Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 31, No. 2, 2013, pág. 165–180

Algunas propiedades de la independencia condicionada

Miguel A. Marmolejo L.*, Andrés F. Muñoz-Tello

Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas, Cali, Colombia.

Resumen. El objetivo de este artículo es el de establecer algunas propiedades nuevas de la independencia condicionada de una familia de clases de eventos. De una parte, se generalizan algunos de los resultados de Van Putten y Van Schuppen [15], que consideran el caso de una familia con dos elementos, y, de otra parte, se generalizan resultados conocidos sobre familias de clases de eventos independientes. Como aplicación, se dan algunas propiedades de la independencia condicionada de una familia de variables aleatorias.
Palabras claves: Esperanza condicionada, independencia condicionada.
MSC2010: 60A05, 97K50, 60G99.

Some properties of conditional independence

Abstract. The aim of this paper is to establish some new properties of the conditional independence of a family of classes of events. On the one hand, we generalize some of the results by Van Putten and Van Schuppen [15], who considered the case of families with two elements, and, on the other hand, we generalize known results on independents families of classes of events. As an application, we give some properties of the conditional independence in a family of random variables.
Keywords: Conditional expectation, conditional independence.

1. Introducción

Este trabajo versa sobre la relación de independencia condicionada, la cual se describe a continuación (ver Definición 2.5). Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de eventos. Se dice que la familia $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ es $\mathcal{G}$-condicionalmente independiente (o $\mathcal{G}$-independiente), en símbolos: $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, si para

* Autor para correspondencia: *E-mail*: `mimarmol@univalle.edu.co`
Recibido: 9 de marzo de 2013, Aceptado: 25 de julio de 2013.

cada subconjunto finito $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de I y cada escogencia $E_{i_j} \in \mathcal{E}_{i_j}$; $j = 1, 2, \dots, k$, se cumple que

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) \ \ c.s.$$

La anterior relación juega un papel importante en la probabilidad y en la estadística. En particular, la relación

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$$

de la $\mathcal{G}$-independencia de dos sub-σ-álgebras $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ de $\mathcal{F}$ interviene en la definición y estudio de las familias de σ-álgebras markovianas, de los procesos markovianos (ver el Capítulo XIV de Loève [7]) y de los procesos recíprocos o campos de Márkov (ver Jamison [6]). En estadística, la $\mathcal{G}$-independencia de dos sub-σ-álgebras interviene en el estudio de la relación entre los conceptos de suficiencia e invarianza (ver Basu y Pereira [3], Nogales y Oyola [11] y Nogales *et al.* [12]).

En lo que se refiere a la $\mathcal{G}$-independencia de dos σ-álgebras: $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, el problema principal que abordan Van Putten y Van Schuppen [15] es el de dar condiciones necesarias o suficientes para que al efectuar cierto tipo de operaciones (hacer más fina o más gruesa a $\mathcal{F}_1$, hacer más fina o más gruesa a $\mathcal{G}$, cambiar la medida de probabilidad $P(\cdot)$), se preserve la relación de independencia condicionada. Ahora bien, si se considera una tercera σ-álgebra $\mathcal{F}_3$, puede suceder que se verifiquen las relaciones de $\mathcal{G}$-independencia dos a dos: $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$; $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_3 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ y $\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, pero que no se verifique la relación $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

De otra parte, en el último decenio se han reportado versiones condicionadas de algunos resultados clásicos de probabilidad que involucran la independencia condicionada de sucesiones de variables aleatorias, el Lema de Borel-Cantelli, la Desigualdad de Kolmogórov, la Ley Fuerte de los Grandes Números y el Teorema del Límite Central, entre otros (ver Majerek *et al.* [8], Majerek y Zieba [9], [10] , Grzenda y Zieba [5] y Prakasa Rao [14]).

Estos hechos motivan investigar sobre propiedades de la $\mathcal{G}$-independencia de una familia $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ de sub-σ-álgebras, en lugar de dos sub-σ-álgebras $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$; este es el objetivo de este trabajo. Así, de una parte, se busca generalizar algunos de los resultados de Van Putten y Van Schuppen (caso $I = \{1, 2\}$) y, de otra, se busca generalizar algunos resultados conocidos sobre familias de eventos independientes (caso $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$).

El plan del artículo es como sigue: en la Sección 2 se revisan las definiciones de independencia, independencia condicionada dado un evento e independencia condicionada dada una σ-álgebra. La sección central es la tercera; aquí se aborda el problema de la invarianza de la relación de independencia condicionada. En la Subsección 3.1 se consideran los cambios en la familia de clases de eventos $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$, en la Subsección 3.2 los cambios en la σ-álgebra condicionante $\mathcal{G}$ y en la Subsección 3.3 los cambios en la medida de probabilidad $P(\cdot)$. Finalmente, en la Sección 4 se presentan algunos resultados sobre la independencia condicionada de una familia de variables aleatorias.

2. Independencia condicionada

En esta sección se revisan las definiciones de independencia, independencia condicionada dado un evento e independencia condicionada dada una σ-álgebra. En lo que sigue, los eventos, las clases de eventos y las variables aleatorias se refieren al espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y $\mathcal{G}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Para indicar que dos variables aleatorias X y Y son iguales casi seguramente, se escribe $X = Y$ c.s. o $X = Y$ P–c.s. (casi seguramente respecto de la medida de probabilidad P).

Definición 2.1 (Independencia)**.** Se dice que los eventos $E_1, E_2, \dots, E_n$ son independientes (en símbolos: $E_1, E_2, \dots, E_n \perp\!\!\!\perp$) si para cada subconjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, donde $k \geq 2$, se cumple

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j}).$$

Se dice que una familia de clases de eventos $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ es independiente (en símbolos: $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp$) si para cada subconjunto finito $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de I, $k \geq 2$, y cada escogencia $E_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, E_{i_2} \in \mathcal{E}_{i_2}, \dots, E_{i_k} \in \mathcal{E}_{i_k}$, se tiene $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k} \perp\!\!\!\perp$.

Ahora bien, si B es un evento de probabilidad positiva y $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ indica la probabilidad condicionada del evento A dado el evento B, entonces $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot \mid B))$ es también un espacio de probabilidad. La independencia en este último espacio se denomina independencia condicionada dado el evento B, o independencia local sobre B. De forma concreta, se tiene la siguiente definición.

