Figura 2. (a) Una colección de puntos P con 13 elementos y (b) su cierre convexo $Conv(P)$.

2. Descomposiciones convexas

Estudiaremos la cantidad de polígonos convexos que podamos encontrar con vértices en una colección dada de puntos.

Definición 2.1. Dada una colección de puntos P , una *descomposición convexa* Γ de P es un conjunto de polígonos $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ que cumplen lo siguiente:

- (C1) Los vértices de γ_i son elementos de P , para $i = 1, 2, \dots, m$.
- (C2) Todo γ_i es vacío.
- (C3) Para cualesquiera 2 diferentes $\gamma_i, \gamma_j \in \Gamma$, sus interiores son ajenos.
- (C4) $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_m = Conv(P)$.

De aquí en adelante P_n denotará una colección de n puntos y c el número de vértices en $\text{Conv}(P_n)$. Siempre con $n \geq 5$ y $c \geq 3$.

Un ejemplo muy estudiado de descomposiciones convexas son las triangulaciones. Estas son descomposiciones convexas en las que cada uno de sus elementos es un triángulo. Véase la siguiente figura.

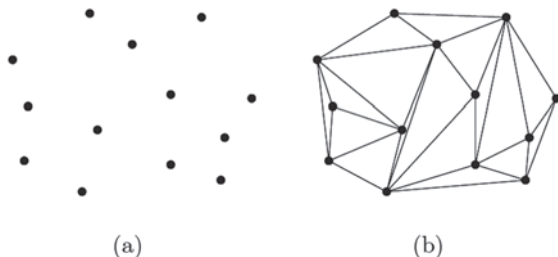


Figura 3. (a) Una colección P_{13} y (b) Una triangulación de P_{13} ; esta tiene $2(13) - 7 - 2$ elementos.

Estamos interesados en encontrar descomposiciones convexas con el menor número de elementos posible. Se puede probar que toda triangulación de P_n tiene $2n - c - 2$ elementos. Con esto, trivialmente obtenemos que toda descomposición convexa de cualquier P_n tendrá a lo más $2n$ elementos.

Sea $g(P_n) = \min\{|\Gamma| : \Gamma \text{ es una descomposición convexa de } P_n\}$, y sea $g(n)$ el máximo valor de g tomado de todas las colecciones de n puntos. Urrutia [14] conjeturó que

$g(n) \leq n+1$, pero O. Aichholzer y Krasser [1] dan un conjunto Q de n puntos tal que cada descomposición convexa de Q tiene al menos $n+2$ elementos. Posteriormente J. García-López y C. M. Nicolás [5] dan una colección de puntos P_n en la cual toda descomposición convexa tiene $\frac{11n}{10}$ elementos. Con esto tenemos que $g(n) \geq \frac{11n}{10}$, que hasta ahora es la mejor cota inferior de g .

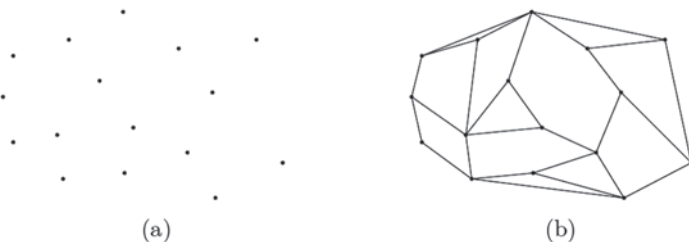


Figura 4. (a) Una colección P_{15} y (b) una descomposición convexa con 12 elementos.

En las Figuras 3(b) y 4(b) mostramos descomposiciones convexas.

V. Neumann, E. Rivera-Campo y J. Urrutia [11] prueban que para toda colección P_n siempre existe una descomposición convexa con a lo más $\frac{10n}{7}$ elementos, cota que K. Hosono [10] mejora a $\frac{7n}{5}$. Así,

$$\frac{11n}{10} \leq g(n) \leq \frac{7n}{5}.$$

El objetivo principal de este trabajo es dar un algoritmo para obtener en P_n una descomposición convexa específica con a lo más $\frac{3n}{2} - c$ elementos.

