Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 2, 2011, pág. 109–126

Una introducción a los continuos homogéneos

Sergio Macías*

Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Exterior, Ciudad Universitaria, México D.F., C.P. 04510, MÉXICO.

Resumen. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Un continuo X es *homogéneo* si para cualesquiera dos de sus puntos x_1 y x_2 de X, existe un homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(x_1) = x_2$. Presentaremos un poco de historia, ejemplos y propiedades de este tipo de continuos. Daremos una demostración del Teorema de descomposición aposindética de Jones.
Palabras claves: Círculo de pseudoarcos, continuo, cubo de Hilbert, curva universal de Menger, espacio homogéneo, función monótona, función $\mathcal{T}$ de Jones, pseudoarco.
MSC2000: 54C60, 54F20.

An introduction to homogeneous continua

Abstract. A continuum is a compact, connected, metric space. A continuum X is homogeneous provided that for each pair of points x_1 and x_2 of X, there exists a homeomorphism $h\colon X \twoheadrightarrow X$ such that $h(x_1) = x_2$. We present a bit of history, examples and properties of this kind of continua. We give a proof of Jones's Aposyndetic Decomposition Theorem.
Keywords: Circle of pseudo-arcs, continuum, Hilbert cube, Menger universal curve, homogeneous space, monotone map, Jones's set function $\mathcal{T}$, pseudo-arc.

1. Introducción

La teoría de los continuos es parte importante de la topología general. En [11] hay un recuento de su historia hasta 1998. Una clase importante de continuos es la de los continuos homogéneos. En el presente trabajo hablaremos un poco sobre esta clase de continuos. El objetivo es dar una demostración del *Teorema de descomposición aposindética de Jones*, el cual nos dice que para entender los continuos homogéneos basta entender los que son aposindéticos y los que son indescomponibles.

Primero, en la segunda sección, presentaremos un poco de la historia de los continuos homogéneos, principalmente la relacionada con la curva cerrada simple. Posteriormente,

* Autor para correspondencia: *E-mail*: sergiom@matem.unam.mx.

Recibido: 7 de septiembre de 2011, Aceptado: 7 de diciembre de 2011.

en la tercera sección, mencionaremos otros continuos homogéneos. Más tarde, en la cuarta sección, definiremos la función $\mathcal{T}$ de Jones y daremos algunas de sus propiedades. En la sección cinco enunciamos lo que se conoce, dentro de la teoría de los continuos, como el Teorema de Effros, y daremos algunas de sus consecuencias. Finalmente, en la sección seis, damos los requisitos que nos faltan para enunciar y demostrar el Teorema de descomposición aposindética de Jones.

Dados un espacio métrico X y un subconjunto A de X, $Int_X(A)$, $Cl_X(A)$ y $Fr_X(A)$ denotan el interior, la cerradura y la frontera de A con respecto a X. Si, además, d es la métrica en X y $\varepsilon > 0$, entonces $\mathcal{V}^d_\varepsilon(A)$ denota a la bola abierta con centro en A y de radio ε. En el caso en que $A = \{x\}$, escribiremos $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x)$ en vez de $\mathcal{V}^d_\varepsilon(\{x\})$. Cualquier concepto no definido se encuentra en [31].

2. Un poco de historia

Daremos un poco de la historia de los continuos homogéneos principalmente relacionada con la curva cerrada simple. Empezamos con la definición de nuestros objetos de estudio y presentamos algunos ejemplos sencillos.

Definición 2.1. Un *continuo* es un espacio métrico, compacto y conexo. Un *subcontinuo* es un continuo contenido en un espacio.

Definición 2.2. Un continuo X es *descomponible* si existen dos subcontinuos propios A y B de X tales que $X = A \cup B$. Los continuos que no son descomponibles son llamados *indescomponibles.*

Definición 2.3. Una función continua $h: X \twoheadrightarrow Y$ entre espacios es un *homeomorfismo* si es biyectiva y la función inversa $h^{-1}: Y \twoheadrightarrow X$ también es continua.

En 1920 W. Sierpiński [50], en el primer volumen de la revista *Fundamenta Mathematicae*, propone la siguiente definición:

Definición 2.4. Un espacio X es *homogéneo* si para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de X, existe un homeomorfismo $h: X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(x_1) = x_2$.

En 1920, también en el primer volumen de la revista *Fundamenta Mathematicae*, B. Knaster y C. Kuratowski [28] preguntan:

Pregunta 2.5. ¿Es la curva cerrada simple el único continuo homogéneo del plano?