Definición 2.2 (Independencia condicionada dado un evento)**.** Sea B un evento tal que $P(B) > 0$. Se dice que los eventos $E_1, E_2, \cdots, E_n \in \mathcal{F}$ son independientes condicionalmente dado el evento B (o localmente independientes sobre B), en símbolos: $E_1, E_2, \dots, E_n \perp\!\!\!\perp B$, si para cualquier subconjunto $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, $k \geq 2$, se cumple

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid B\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid B).$$

Se dice que una familia de clases de eventos $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ es localmente independiente sobre B, en símbolos: $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp B$, si para cada subconjunto finito $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de I, $k \geq 2$, y cada escogencia $E_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, E_{i_2} \in \mathcal{E}_{i_2}, \dots, E_{i_k} \in \mathcal{E}_{i_k}$, se tiene $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_k} \perp\!\!\!\perp B$.

Una cuestión que es importante plantear es la posible relación entre la independencia y la independencia condicionada dado un evento. Como se ilustra con el siguiente ejemplo, una no implica la otra.

Ejemplo 2.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de probabilidad tal que $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$ y $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$. En estas condiciones, tenemos:

(a) Los eventos $E_1 = \{1, 2\}$ y $E_2 = \{1, 3\}$ son independientes, pero no condicionalmente independientes dado $B = \{2, 3\}$, pues $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) = P(E_1)P(E_2)$ y

$$P\big(E_1 \cap E_2 \mid B\big) = 0 \neq \big(\tfrac{1}{2}\big)\big(\tfrac{1}{2}\big) = P(E_1 \mid B)P(E_2 \mid B).$$

(b) Los eventos $E_1 = \{1, 2, 3\}$ y $E_2 = \{2, 3, 4\}$ son condicionalmente independientes dado $B = \{2, 3\}$, pero no son independientes. En efecto, de una parte se tiene que $P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{2} \neq \big(\frac{3}{4}\big)\big(\frac{3}{4}\big) = P(E_1)P(E_2)$ y, de otra,

$$P(E_1 \cap E_2 \mid B) = 1 = P(E_1 \mid B)P(E_2 \mid B).$$

Más aún, en este caso, los eventos E_1 y E_2 no son condicionalmente independientes dado $B^c = \{1, 4\}$, debido a que

$$P(E_1 \cap E_2 \mid B^c) = 0 \neq \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = P(E_1 \mid B^c)P(E_2 \mid B^c).$$

A continuación se da la definición de esperanza condicionada dada una σ-álgebra. Para una revisión de esta definición y de las propiedades fundamentales de la esperanza condicionada, ver Billingsley [4], Shiryaev [17] o Williams [18]. En particular, en la Sección 3 se hará referencia a la lista de propiedades que aparece en la Sección 9.7 de Williams [18].

En lo que sigue, el término π-sistema se refiere a un sistema $\mathcal{S}$ de subconjuntos de Ω que sea cerrado para la intersección; esto es, $A, B \in \mathcal{S}$ implica $A \cap B \in \mathcal{S}$.

Teorema y Definición 2.4. Sean $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y X una variable aleatoria integrable. Entonces existe una variable aleatoria Y que es $\mathcal{G}$-medible y tal que para todo $G \in \mathcal{G}$ (equivalentemente, para todo G en un π-sistema que contenga a Ω y que genere a $\mathcal{G}$) se verifica

$$\int_G Y dP = \int_G X dP.$$

Más aún, si Y^* es otra variable aleatoria con estas propiedades, entonces $Y = Y^*$ c.s. Una variable aleatoria con las propiedades anteriores se denomina una versión de la esperanza condicionada de X dada $\mathcal{G}$, y se escribe $Y = E(X \mid \mathcal{G})$.

Si $A \in \mathcal{F}$, la probabilidad condicionada del evento A dada la σ-álgebra $\mathcal{G}$ se denota por $P(A \mid \mathcal{G})$ y se define por $P(A \mid \mathcal{G}) := E(I_A \mid \mathcal{G})$.

De acuerdo con la definición anterior, $P(A \mid \mathcal{G})$ es una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible tal que para cada $G \in \mathcal{G}$ se verifica c.s.

$$P(A \cap G) = \int_G I_A dP = \int_G P(A \mid \mathcal{G}) dP.$$

En particular, si $P(G) \in \{0, 1\}$ para todo $G \in \mathcal{G}$, entonces $P(A \mid \mathcal{G}) = P(A)$ c.s., pues para cada $G \in \mathcal{G}$ se cumple $P(A \cap G) = P(A)P(G)$.

Definición 2.5 (Independencia condicionada dada una σ-álgebra)**.** Dada una sub-σ-álgebra $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$, se dice que los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{F}$ son condicionalmente independientes dada $\mathcal{G}$ (o $\mathcal{G}$-independientes), en símbolos, $E_1, E_2, \ldots, E_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, si para cada subconjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $k \geq 2$, se cumple

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) \quad \text{c.s.}$$

De manera general, se dice que una familia de clases de eventos $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ es condicionalmente independiente dada $\mathcal{G}$ (o $\mathcal{G}$-independientes), en símbolos,

$$\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G},$$

si para cada subconjunto finito $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ del conjunto de índices I, $k \geq 2$, y cada escogencia $E_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, E_{i_2} \in \mathcal{E}_{i_2}, \ldots, E_{i_k} \in \mathcal{E}_{i_k}$, se tiene $E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

La $\mathcal{G}$-independencia de una sucesión finita de clases de eventos $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$,…,$\mathcal{E}_n$; $n \geq 2$, también se denota por $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

Observación 2.6. Sean $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$ una familia de clases de eventos y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Tenemos:

(1) Las definiciones de independencia y de $\mathcal{G}$-independencia coinciden cuando $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$ (o cuando $P(G) \in \{0,1\}$ para todo $G \in \mathcal{G}$), pues en este caso, para cada evento A, $P(A \mid \mathcal{G}) = P(A)$ c.s.

(2) Si $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{G}$ para cada $i \in I$, entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, pues en este caso, para cada $E_i \in \mathcal{E}_i$ se tiene $P(E_i \mid \mathcal{G}) = 1_{E_i}$ c.s. Por lo tanto, siempre se cumplen $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \sigma\big(\bigcup_{i \in I} \mathcal{E}_i\big)$ y $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}$.