3. Obteniendo la descomposición convexa

Daremos 3 procedimientos que nos ayudarán a encontrar la descomposición convexa buscada. Etiquetaremos los elementos de P_n de la siguiente manera:

Llamaremos $p_1 = (x_1, y_1)$ al elemento de P_n cuya coordenada en y sea la menor de todas. De haber dos con esta misma, rotaremos la colección de puntos para que no suceda esto.

Todo $p \in P_n \setminus p_1$ será etiquetado con respecto al orden creciente del ángulo entre la recta $y = x_1$ y el segmento de recta $\overline{p_1 p}$. Al elemento que haga el i -ésimo ángulo más pequeño lo llamaremos p_{i+1} . Ahora, para $i = 3, 4, \dots, n - 1$, si p_i está en el interior del triángulo $Conv(\{p_1, p_{i-1}, p_{i+1}\})$, le añadiremos la etiqueta “-”. De lo contrario, si p_i está en el exterior de $Conv(\{p_1, p_{i-1}, p_{i+1}\})$, llevará la etiqueta “+”. No llevarán esta etiqueta p_2 y p_n . Véase la Figura 5(b).

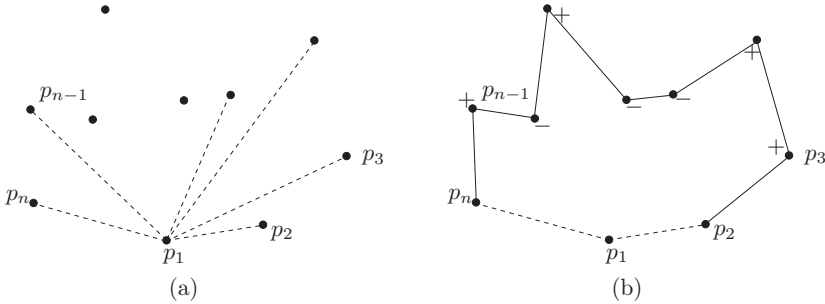


Figura 5. Etiquetación de los vértices.

En los algoritmos que daremos a continuación utilizaremos la notación de [3]. Correrán sobre la colección de puntos ya etiquetados, y $\sigma(p_i)$ denotará el signo de p_i . Estudiaremos los bloques consecutivos de puntos, ya sea con etiqueta “+” ó “-”.

```

ENCONTRAR_ $A_i(P_n)$ {
 $k \leftarrow 1$ 
if  $\sigma(p_3) = +$  then  $A_k \leftarrow \{p_1, p_2\}$ 
if  $\sigma(p_3) = -$  then {
     $A_k \leftarrow \{p_1, p_2, p_3\}$ 
     $k \leftarrow k + 1$ 
}
for  $i \leftarrow 3$  to  $n - 2$  do {
    if  $\sigma(p_i) = +$  then {
         $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_i\}$ 
    }
}
    
```

```

if  $\sigma(p_{i+1}) = -$  then {
   $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_1, p_{i+1}\}$ 
   $k \leftarrow k + 1$ 
}
}
if (  $\sigma(p_i) = -$  and  $\sigma(p_{i+1}) = +$  ) then  $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_i\}$ 
}
if (  $\sigma(p_{n-1}) = +$  ) then  $A_k \leftarrow A_k \cup \{p_1, p_{n-1}, p_n\}$ 
if (  $\sigma(p_{n-1}) = -$  ) then {
   $k \leftarrow k + 1$ 
   $A_k \leftarrow \{p_1, p_{n-1}, p_n\}$ 
}
}
return  $k$ 
}

```

En la siguiente figura ilustramos cómo funciona el procedimiento.

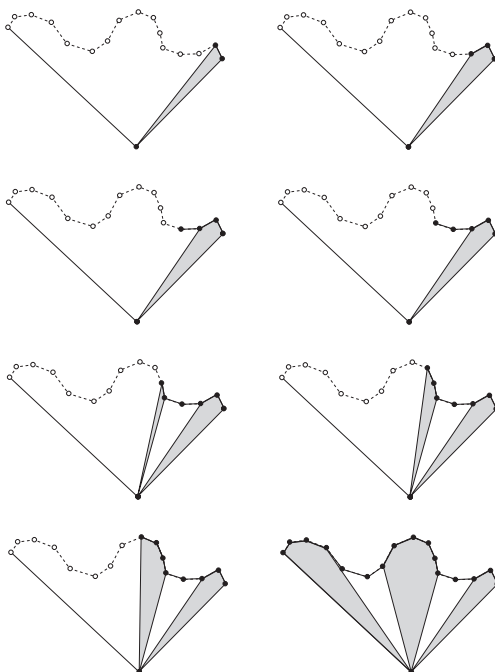


Figura 6. Algoritmo ENCONTRAR_ A_i corriendo sobre una colección P_{17} .