En 1924 S. Mazurkiewicz [40] prueba:

Teorema 2.6. *Si X es un continuo localmente conexo y homogéneo del plano, entonces X es una curva cerrada simple.*

Posteriormente, en 1937, Z. Waraszkiewicz [51] demuestra:

Teorema 2.7. *Si X es un subcontinuo homogéneo de dimensión uno de la esfera unitaria $\mathcal{S}^2$, entonces X es una curva cerrada simple.*

Basado en el Teorema 2.7, en 1944 G. Choquet [12] prueba:

Teorema 2.8. *Existe una caracterización de los subconjuntos compactos y homogéneos del plano.*

Notemos que lo anterior fue realizado en Europa. Por otra parte, en Estados Unidos de América sucedía lo siguiente:

En 1921, S. Mazurkiewicz [39] pregunta:

Pregunta 2.9. ¿Es el arco el único continuo del plano que es homeomorfo a todos sus subcontinuos no degenerados?

En 1948, E. E. Moise [43] demuestra:

Teorema 2.10. *Existe un continuo indescomponible del plano el cual es homeomorfo a todos sus subcontinuos no degenerados. Este espacio es conocido como el pseudoarco.*

Se cuenta que cuando E. E. Moise estaba presentando la construcción del pseudoarco en el seminario de R. L. Moore, F. B. Jones y R H Bing estaban presentes y le comentaron a E. E. Moise que su ejemplo parecía ser homogéneo, a lo que E. E. Moise dijo que él creía que no.

En 1948, R H Bing [4] prueba:

Teorema 2.11. *El pseudoarco es homogéneo.*

Posteriormente, en 1949, E. E. Moise [44] da una demostración del Teorema 2.11.

Las comunicaciones no eran tan rápidas en aquella época como lo son en la actualidad. En algún momento llegó a manos de R. L. Moore y R H Bing el artículo de G. Choquet y le preguntaron a F. B. Jones qué sabía de G. Choquet, porque la caracterización de los subconjuntos compactos del plano dada por G. Choquet no incluía al pseudoarco. F. B. Jones contestó que G. Choquet era un matemático respetable.

F. B. Jones leyó el artículo de G. Choquet y no encontró ningún error. Entonces decidió leer el artículo de Z. Waraszkiewicz y allí fue donde encontró el problema.

Resulta que Z. Waraszkiewicz confundió los siguientes conceptos:

Definición 2.12. Sea X un continuo. Un punto x de X es un *punto de corte* si $X \setminus \{x\}$ no es conexo.

Definición 2.13. Sea X un continuo. Un punto x de X es un *punto de corte débil* si existen dos puntos x_1 y x_2 de X tales que cualquier subcontinuo W de X tal que $\{x_1, x_2\} \subset W$, cumple que $x \in W$.

Al estudiar los dominios complementarios de continuos planos, F. B. Jones [21], en 1941, definió:

Definición 2.14. Un continuo X es *aposindético en p con respecto a q* si existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{q\}$. El continuo X es *aposindético en p* si es aposindético en p con respecto a cualquier otro punto. Finalmente, X es *aposindético* si X es aposindético en cada uno de sus puntos.

La palabra *aposindesis* fue construida por el Dr. Leon del Departamento de Letras Clásicas de la Universidad de Texas en Austin. Tiene tres raíces griegas: *apo*, que significa "lejos", *sin* que quiere decir "junto" y *deo* que significa "envolver"; así: *El continuo X es aposindético en p con respecto a q quiere decir que X envuelve a p lejos de q.*

Como en los continuos aposindéticos las nociones de punto de corte y punto de corte débil coinciden, en 1949 F. B. Jones [23] prueba que:

Teorema 2.15. *Si X es un continuo aposindético y homogéneo del plano, entonces X es una curva cerrada simple.*

En 1951, H. J. Cohen [13] prueba los siguientes dos resultados:

Teorema 2.16. *Si X es un continuo arcoconexo y homogéneo del plano, entonces X es una curva cerrada simple.*

Teorema 2.17. *Si X es un continuo homogéneo del plano que contiene una curva cerrada simple, entonces X es una curva cerrada simple.*

Continuando su estudio de los continuos homogéneos, en 1955, F. B. Jones [24] demuestra:

Teorema 2.18. *Si X es un continuo descomponible, no aposindético y homogéneo, entonces X admite una descomposición continua $\mathcal{G}$ tal que:*