(3) Si $I = \{1, 2\}$, vale la implicación $[\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{G}$ ó $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}]$. En efecto, si $E_1 \in \mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{G}$ y $E_2 \in \mathcal{E}_2$, entonces

$$P(E_1 \cap E_2 \mid \mathcal{G}) = 1_{E_1} P(E_2 \mid \mathcal{G}) = P(E_1 \mid \mathcal{G}) P(E_2 \mid \mathcal{G}) \quad \text{c.s.}$$

En especial, siempre se cumplen las relaciones $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{E}_1)$, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{E}_2)$ y $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2)$.

(4) Si $\mathcal{E}_i \sqcap \mathcal{G} := \{E_i \cap G : E_i \in \mathcal{E}_i, G \in \mathcal{G}\}$, entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ si y sólo si $\{\mathcal{E}_i \sqcap \mathcal{G}\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Esto se sigue del hecho de que para cada $E_i \cap G \in \mathcal{E}_i \sqcap \mathcal{G}$ se verifica

$$P(E_i \cap G \mid \mathcal{G}) = 1_G P(E_i \mid \mathcal{G}) \quad \text{c.s.}$$

3. Propiedades de la independencia condicionada

En la relación de independencia condicionada intervienen tres objetos, a saber: la familia de clases de eventos $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$, la σ-álgebra condicionante $\mathcal{G}$ y la medida de probabilidad $P(\cdot)$. En lo que sigue, se dan condiciones necesarias o suficientes para que se preserve la independencia condicionada, cuando hay modificaciones en cada uno de estos objetos. Para una revisión cuando $I = \{1, 2\}$, se remite al lector al artículo de Van Putten y Van Schuppen [15] y a las referencias ahí citadas. Algunos de los resultados de esta sección también se pueden considerar como generalizaciones de los establecidos para clases de eventos independientes (ver por ejemplo las Secciones 5.1 y 5.2 de Bauer [2]).

3.1. Cambios en la familia de clases de eventos $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I}$

Es claro que si $\{\mathcal{E}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ y si $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{E}_i$ para cada $i \in I$, entonces $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. El siguiente teorema establece que la relación de independencia condicionada se preserva cuando cambiamos cada clase $\mathcal{E}_i$ por el sistema de Dynkin generado por ella, esto es, el menor sistema de Dynkin que contiene a $\mathcal{E}_i$. Un sistema $\mathcal{D}$ de subconjuntos de Ω es un sistema de Dynkin si contiene a Ω y verifica las condiciones: $A, B \in \mathcal{D} \wedge A \subseteq B \Rightarrow (B - A) \in \mathcal{D}$; para cada sucesión disjunta $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}$, se cumple $\biguplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$.

Teorema 3.1. *Sea $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de eventos. Si $\mathcal{D}(\mathcal{E}_i)$ es el sistema de Dynkin generado por $\mathcal{E}_i$, entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ si y sólo si $\{\mathcal{D}(\mathcal{E}_i)\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por la definición de independencia condicionada se puede suponer que I es finito, $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. Si $\mathcal{D}_1 := \big\{A \in \mathcal{F} : \{A\}, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}\big\}$, entonces $\mathcal{D}_1$ es un sistema de Dynkin. En efecto, sea $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ un subconjunto de $\{2, 3, \ldots, n\}$ y sean $E_{i_j} \in \mathcal{E}_{i_j}$, $j = 1, 2, 3, \ldots, k$.

(1) $\Omega \in \mathcal{D}_1$, pues c.s. se cumple

$$\begin{aligned} P\Big(\Omega \bigcap (\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}) \mid \mathcal{G}\Big) &= P(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid \mathcal{G}) = 1 \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) \\ &= P(\Omega \mid \mathcal{G}) \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}). \end{aligned}$$

(2) Si $A, B \in \mathcal{D}_1$ con $A \subseteq B$, entonces $B - A \in \mathcal{D}_1$. En efecto, c.s. se verifica

$$\begin{aligned} P\Big((B-A) \bigcap (\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}) \mid \mathcal{G}\Big) &= P\Big(B \bigcap (\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}) - A \bigcap (\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}) \mid \mathcal{G}\Big) \\ &= P(B \mid \mathcal{G}) \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) - P(A \mid \mathcal{G}) \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) \\ &= (P(B \mid \mathcal{G}) - P(A \mid \mathcal{G})) \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) = P(B - A \mid \mathcal{G}) \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}). \end{aligned}$$

(3) Si $\{A_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_1$ es una sucesión disjunta, entonces $\big(\biguplus_{m=1}^{\infty} A_m\big) \in \mathcal{D}_1$. En efecto, c.s. se tiene

$$\begin{aligned} P\Big((\biguplus_{m=1}^{\infty} A_m) \bigcap (\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}) \mid \mathcal{G}\Big) &= P\Big(\biguplus_{m=1}^{\infty} (A_m \bigcap (\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}) \mid \mathcal{G})\Big) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P\Big(A_m \bigcap (\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}) \mid \mathcal{G}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m \mid \mathcal{G}) \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) \\ &= P\Big(\biguplus_{m=1}^{\infty} A_m \mid \mathcal{G}\Big) \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Por hipótesis, $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{D}_1$. De aquí que $\mathcal{D}(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{D}_1$ y $\mathcal{D}(\mathcal{E}_1), \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Repitiendo el argumento $n-1$ veces, se concluye que $\mathcal{D}(\mathcal{E}_1), \mathcal{D}(\mathcal{E}_2), \ldots, \mathcal{D}(\mathcal{E}_n) \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

($\Leftarrow$) Basta tener presente que $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E}_i)$ para cada $i \in I$. ☑

Corolario 3.2. *Sea $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una familia de π-sistemas, $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{F}$, y sea $\sigma(\mathcal{E}_i)$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}_i$. Entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ si y sólo si $\{\sigma(\mathcal{E}_i)\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.*

Demostración. El resultado se sigue del Teorema 3.1, pues es conocido (ver el Teorema 1.2.3 de Bauer [2]) que si $\mathcal{E}_i$ es un π-sistema, entonces $\sigma(\mathcal{E}_i) = \mathcal{D}(\mathcal{E}_i)$. ☑

En el corolario 3.2 no se puede omitir que $\mathcal{E}_i$ es un π-sistema, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de probabilidad tal que $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$ y $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, $i = 1,2,3,4$. Si $\mathcal{E}_1 = \{\{1,2\}\}$, $\mathcal{E}_2 = \{\{1,3\}\{1,4\}\}$ y $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$, entonces $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ son independientes, esto es, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. También, por el Teorema 3.1, $\mathcal{D}(\mathcal{E}_1), \mathcal{D}(\mathcal{E}_2) \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Sin embargo, aquí $\mathcal{E}_2$ no es un π-sistema, y se puede ver que $\sigma(\mathcal{E}_1)$ y $\sigma(\mathcal{E}_2)$ no son $\mathcal{G}$-independientes; para ello basta tomar los eventos $\{1,2\} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$ y $\{3\} \in \sigma(\mathcal{E}_2) \equiv \mathcal{F}$.