Con un algoritmo semejante pero más simple encontraremos las colecciones B_i .

```

ENCONTRAR_ $B_i(P_n)$ {
 $k \leftarrow 1$ 
if  $\sigma(p_3) = -$  then  $B_k \leftarrow \{p_2\}$ 
for  $i \leftarrow 3$  to  $n - 2$  do {
  if  $\sigma(p_i) = -$  then {
     $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_i\}$ 
    if  $\sigma(p_{i+1}) = +$  then {
       $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_{i+1}\}$ 
       $k \leftarrow k + 1$ 
    }
  }
}
if  $(\sigma(p_i) = +$  and  $\sigma(p_{i+1}) = -)$  then {
   $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_i\}$ 
}
if  $\sigma(p_{n-1}) = -$  then  $B_k \leftarrow B_k \cup \{p_{n-1}, p_n\}$ 
}
}

```

Con el siguiente procedimiento obtendremos triángulos con vértices consecutivos de etiqueta “-” compartiendo el vértice p_1 :

```

TRIÁNGULOS_ $\Delta_B$ {
 $\Delta_B \leftarrow \emptyset$ 
  for  $i \leftarrow 3$  to  $n - 2$  do {
    if  $(\sigma(p_i) = -$  and  $\sigma(p_{i+1}) = -)$  then  $\Delta_B \leftarrow \Delta_B \cup \{p_i, p_{i+1}, p_1\}$ 
  }
}

```

En la Figura 7 mostramos la colección P_{17} de las Figuras 6 y 7 después de haber ejecutado los procedimientos ENCONTRAR_ A_i , ENCONTRAR_ B_i y TRIÁNGULOS_ B .

Sea A el conjunto de vértices de etiqueta “+”. Le llamaremos \mathcal{L} al polígono con vértices $A \cup \{p_1, p_2, p_n\}$, y le llamaremos \mathcal{U} a la cerradura de la región (o regiones) $Conv(P_n) \setminus \mathcal{L}$. En la Figura 8 las regiones en blanco serán \mathcal{U} , y en la Figura 9 la región sombreada.

Agregaremos aristas de tal manera que cada región en \mathcal{U} quede dividida en triángulos.

Obtendremos una descomposición convexa Γ con el procedimiento:

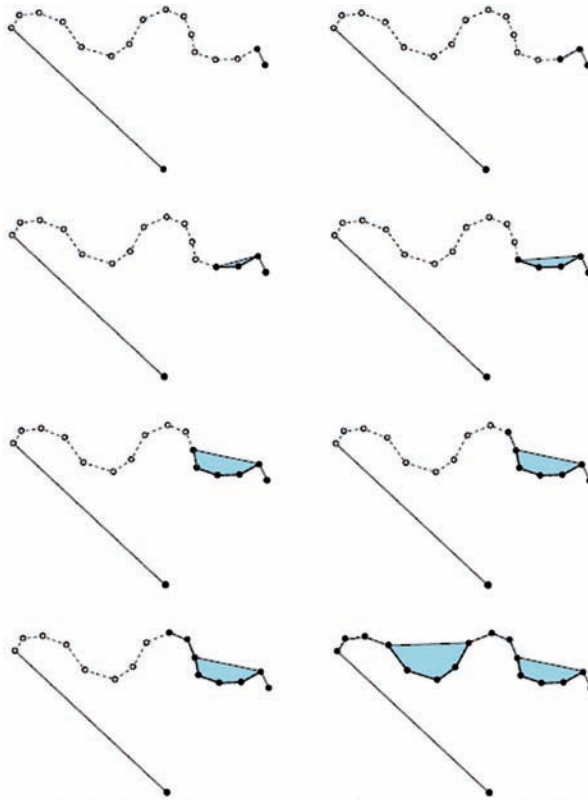


Figura 7. Algoritmo ENCONTRAR B_i corriendo sobre una colección P_{17} .