(1) *los elementos de $\mathcal{G}$ son continuos homogéneos mutuamente homeomorfos;*

(2) *si $G \in \mathcal{G}$ y K es un subcontinuo de X tal que $G \cap K \neq \emptyset$, entonces $G \subset K$ o $K \subset G$ (i.e. G es un continuo terminal);*

(3) *$X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo y aposindético.*

Ejemplo 2.19. Consideremos el cubo unitario $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Dividamos cada cara del cubo en nueve cuadrados iguales y hacemos una perforación utilizando el interior del cuadrado de en medio. Repetimos el proceso anterior en cada uno de los cuarenta y ocho cuadrados restantes y así sucesivamente (ver Figura 1). Al espacio que resulta de la intersección de los espacios construidos se le llama *la curva universal de Menger.* Al ser una intersección anidada de continuos, la curva de Menger es un continuo.

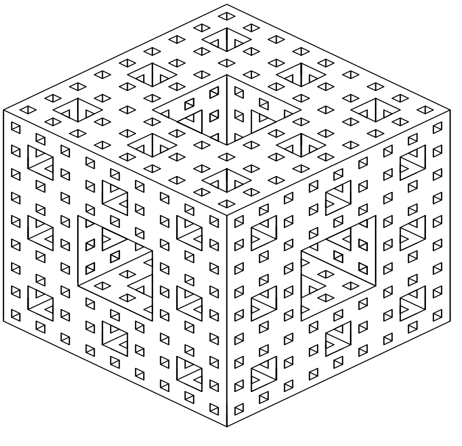

Figura 1. La curva universal de Menger.

En 1958 R. D. Anderson ([1] y [2]) prueba:

Teorema 2.20. *Si X es la curva universal de Menger y x un punto de X, entonces existe un subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, y para cualquier número natural n y cualesquiera dos subconjuntos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$ de U existe un homeomorfismo $h' \colon U \twoheadrightarrow U$ tal que $h'(x_j) = x'_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ y h' puede ser extendida a un homeomorfismo $h \colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h|_{X \setminus U} = 1_{X \setminus U}$. En particular, X es un continuo homogéneo.*

Teorema 2.21. *Si X es un continuo homogéneo, localmente conexo y de dimensión uno, entonces X es una curva cerrada simple o la curva universal de Menger.*

Como la pregunta de B. Knaster y C. Kuratowski, Pregunta 2.5, tuvo una respuesta negativa, es natural preguntarse:

Pregunta 2.22. ¿Cuáles son los continuos homogéneos del plano?

Intentando contestar la Pregunta 2.22, en 1959 R H Bing y F. B. Jones [9] construyen el *círculo de pseudoarcos*. Éste es un continuo del plano que admite una descomposición continua en pseudoarcos de tal forma que el espacio cociente es una curva cerrada simple. Además demuestran que:

Teorema 2.23. *El círculo de pseudoarcos es un continuo homogéneo del plano, el cual es único.*

Para enunciar el siguiente resultado relacionado con la homogeneidad, necesitamos la definición de continuo encadenable.

Definición 2.24. Un continuo X es *encadenable*, si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cubierta abierta finita $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ de X tal que $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ si y sólo si $|j - k| \leq 1$ y $\text{diám}(U_j) < \varepsilon$ para cada $j, k \in \{1, \ldots, n\}$.

Ya en 1951, R H Bing [5] había probado:

Teorema 2.25. *Todo continuo encadenable se puede encajar en el plano.*

En 1959, R H Bing demuestra que:

Teorema 2.26. *Si X es un continuo encadenable y homogéneo, entonces X es el pseudoarco.*

En 1960, R H Bing prueba que:

Teorema 2.27. *Si X es un continuo homogéneo del plano que contiene un arco, entonces X es una curva cerrada simple.*

Finalmente, en 1975, C. L. Hagopian [19] demuestra que:

Teorema 2.28. *Si X es un continuo homogéneo del plano que contiene un subcontinuo Y tal que todo subcontinuo no degenerado de Y es descomponible, entonces X es una curva cerrada simple.*

Otra contribución importante de C. L. Hagopian al estudio de los continuos homogéneos es una consecuencia de un teorema originalmente demostrado por E. G. Effros [15]:

Teorema 2.29. *Si X es un continuo homogéneo, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de X, con $d(x_1, x_2) < \delta$, existe un homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(x_1) = x_2$ y para cada $z \in X$, $d(z, h(z)) < \varepsilon$.*

También en 1975, F. B. Jones [25] usa el Teorema 2.29 para dar una prueba más simple del Teorema 2.27.