Corolario 3.4. *Sean $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}_i \vee \mathcal{G}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}_i \cup \mathcal{G}$. Entonces $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ si y sólo si $\{\mathcal{F}_i \vee \mathcal{G}\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.*

Demostración. Puesto que $\mathcal{F}_i \sqcap \mathcal{G} = \{F_i \cap G : F_i \in \mathcal{F}_i, G \in \mathcal{G}\}$ es un π-sistema que genera la σ-álgebra $\mathcal{F}_i \vee \mathcal{G}$, el resultado se sigue del numeral (4) de la Observación 2.6 y del Corolario 3.2. ☑

Corolario 3.5. *Sea $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una familia de eventos tal que cada $\mathcal{E}_i$ es un π-sistema y tal que $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una partición de I, esto es, $I_j \neq \varnothing$ y $\biguplus_{j\in J} I_j = I$. Si $\mathcal{F}_j := \sigma\big(\bigcup_{i\in I_j} \mathcal{E}_i\big)$, entonces $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.*

Demostración. Para cada $j \in J$, sea $\mathcal{E}_j^*$ el sistema de eventos de la forma $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \cdots \cap E_{i_k}$, donde $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ es un subconjunto finito no vacío de I_j y $E_{i_r} \in \mathcal{E}_{i_r}$, $r = 1,2,\ldots,k$. Entonces $\mathcal{E}_j^*$ es un π-sistema tal que $\sigma(\mathcal{E}_j^*) = \mathcal{F}_j$. Ahora, como $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, por la definición de $\mathcal{G}$- independencia se tiene $\big\{\mathcal{E}_j^*\big\}_{j\in J} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Por el Corolario 3.2, $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. ☑

El Corolario 3.5 se usa para demostrar parte del siguiente teorema, donde se dan condiciones equivalentes a la $\mathcal{G}$-independencia de una familia de σ-álgebras.

Teorema 3.6. *Sean $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}_i, i \in I$, sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Para $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, $k \geq 1$, sean $\mathcal{F}_J := \sigma\big(\bigcup_{j=1}^{k} \mathcal{F}_{i_j}\big)$ y $\mathcal{F}^J := \sigma\big(\bigcup_{i\in I-J} \mathcal{F}_i\big)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

(b) *Para cada $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, $k \geq 1$, y cada escogencia $F_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$, $j = 1,2,\ldots,k$, se cumple*

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J\Big) \quad c.s. \tag{1}$$

(c) *Para cada $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, $k \geq 1$, y cada variable aleatoria integrable X que sea $\mathcal{F}_J$-medible, se cumple*

$$E(X \mid \mathcal{G}) = E(X \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J) \quad c.s. \tag{2}$$

(d) Para cada $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, $k \geq 1$ y cada conjunto de variables aleatorias integrables $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_k}$ tal que X_{i_j} sea $\mathcal{F}_{i_j}$-medible, $j = 1, 2, \ldots, k$, y $\prod_{j=1}^k X_{i_j}$ sea integrable, se cumple

$$E\Big(\prod_{j=1}^k X_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^k E(X_{i_j} \mid \mathcal{G}) \quad c.s. \tag{3}$$

Demostración. $[(a) \Rightarrow (b)]$ La hipótesis y el Corolario 3.5 implican

$$\mathcal{F}_{i_1}, \mathcal{F}_{i_2}, \ldots, \mathcal{F}_{i_k}, \mathcal{F}^J \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}.$$

Si $\mathcal{E} := \big\{F \cap G : F \in \mathcal{F}^J, G \in \mathcal{G}\big\}$, entonces $\mathcal{E}$ es un π-sistema que contiene a Ω tal que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{F}^J \vee \mathcal{G}$. El resultado se sigue del hecho de que para todo $E = F \cap G \in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_E P\Big(\bigcap_{j=1}^k F_{i_j} \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J\Big) dP &= P\Big(\big(\bigcap_{j=1}^k F_{i_j}\big) \cap E\Big) = P\Big(\big(\bigcap_{j=1}^k F_{i_j}\big) \cap F \cap G\Big) \\
&= \int_G P\Big(\big(\bigcap_{j=1}^k F_{i_j}\big) \cap F \mid \mathcal{G}\Big) dP \\
&= \int_G P(F \mid \mathcal{G}) \Big(\prod_{j=1}^k P(F_{i_j} \mid \mathcal{G})\Big) dP \\
&= \int_G E(I_F \mid \mathcal{G}) \Big(\prod_{j=1}^k E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G})\Big) dP \\
&= \int_G E\Big(I_F \big(\prod_{j=1}^k E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}\big)\Big) dP \\
&= \int_G I_F \Big(\prod_{j=1}^k E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G})\Big) dP \\
&= \int_{G \cap F} \prod_{j=1}^k E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G}) dP \\
&= \int_E E\Big(\prod_{j=1}^k I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G}\Big) dP = \int_E P\Big(\bigcap_{j=1}^k F_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) dP.
\end{aligned}$$