ENCONTRAR $\Gamma(P_n)$ {
 ENCONTRAR $A_i(P_n)$
 ENCONTRAR $B_i(P_n)$
 TRIÁNGULOS $\Delta B(P_n)$
 Agregar tantas aristas (con su interior en \mathcal{U}) como sea posible.
 }

Demostraremos que si P_n tiene c vértices en $Conv(P_n)$, entonces $|\Gamma| = n + k - c$.

Lema 3.1. Sea P_n una colección con 3 vértices en su cierre convexo, y k el número de polígonos obtenidos con el procedimiento ENCONTRAR A_i . Entonces la descomposición convexa Γ de P_n obtenida de aplicar ENCONTRAR Γ es tal que

$$|\Gamma| \leq n + k - 3.$$

Demostración. Sea P_n una colección de puntos en posición general, con 3 vértices

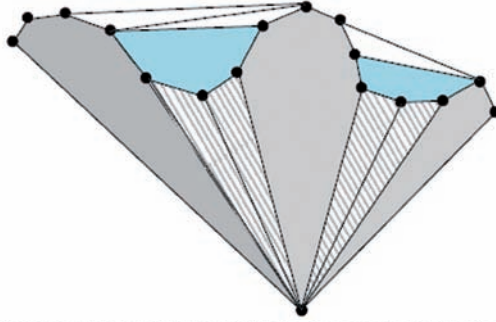


Figura 8. Descomposición convexa resultante de aplicar los algoritmos descritos.

en $Conv(P_n)$, sea k el número de conjuntos A_i obtenidos por el procedimiento ENCONTRAR_ A_i , y sea Γ la descomposición convexa inducida por ENCONTRAR_ Γ .

Tenemos los siguientes hechos

1. En el procedimiento TRIÁNGULOS_ Δ_B cada B_i genera $|B_i| - 3$ triángulos (compartiendo p_1).
2. El número de aristas añadidas en la línea 4 de ENCONTRAR_ Γ será $|A \cup \{p_2, p_n\}| - 3$, generando $|A \cup \{p_2, p_n\}| - 2$ triángulos.
3. Dado que cada A_i está compuesto por $|A_i| - 3$ vértices de etiqueta "+", $|A| = |A_1| - 3 + |A_2| - 3 + \dots + |A_k| - 3$.
4. Dado que cada B_i está formado por $|B_i| - 2$ vértices de etiqueta "-", $|B| = |B_1| - 2 + |B_2| - 2 + \dots + |B_{k-1}| - 2$.
5. Como cada elemento en el interior de $Conv(P_n)$ tiene etiqueta "+" o etiqueta "-", tenemos que la suma $|A_1| - 3 + |A_2| - 3 + \dots + |A_k| - 3 + |B_1| - 2 + |B_2| - 2 + \dots + |B_{k-1}| - 2 = n - 3$.

Considerando los k polígonos obtenidos con ENCONTRAR_ A_i y los $k - 1$ obtenidos con ENCONTRAR_ B_i , y usando los hechos 1, 2, 3 y 4, encontramos que Γ , la descomposición convexa de P_n obtenida con ENCONTRAR_ Γ , cumple

$$|\Gamma| \leq k + (k - 1) + |B_1| - 3 + |B_2| - 3 + \dots + |B_{k-1}| - 3 + |A_1| - 3 + |A_2| - 3 + \dots + |A_k| - 3.$$

Usando el hecho 5 en la ecuación anterior, tenemos que

$$|\Gamma| \leq k + (k - 1) + n - 3 - (k - 1) = n + k - 3. \quad \square$$

Con ayuda de este lema demostraremos que $|\Gamma| \leq n + k - c$, donde $c \geq 3$ es el número de vértices en $Conv(P_n)$.

Teorema 3.2. Sea P_n una colección tal que $Conv(P_n)$ tiene $c \geq 3$ vértices, y sea k el número de conjuntos A_i obtenidos con el procedimiento ENCONTRAR_ A_i . Entonces la descomposición convexa Γ de P_n obtenida al aplicar ENCONTRAR_ Γ cumple

$$|\Gamma| \leq \frac{3n}{2} - c.$$

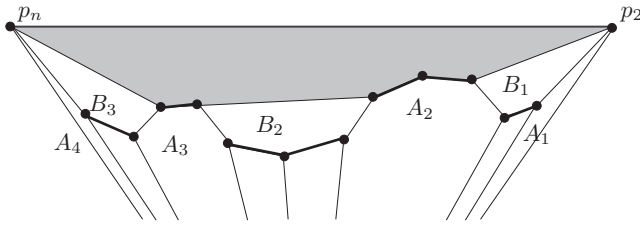


Figura 9. Colección P_n sin aristas en \mathcal{U} .