3. Otros ejemplos

Haciendo una construcción similar a la de E. E. Moise [43], R H Bing [6] construyó un continuo que llamó *pseudocírculo*, y preguntó:

Pregunta 3.1. ¿Es el pseudocírculo homogéneo?

De manera independiente L. Fearnley [17] y J. T. Rogers Jr. [46] probaron que:

Teorema 3.2. *El pseudocírculo no es homogéneo.*

Necesitamos el siguiente concepto:

Definición 3.3. Sean X un continuo y $\mathcal{H}(X)$ el grupo de homeomorfismos de X. Dado un punto x en X, la *órbita* de x en X es el conjunto $\{z \in X \mid z = h(x) \text{ para alguna } h \in \mathcal{H}(X)\}$.

Notación. Si X es un continuo y x es un punto de X, entonces la órbita de x se denota por $\mathcal{O}_X(x)$.

Notemos que si X es un continuo homogéneo, entonces $\mathcal{G} = \{\mathcal{O}_X(x) \mid x \in X\}$ sólo tiene un elemento.

J. A. Kennedy y J. T. Rogers Jr. [26] demuestran que el pseudocírculo "está muy lejos de ser homogéneo":

Teorema 3.4. *El pseudocírculo tiene una cantidad no numerable de órbitas bajo la acción de su grupo de homeomorfismos.*

Ejemplo 3.5. Sea T_0 un toro sólido; dentro de T_0 consideremos otro toro sólido, T_1, de tal forma que dé dos vueltas con respecto a T_0. Dentro de T_1 tomamos un tercer toro sólido, T_2, de tal manera que dé dos vueltas con respecto a T_1 y cuatro vueltas respecto a T_0. Continuando de esta forma, tenemos una sucesión $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ de toros sólidos tales que $T_{n+1} \subset T_n$ y T_{n+1} da dos vueltas respecto a T_n. Sea $\Sigma_2 = \cap_{n=0}^{\infty} T_n$. A Σ_2 se le conoce como el *solenoide diádico*. Observemos que si hacemos un corte transversal al toro sólido T_0, obtenemos un conjunto homeomorfo al conjunto de Cantor. De hecho, "localmente" Σ_2 es homeomorfo al producto del conjunto de Cantor por un intervalo abierto.

Observación 3.6. El número dos no tiene ningún privilegio en el Ejemplo 3.5. Podemos construir muchos soleoides, por ejemplo, dando tres vueltas siempre; cinco vueltas siempre; dando $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$ vueltas, etc. De hecho, hay una cantidad no numerable de solenoides diferentes [41].

D. van Dantzig [14] muestra que:

Teorema 3.7. *Los solenoides son continuos homogéneos.*

En 1977 C. L. Hagopian [20] caracteriza los solenoides:

Teorema 3.8. *Un continuo homogéneo X es un solenoide si y sólo si todos los subcontinuos propios y no degenerados de X son arcos.*

En 1961 J. H. Case [10] mostró que la curva universal de Menger puede ser combinada con una construcción solenoidal para obtener una nueva clase de continuous homogéneos no localmente conexos conteniendo arcos. En 1983 J. T. Rogers Jr. [47] hace notar que el continuo de J. H. Case es aposindético. Combinando la curva universal de Menger con varias construcciones solenoidales, en 1985 P. Minc y J. T. Rogers Jr. [42] construyen otras curvas homogéneas modeladas por las de J. H. Case. También hay una cantidad no numerable de ejemplos de P. Minc y J. T. Rogers diferentes.

4. La función $\mathcal{T}$ de Jones

Vamos a estudiar una función, llamada $\mathcal{T}$, que F. B. Jones definió en su estudio de los continuos no aposindéticos [22]. En la lista de referencias se encuentran varias en las que se estudian tanto la función $\mathcal{T}$ de Jones como otras funciones también definidas en el conjunto potencia de un continuo [16], [18], [29], [30], [32], [33], [34], [35], [36], [37] y [38]. Como se verá en el Teorema 4.6, la función $\mathcal{T}$ está relacionada con la noción de aposindesis. Para esta función, necesitamos recordar:

Definición 4.1. Dado un espacio métrico y compacto X, el *conjunto potencia de X*, denotado por $\mathcal{P}(X)$, es:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \mid A \subset X\}.$$

El *hiperespacio de subconjuntos compactos y no vacíos de X*, denotado por 2^X, es:

$$2^X = \{A \in \mathcal{P}(X) \mid A \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

Observación 4.2. Sean X un espacio métrico y $A \in \mathcal{P}(X)$. Notemos que la cerradura de A en X satisface:

$$Cl_X(A) = X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un abierto } U \text{ de } X \text{ tal que } x \in U \subset X \setminus A\}.$$

La definición de la función $\mathcal{T}$ de Jones satisface una propiedad similar.