$[(b) \Rightarrow (c)]$ Por hipótesis, la igualdad (2) vale para variables aleatorias de la forma $X = I_{F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k}}$, donde $F_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Como el sistema de eventos $\{F_{i_1} \cap F_{i_2} \cap \cdots \cap F_{i_k} : F_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}, j = 1, 2, \ldots, k\}$ es un π-sistema que genera a $\mathcal{F}_J$, entonces (2) vale para variables aleatorias de la forma $X = I_F$, donde $F \in \mathcal{F}_J$. Por la linealidad de la esperanza condicionada (ver (c), Sección 9.7 de Williams [18]), (2) vale para variables aleatorias simples $X = \sum_{i=1}^m a_i 1_{F_i}$ que sean $\mathcal{F}_J$-medibles. Para X arbitraria que sea $\mathcal{F}_J$-medible, existe una sucesión de variables aleatorias simples $X_1, X_2, \ldots$, tales que X_n

es $\mathcal{F}_J$- medible, $|X_n| \leq |X|$ y $X_n(\omega) \to X(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$. Por el Teorema de la Convergencia Dominada Condicional (ver (g), Sección 9.7 de Williams [18]) se tiene

$$E(X \mid \mathcal{G}) = \lim_{n\in\mathbb{N}} E(X_n \mid \mathcal{G}) = \lim_{n\in\mathbb{N}} E(X_n \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J) = E(X \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J) \quad \text{c.s.}$$

$[(c) \Rightarrow (d)]$ Por la propiedad de la torre de la esperanza condicionada y por hipótesis, c.s. se cumple

$$\begin{aligned}
E\Big(\prod_{j=1}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) &= E\Big[E\Big(\prod_{j=1}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G} \vee \sigma(X_{i_1})\Big) \mid \mathcal{G}\Big] \\
&= E\Big[X_{i_1} E\Big(\prod_{j=2}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G} \vee \sigma(X_{i_1})\Big) \mid \mathcal{G}\Big] \\
&= E\Big\{X_{i_1} E\Big[E\Big(\prod_{j=2}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^{J-\{i_1\}}\Big) \mid \mathcal{G} \vee \sigma(X_{i_1})\Big] \mid \mathcal{G}\Big\} \\
&= E\Big\{X_{i_1} E\Big[E\Big(\prod_{j=2}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) \mid \mathcal{G} \vee \sigma(X_{i_1})\Big] \mid \mathcal{G}\Big\} \\
&= E\Big[X_{i_1} E\Big(\prod_{j=2}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) \mid \mathcal{G}\Big] \\
&= E(X_{i_1} \mid \mathcal{G}) E\Big[\prod_{j=2}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big].
\end{aligned}$$

Continuando con este proceso se llega a

$$E\Big(\prod_{j=1}^{k} X_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^{k} E(X_{i_j} \mid \mathcal{G}) \ \text{ c.s.}$$

$[(d) \Rightarrow (a)]$ Basta tomar $X_{i_j} = I_{F_{i_j}}$, donde $F_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$. ☑

Corolario 3.7. *Sea $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$. Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, entonces para cualesquiera $i, j \in I$, $i \neq j$, se cumple $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{G}$. En particular se tiene $\bigcap_{i\in I} \mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{G}$.*

Demostración. Sean $i, j \in I$, $i \neq j$. De la definición de $\mathcal{G}$-independencia es claro que $\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. Por el Teorema 3.6 se concluye que para $A \in \mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$,

$$P(A \mid \mathcal{G}) = P(A \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_j) = E(I_A \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_j) = I_A,$$

es decir, I_A es $\mathcal{G}$-medible. ☑

3.2. Cambios en la σ-álgebra condicionante $\mathcal{G}$

En general, al hacer más fina o más gruesa la σ-álgebra condicionante $\mathcal{G}$, la relación de independencia condicionada no se preserva; es decir, si $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ y $\mathcal{F}_i$ son sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, $i \in I$, se tiene:

(i) $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^*$ no implican $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}^*$.

(ii) $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}^*$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^*$ no implican $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.8. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de probabilidad tal que $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$ y $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, $i = 1,2,3,4$.

(a) Sean $E_1 = \{1,2\}$, $E_2 = \{1,3\}$ y $B = \{2,3\}$. Sean ahora $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{E_1\})$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(\{E_2\})$, $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$ y $\mathcal{G}^* = \sigma(\{B\})$. Como los eventos E_1 y E_2 son independientes, entonces $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son $\mathcal{G}$-independientes. No obstante, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ no son $\mathcal{G}^*$-independientes, pues

$$P(E_1 \cap E_2 \mid \mathcal{G}^*) = \tfrac{1}{2}1_{B^c} \neq \left(\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}\right) = P(E_1 \mid \mathcal{G}^*)P(E_2 \mid \mathcal{G}^*).$$

(b) Sean $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{3\}$ y $B = \{1,2\}$. Sean ahora $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{E_1\})$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(\{E_2\})$, $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$ y $\mathcal{G}^* = \sigma(\{B\}$. Como los eventos E_1 y E_2 no son independientes, entonces $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ no son $\mathcal{G}$-independientes. Sin embargo, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son $\mathcal{G}^*$-independientes. Para mostrarlo, es suficiente ver que se cumple la igualdad

$$P(E_1 \cap E_2 \mid \mathcal{G}^*) = 0 = \left(\tfrac{1}{2}1_B\right)\left(\tfrac{1}{2}1_{B^c}\right) = P(E_1 \mid \mathcal{G}^*)P(E_2 \mid \mathcal{G}^*).$$

No obstante, la $\mathcal{G}$-independencia de dos sub-σ-álgebras se preserva cuando hay cierta relación entre las σ-álgebras en cuestión (ver Van Putten y Van Schuppen [15]). En especial se tienen las propiedades siguientes.

Teorema 3.9. *Sean $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^*$ y $\mathcal{F}_i$ sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, $i = 1,2$. Entonces:*

(1) Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G} \perp\!\!\!\perp$, entonces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

(2) Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{F}_1$, entonces $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}^*$.

Demostración. (1) Esto es consecuencia del literal (b) del Teorema 3.6, pues para $F_1 \in \mathcal{F}_1$ se tiene $P(F_1 \mid \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}) = P(F_1) = P(F_1 \mid \mathcal{G})$.