Demostración. Sea P_n una colección de puntos en posición general, con c vértices en $Conv(P_n)$, sea k el número de conjuntos A_i obtenidos por el procedimiento ENCONTRAR_ A_i , y sea Γ la descomposición convexa inducida por ENCONTRAR_ Γ .

Observación 1. k alcanza el valor máximo, $\frac{n}{2}$, cuando n es par y p_i tiene etiqueta “-”, para $i = 3, 5, 7, \dots, n - 1$, y p_j tiene etiqueta “+”, $j = 4, 6, \dots, n - 2$.

Probaremos nuestro resultado por inducción sobre c . El caso base será $c = 3$; por el lema anterior, $|\Gamma| \leq n + k - c$, y por la Observación 1,

$$|\Gamma| = n + k - c \leq n + \frac{n}{2} - c = \frac{3n}{2} - c.$$

Supongamos que el resultado se cumple para todo $c \geq 3$. Probaremos que también se cumple para $c + 1$. Sea P_n una colección de n puntos con $c + 1$ en su cierre convexo y Γ la descomposición convexa obtenida de haber aplicado el procedimiento ENCONTRAR_ Γ . Etiquetaremos los vértices de $Conv(P_n)$ en el sentido contrario de las manecillas del reloj de manera que $q_1 = p_1, q_2 = p_2, \dots, q_{c+1} = p_n$. Haremos $R = P_n \cap Conv(\{q_1, q_c, q_{c+1}\})$ y $P = (P_n \setminus R) \cup \{q_1, q_c\}$.

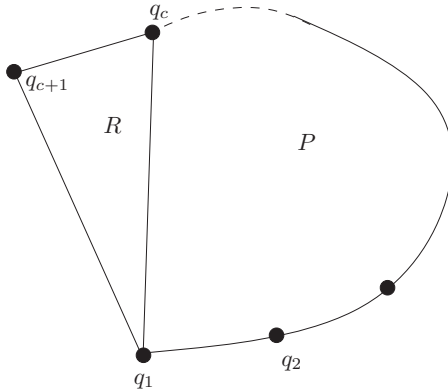


Figura 10. P_n con P y R .

Sea A_q el A_i tal que $q_c \in A_q$, y sea γ el polígono inducido por A_q . Diremos que en P hay q conjuntos A_i y haremos $\gamma_P = P \cap \gamma$. En cuanto a R , tenemos que hay $k - q + 1$ conjuntos A_i y haremos $\gamma_R = R \cap \gamma$ (véase la Figura 11).

Sean Γ_P y Γ_R las descomposiciones convexas de P y R respectivamente. Observemos que

$$\Gamma = (\Gamma_P \setminus \gamma_P) \cup (\Gamma_R \setminus \gamma_R) \cup \gamma.$$

Así $|\Gamma| = (|\Gamma_P| - 1) + (|\Gamma_R| - 1) + 1$. Aplicando inducción en P y R , tenemos que $|\Gamma| = (|P| + q - c) - 1 + (|R| + (k - q + 1) - 3) - 1 + 1$. Simplificando, y tomando en cuenta que $|P| + |R| = n + 2$, tenemos que $|\Gamma| = n + 2 + q - c + k - q - 3 = n + k - c - 1$.

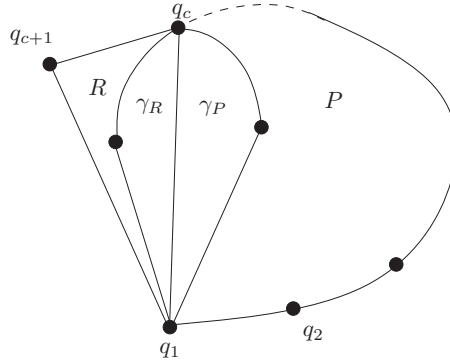


Figura 11. P , R y $\gamma = \gamma_P \cup \gamma_R$.