(2) Por hipótesis y por el literal (b) del Teorema 3.6, para cada $F_2 \in \mathcal{F}_2$ se tiene

$$\begin{aligned} P(F_2 \mid \mathcal{G}^* \vee \mathcal{F}_1) &= P(F_2 \mid \mathcal{F}_1) = P(F_2 \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}_1) \\ &= P(F_2 \mid \mathcal{G}) = P(P(F_2 \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}^*) \\ &= P(P(F_2 \mid \mathcal{F}_1) \mid \mathcal{G}^*) = P(F_2 \mid \mathcal{G}^*), \end{aligned}$$

lo que, en virtud del Teorema 3.6, significa que $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}^*$. ☑

El siguiente teorema establece que si $\mathcal{G}$ es la σ-álgebra generada por una descomposición $\mathcal{D}$, entonces la $\mathcal{G}$-independencia equivale a la independencia local sobre cada átomo de $\mathcal{D}$.

Teorema 3.10. *Sean $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de eventos y $\mathcal{D} = \{D_1, D_2, \dots\}$ una descomposición de Ω; esto es, $D_n \in \mathcal{F}$, $P(D_n) > 0$, $D_n \cap D_m = \varnothing$ si $n \neq m$, $n, m = 1, 2, \dots$ y $\Omega = \biguplus_{n\geq 1} D_n$. Si $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{D})$, entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$ si y sólo si $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp D_n$ para $n = 1, 2, \dots$.*

Demostración. Para cada $A \in \mathcal{F}$ se tiene

$$P(A \mid \mathcal{G}) = \sum_{n\geq 1} P(A \mid D_n) I_{D_n} \quad \text{c.s.}$$

Así, para cada subconjunto finito no vacío $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de I y cada escogencia $E_{i_j} \in \mathcal{E}_{i_j}$, $j = 1, 2, \dots, k$,

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \sum_{n\geq 1} P\Big(\bigcap_{J=1}^{k} E_{i_j} \mid D_n\Big) I_{D_n} \quad \text{c.s.}$$

y

$$\prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) = \sum_{n\geq 1} \Big(\prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid D_n)\Big) I_{D_n} \quad \text{c.s.}$$

Por lo tanto, la igualdad

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}) \quad \text{c.s.}$$

equivale a que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumpla la igualdad

$$P\Big(\bigcap_{J=1}^{k} E_{i_j} \mid D_n\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid D_n) \quad \text{c.s.}$$ ☑

En el Teorema 3.10, puede suceder que $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ sea $\sigma(\mathcal{D})$-independiente, pero que $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ no sea $\sigma(\{D_n\})$-independiente para cada $n = 1, 2, \dots$. Esto se ilustra con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.11. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de probabilidad tal que $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$ y $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Sean ahora $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $E_2 = \{2, 3, 4\}$, $\mathcal{E}_1 = \{E_1\}$, $\mathcal{E}_2 = \{E_2\}$, $\mathcal{D} = \{D_1 = \{1\}, D_2 = \{4\}, D_3 = \{2, 3\}\}$, $\mathcal{G} = \sigma(D_3)$.

Es inmediato verificar que $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(\mathcal{D})$. Sin embargo, $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ no son $\mathcal{G}$-independientes. En efecto,

$$P(E_1 \cap E_2 \mid D_3^c) = 0 \neq (1/2)(1/2) = P(E_1 \mid D_3^c) P(E_2 \mid D_3^c).$$

Teorema 3.12. *Sean $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ una familia de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$. Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, entonces para cada subconjunto $J := \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ de I, $k \geq 2$, se cumple $\mathcal{F}_{i_1}, \mathcal{F}_{i_2}, \dots, \mathcal{F}_{i_k} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J$, donde $\mathcal{F}^J := \sigma\big(\bigcup_{i\in I-J} \mathcal{F}_i\big)$.*

Demostración. Sea $F_{i_j} \in \mathcal{F}_{i_j}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$. Por el Teorema 3.6, c.s. se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J\Big) &= P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(F_{i_j} \mid \mathcal{G}) \\ &= \prod_{j=1}^{k} E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G}) = \prod_{j=1}^{k} E(E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J) \\ &= \prod_{j=1}^{k} E(E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^{\{i_j\}}) \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J) = \prod_{j=1}^{k} E(I_{F_{i_j}} \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J) \\ &= \prod_{j=1}^{k} P(F_{i_j} \mid \mathcal{G} \vee \mathcal{F}^J). \end{aligned}$$ ☑

Corolario 3.13. *Si $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ es una familia independiente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, entonces para cada subconjunto $J := \{i_1, .i_2, \ldots, i_k\}$ de I, $i \geq 2$, se cumple $\mathcal{F}_{i_1}, \mathcal{F}_{i_2}, \ldots, \mathcal{F}_{i_k} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^J$, donde $\mathcal{F}^J := \sigma\big(\bigcup_{i\in I-J} \mathcal{F}_i\big)$.*

Demostración. Basta tomar $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$ en el teorema anterior. ☑

Observación 3.14. Para ver que el recíproco del corolario anterior no es válido, es suficiente tomar $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}$ para todo $i \in I$.

El siguiente teorema está inspirado en el Ejercicio 4.2.2 de Nualart [13], donde se considera el caso $I = \{1, 2\}$.

Teorema 3.15. *Sean $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una familia de eventos $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{F}$, $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}_\infty = \sigma(\text{lím}_{n\to\infty} \mathcal{G}_n)$. Si $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_\infty$.*

Demostración. Sean $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ un subconjunto finito no vacío de I y $E_{i_j} \in \mathcal{E}_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid \mathcal{G}_n\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}_n) \quad \text{c.s.}$$

De otra parte, si $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (respectivamente decreciente), entonces para cada $A \in \mathcal{F}$ se verifica que $X = \{X_n := E(I_A \mid \mathcal{G}_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una $\{\mathcal{G}_n\}$-martingala (resp., $\{\mathcal{G}_n\}$-martingala inversa) cerrada (ver Teorema 6.6.2 y Teorema 6.6.3 de Ash y Dolèans-Dade [1]). Por lo tanto

$$E(I_A \mid \mathcal{G}_n) \longrightarrow E(I_A \mid \mathcal{G}_\infty) \quad \text{c.s.}$$

De esto se sigue que

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j} \mid \mathcal{G}_\infty\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(E_{i_j} \mid \mathcal{G}_\infty) \quad \text{c.s.}$$ ☑

3.3. Cambios en la medida de probabilidad $P(\cdot)$

Sean P y Q medidas de probabilidad en el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, $\mathcal{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathcal{F}$ y $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de eventos $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{F}$. En este contexto abordamos la cuestión de la relación entre la $\mathcal{G}$-independencia de $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ bajo P y bajo Q. En lo que sigue, la esperanza con respecto a estas medidas se denotará por $E_P(\cdot)$ y $E_Q(\cdot)$, respectivamente. También, la $\mathcal{G}$-independencia de $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I}$ con respecto a estas medidas se denotará por $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \underset{P}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$ y $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \underset{Q}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$, respectivamente.

Lema 3.16. *Si $Q \ll P$ y $dQ = Y dP$, entonces para cada variable aleatoria X que sea Q-integrable se cumple*

$$E_P(XY \mid \mathcal{G}) = E_Q(X \mid \mathcal{G}) E_P(Y \mid \mathcal{G}), \quad P\text{– c.s.}$$

Demostración. Para cada $G \in \mathcal{G}$ se verifica

$$\begin{aligned} \int_G E_P(XY \mid \mathcal{G}) dP &= \int_G XY dP = \int_G X dQ = \int_G E_Q(X \mid \mathcal{G}) dQ \\ &= \int_G E_Q(X \mid \mathcal{G}) Y dP = \int_G E_P(E_Q(X \mid \mathcal{G}) Y \mid \mathcal{G}) dP \\ &= \int_G E_Q(X \mid \mathcal{G}) E_P(Y \mid \mathcal{G}) dP. \end{aligned}$$

De esto se sigue que $E_P(XY \mid \mathcal{G}) = E_Q(X \mid \mathcal{G}) E_P(Y \mid \mathcal{G})$, $\quad P$– c.s. ☑

Observación 3.17. Si en el Lema 3.16 se toman $Y = \frac{1_B}{P(B)}$ y $X = 1_A$, donde $A, B \in \mathcal{F}$ y $P(B) > 0$, entonces se obtiene

$$P(A \cap B \mid \mathcal{G}) = Q(A \mid \mathcal{G}) P(B \mid \mathcal{G}), \quad P\text{– c.s.}$$

Proposición 3.18. *Si $Q \ll P$ y $dQ = Y dP$, donde Y es una variable aleatoria $\mathcal{G}$-medible, entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \underset{P}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$ implica $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \underset{Q}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$.*

Demostración. Por el Lema 3.16, y por la $\mathcal{G}$-medibilidad de Y, para cada $A \in \mathcal{F}$ lo siguiente se cumple P– c.s.:

$$\begin{aligned} Y E_P(I_A \mid \mathcal{G}) &= E_P(I_A Y \mid \mathcal{G}) = E_Q(I_A \mid \mathcal{G}) E_P(Y \mid \mathcal{G}) \\ &= E_Q(I_A \mid \mathcal{G}) Y = Y E_Q(I_A \mid \mathcal{G}). \end{aligned}$$

Por tanto, sobre el evento $\{Y > 0\} \in \mathcal{G}$ se tiene $E_Q(I_A \mid \mathcal{G}) = E_P(I_A \mid \mathcal{G})$, es decir,

$$E_Q(I_A \mid \mathcal{G}) = E_P(I_A \mid \mathcal{G}) \quad Q\text{– c.s.}$$ ☑

Corolario 3.19. *Si $dQ = \dfrac{I_B}{P(B)} dP$ y si $B \in \mathcal{G}$, entonces $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \underset{P}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$ implica $\{\mathcal{E}_i\}_{i\in I} \underset{Q}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$.*

En el Corolario 3.19 no se puede omitir que $B \in \mathcal{G}$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.20. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ el espacio de probabilidad tal que $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $\mathcal{F} = \wp(\Omega)$ y $P(\{i\}) = \frac{1}{4}$, $i = 1,2,3,4$. Sean ahora $E_1 = \{1,2\}$, $E_2 = \{1,3\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{E_1\})$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(\{E_2\})$, $\mathcal{G} = \{\varnothing, \Omega\}$, $B = \{2,3\}$ y $dQ = \dfrac{1_B}{P(B)} dP$.

De acuerdo con el Ejemplo 2.3, los eventos E_1 y E_2 son independientes en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y por tanto $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \underset{P}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$. Sin embargo, $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ no son $\mathcal{G}$-independientes en $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$, pues

$$Q(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_2 \mid B) \neq P(E_1 \mid B) P(E_2 \mid B) = Q(E_1) Q(E_2).$$

El siguiente resultado involucra una familia finita de clases de eventos y una estructura especial del evento B.

Proposición 3.21. *Si $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n \underset{P}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$ y $dQ = \dfrac{1_B}{P(B)} dP$, donde $B = \bigcap_{i=1}^n B_i$ con $B_i \in \mathcal{E}_i$ para $i = 1,2,\ldots,n$, entonces $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n \underset{Q}{\perp\!\!\!\perp} \mathcal{G}$.*

Demostración. Por la hipótesis, $P(B \mid \mathcal{G}) = P\big(\bigcap_{i=1}^n B_i \mid \mathcal{G}\big) = \prod_{i=1}^n P(B_i \mid \mathcal{G})$. De acuerdo con la Observación 3.17, para cada $E_i \in \mathcal{E}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$,

$$Q(E_i \mid \mathcal{G}) = \frac{P(E_i \cap B \mid \mathcal{G})}{P(B \mid \mathcal{G})} = \frac{P(E_i \cap B_i \mid \mathcal{G})}{P(B_i \mid \mathcal{G})}.$$

Ahora, si $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$, $k \geq 2$, y $E_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, E_{i_2} \in \mathcal{E}_{i_2}, \ldots, E_{i_k} \in \mathcal{E}_{i_k}$, entonces

$$\begin{aligned} Q\Big(\bigcap_{j=1}^k E_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) &= \frac{P\Big(B \cap \big(\bigcap_{j=1}^k E_{i_j}\big) \mid \mathcal{G}\Big)}{P(B \mid \mathcal{G})} \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{P(E_{i_j} \cap B_{i_j} \mid \mathcal{G})}{P(B_{i_j} \mid \mathcal{G})} = \prod_{j=1}^k Q(E_{i_j} \mid \mathcal{G}). \end{aligned}$$ ☑

4. Independencia condicionada de variables aleatorias

En esta sección se usan los resultados previos para establecer algunas propiedades de la independencia condicionada de una familia de variables aleatorias.