Finalmente, por la Observación 1 tenemos que si P_n tiene $c + 1$ vértices en $Conv(P_n)$ entonces $|\Gamma| \leq \frac{3n}{2} - (c + 1)$.

Con esto probamos que para toda colección P_n con c elementos en $Conv(P_n)$ el procedimiento ENCONTRAR_Γ arroja una descomposición convexa Γ , donde

$$|\Gamma| \leq \frac{3n}{2} - c. \quad \square$$

Este resultado es importante, ya que encontramos una descomposición convexa específica de P_n de las cuales, hasta ahora, por [11], se sabía únicamente de su existencia.

4. Conclusiones

Hemos dado un algoritmo para encontrar una descomposición convexa específica de una colección de puntos en el plano en posición general. Queremos mejorar la cotas de K. Hosono [10] o al menos igualarla. Daremos las siguientes definiciones para plantear una idea.

Definición 4.1. Sea T una triangulación de P_n y e una arista en T . Si e es la arista común a dos triángulos cuya unión es un cuadrilátero convexo Q , entonces llamaremos a e *arista girable*. Girar e es borrarla y reemplazarla por la otra diagonal de Q .

Definición 4.2. Sean e y e' dos aristas girables en una triangulación T , y sean Q y Q' los cuadriláteros que las contienen respectivamente. Diremos que e y e' son *girables simultáneamente* si los interiores de Q y Q' son ajenos.

Inicialmente intentamos remover aristas girables simultáneamente. J. Galtier, F. Hurtado, M. Noy, S. Perennes y J. Urrutia [6] prueban que el número de aristas es al menos $\frac{n}{6}$. Al removerlas obtenemos una descomposición convexa con $\frac{5n}{3} - c - 2$ triángulos y $\frac{n}{6}$ cuadriláteros, es decir $\frac{11n}{6} - c - 2$ elementos. Podemos aplicar este razonamiento a \mathcal{U} , pero no tenemos con certeza la cardinalidad del número de triángulos en esta región.

Referencias

- [1] Aichholzer O. and Krasser H., “The point set order type data base: A collection of applications and results”, in *Proc. 13th Canadian Conference on Computational Geometry*, Waterloo, Ontario, Canada, (2001), 17-20.
- [2] Boná M., *A Walk Through Combinatorics. An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific, 2006.
- [3] Cormen T., Leiserson C.E., Rivest R.L. and Stein C., *Introduction to Algorithms*, McGraw-Hill, Boston, 2001.
- [4] Erdős P. and Szekeres G., “A combinatorial problem in geometry”, *Compositio Math.* 2 (1935), 463-470.
- [5] García-López J. and Nicolás C., “Planar point sets with large minimum convex partitions”, in *Proc. 22nd Euro. Workshop on Comput. Geom.*, Delphi, Greece, (2006), 51-54.
- [6] Galtier J., Hurtado F., Noy M., Pérennes S. and Urrutia J., “Simultaneous Edge Flipping in Triangulations”, *Internat. J. Comput. Geom. Appl.* 13 (2003), no. 2, 113-133.
- [7] Gerken T., “Empty convex hexagons in planar point sets”, *Discrete Comput. Geom.* 39 (2008), no. 1-3, 239-272.
- [8] Harborth H., “Konvexe Fünfecke in ebenen Punktmengen”, *Elem. Math.* 33 (1978), no. 5, 116-118.
- [9] Horton J.D., “Sets with no empty convex 7-gons”, *Canad. Math. Bull.* 26 (1983), no. 4, 482-484.
- [10] Hosono K., “On convex decompositions of a planar point set”, *Discrete Math.* 309 (2009), no. 6, 1714-1717.
- [11] Neumann V., Rivera-Campo E. and Urrutia J., “A note on convex decompositions of a set of points in the plane”, *Graphs Combin.* 20 (2004), no. 2, 223-231.
- [12] Overmars M., *Finding sets of points without empty convex 6-gons*, *Discrete Comput. Geom.* 29 (2003), 153-158.
- [13] Tóth G. and Valtr P., “Note on the Erdős-Szekeres theorem”, *Discrete Comput. Geom.* 19 (1998), no. 3, 457-459.
- [14] Urrutia J., “Open-problem session”, in *10th Canadian Conference on Computational Geometry*, Montreal, Canada, (1998).