Definición 4.1. Se dice que una familia de variables aleatorias $\{X_i\}_{i\in I}$ es $\mathcal{G}$-independiente, en símbolos: $\{X_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, si la familia de σ-álgebras $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ generadas por ellas es $\mathcal{G}$-independiente.

Proposición 4.2. *Sea $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de variables aleatorias integrables. Entonces:*

(1) $\{E(X_i \mid \mathcal{G})\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

(2) $\{X_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G} \Longleftrightarrow \{X_i - E(X_i \mid \mathcal{G})\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

Demostración. (1) Esto se sigue del literal (2) de la Observación 2.6.

(2) [$\Rightarrow$] Por la hipótesis y por el Corolario 3.4, $\{\sigma(X_i) \vee \mathcal{G}\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. El resultado se sigue de la inclusión $\sigma(X_i - E(X_i \mid \mathcal{G})) \subseteq \sigma(X_i) \vee \mathcal{G}$.

[$\Leftarrow$] Por La hipótesis y por el Corolario 3.4, $\{\sigma(X_i - E(X_i \mid \mathcal{G})) \vee \mathcal{G}\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$. El resultado se sigue de la inclusión $\sigma(X_i) \subseteq \sigma(X_i - E(X_i \mid \mathcal{G})) \vee \mathcal{G}$. ☑

Proposición 4.3. *Para una familia* $\{X_i\}_{i\in I}$ *de variables aleatorias las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(1) $\{X_i\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

(2) Para toda familia de funciones borelianas $\{g_i\}_{i\in I}$, $\{g_i(X_i)\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$.

(3) $\{\pi(X_i)\}_{i\in I} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}$, *donde* $\pi(X_i) := \{\{X_i \leq x\};\ \ x \in \mathcal{R}\}$.

(4) Para cada $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, $k \geq 1$, *y cada conjunto de variables aleatorias integrables* $Y_{i_1}, Y_{i_2}, \ldots, Y_{i_k}$, *tal que* Y_{i_j} *sean* $\sigma(X_{i_j})$*-medible,* $j = 1, 2, \ldots, k$, *y* $\prod_{j=1}^{k} Y_{i_j}$ *integrable, se cumple*

$$E\Big(\prod_{j=1}^{k} Y_{i_j} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^{k} E(Y_{i_j} \mid \mathcal{G}) \quad c.s.$$

Demostración. [(1) $\Rightarrow$ (2)] Por la definición de $\mathcal{G}$-independencia, pues para cada $i \in I$, $\sigma(g_i(X_i)) \subseteq \sigma(X_i)$.

[(2) $\Rightarrow$ (1)] Basta tomar $g_i(x) = x$, $i \in I$.

[(1) $\Leftrightarrow$ (3)] Esta equivalencia se sigue del Corolario 3.2, pues $\pi(X_i)$ es un π-sistema que genera a $\sigma(X_i)$.

[(1) $\Leftrightarrow$ (4)] Este resultado se sigue del literal (e) del Teorema 3.6. ☑

Observación 4.4. Según la Proposición 4.3, la $\mathcal{G}$-independencia de la familia de variables aleatorias $\{X_i\}_{i\in I}$ equivale a la condición de que para cada subconjunto $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ de I y cada escogencia $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \mathcal{R}$, $k \geq 2$, se verifica

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^{k} \{X_{i_j} \leq x_j\} \mid \mathcal{G}\Big) = \prod_{j=1}^{k} P(X_{i_j} \leq x_j \mid \mathcal{G}) \ \text{ c.s.}$$

Esta equivalencia también aparece en Roussas [16]; su demostración, que la divide en tres lemas, usa argumentos de clases monótonas.

Conclusiones

En este artículo se han establecido algunas propiedades generales de la relación de independencia condicionada que, junto con las especiales de Van Putten y Van Schuppen [15], conforman una lista suficiente para abordar diversos problemas que involucran la noción de independencia condicionada.

Referencias

[1] Ash R.B. and Dolèans-Dade C.A., *Probability and Measure Theory*, Second Edition, Academic Press, San Diego, 2000.

[2] Bauer H., *Probability Theory*, Walter de Guyter, New York, 1972.

[3] Basu D. and Pereira C.A.B., "Conditional independence in statistics", *Sankhyā* Ser. A 45 (1983), no. 3, 324–337.

[4] Billingsley P., *Probability and Measure*, Jhon Wiley and Sons. Inc., New York, 1979.

[5] Grzenda W. and Zieba W., "Conditional Central Limit Theorems", *Int. Math. Forum* 3 (2008), no. 31, 1521–1528.

[6] Jamison B., "Reciprocal processes: the stationary Gaussian case", *Ann. Math. Statist.* 41 (1970), no. 5, 1624–1630.

[7] Loève M., *Probability Theory II*, Four Edition, Springer-Verlag, New York, 1978.

[8] Majerek D., Nowak W. and Zieba W., "Conditional Strong Law of Large Number", *Int. J. Pure and Appl. Math.* 20 (2005), no. 2, 143–156.

[9] Majerek D. and Zieba W., "Conditional Martingales", *Acta Math. Vietnam.* 32 (2007), no. 1, 41–50.

[10] Majerek D. and Zieba W., "Conditional Version of Marcinkiewicz-Zygmunt's Theorem", *Int. Math. Forum* 3 (2008), no. 25, 1233–1240.

[11] Nogales A.G. and Oyola J.A., "Some remarks on sufficiency, invariance and conditional independence", *Ann. Statist.* 24 (1996), no. 2, 906–909.

[12] Nogales A.G., Oyola J.A. and Pérez P., "On conditional independence and the relationship between sufficience and invariance under the Bayesian point of view", *Statist. Probab. Lett.* 46 (2000), no. 1, 75–84.

[13] Nualart D., *The Malliavin Calculus and Related Topics*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[14] Prakasa Rao B.L.S., "Conditional independence, conditional mixing and conditional association", *Ann. Inst. Statist. Math.* 61 (2009), no. 2, 441–460.

[15] Van Putten C. and Van Schuppen J.H., "Invariance properties of the conditional independence relation", *Ann. Probab.* 13 (1985), no. 3, 934–945.

[16] Roussas G., "On conditional independence, mixing, and association", *Stoch. Anal. Appl.* 26 (2008), no. 6, 1274–1309.

[17] Shiryaev A.N., *Probability*, Second Edition, Springer, New York, 1996.

[18] Williams D., *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.