Definición 4.3. Sea X un espacio métrico y compacto. Definimos

$$\mathcal{T} \colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$$

como

$$\mathcal{T}(A) = X \setminus \{x \in X \mid \text{existe un subcontinuo } W \text{ de } X \text{ tal que}$$
$$x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A\}.$$

Observación 4.4. Sea X es un espacio métrico y compacto. Si A y $B \in \mathcal{P}(X)$ son tales que $A \subset B$, entonces $A \subset \mathcal{T}(A)$, $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(B)$ y $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) \subset \mathcal{T}(A \cup B)$.

La siguiente pregunta sigue abierta:

Pregunta 4.5. ¿Para qué continuos X se cumple que $\mathcal{T}(A) \cup \mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(A \cup B)$ para cualesquiera dos elementos A y B de 2^X?

El siguiente resultado caracteriza los continuos aposindéticos usando la función $\mathcal{T}$; su demostración es sencilla y se deja de ejercicio para el lector.

Teorema 4.6. *Un continuo X es aposindético si y sólo si $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$ para toda $x \in X$.*

La demostración del siguiente teorema es muy sencilla, por lo cual se omite.

Teorema 4.7. *Sea X un espacio métrico y compacto. Entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$ si y sólo si X tiene un número finito de componentes.*

Corolario 4.8. *Si X es un continuo entonces $\mathcal{T}(\emptyset) = \emptyset$.*

Una prueba del siguiente resultado puede ser encontrada en [45, 5.5].

Teorema 4.9. *Sean X un continuo y U un subconjunto propio, abierto y no vacío de X. Si K es una componente de $Cl_X(U)$ entonces $K \cap Fr_X(U) \neq \emptyset$.*

Teorema 4.10. *Sea X un continuo. Si W es un subcontinuo de X entonces $\mathcal{T}(W)$ es un subcontinuo de X.*

Demostración. Es claro de la definición que $\mathcal{T}(W)$ es cerrado. Veremos que $\mathcal{T}(W)$ es conexo.

Supongamos que $\mathcal{T}(W)$ no es conexo. Entonces existen dos subconjuntos cerrados, disyuntos y no vacíos A y B de X tales que $\mathcal{T}(W) = A \cup B$. Como W es conexo, supondremos que $W \subset A$. Como X es un espacio métrico y A y B son disyuntos, existe un subconjunto abierto U de X tal que $A \subset U$ y $Cl_X(U) \cap B = \emptyset$. Observemos que $\mathcal{T}(W) \cap Fr_X(U) = \emptyset$. En consecuencia, para cada $z \in Fr_X(U)$ existe un subcontino K_z de X tal que $z \in Int_X(K_z) \subset K_z \subset X \setminus W$. Como $Fr_X(U)$ es compacta, existe un número finito de puntos $z_1, \ldots, z_n$ en $Fr_X(U)$ tales que $Fr_X(U) \subset \cup_{j=1}^n Int_X(K_{z_j}) \subset \cup_{j=1}^n K_{z_j}$. Sea $V = U \setminus \left(\cup_{j=1}^n K_{z_j}\right)$. Notemos que $Y = X \setminus V = (X \setminus U) \cup \left(\cup_{j=1}^n K_{z_j}\right)$. Por el Teorema 4.9, Y tiene un número finito de componentes. Observemos que $B \subset X \setminus Cl_X(U) \subset X \setminus U \subset Y$. En particular, $B \subset Int_X(Y)$. Sean $b \in B$ y C la componente de Y que tiene a b. Entonces $b \in Int_X(C)$ y $C \cap W = \emptyset$. Esto implica que $b \in X \setminus \mathcal{T}(W)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{T}(W)$ es conexo. ☑

Ahora caracterizaremos a los continuos localmente conexos utilizando la función $\mathcal{T}$.

Teorema 4.11. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $\mathcal{T}(A) = A$ para toda $A \in 2^X$.*

Demostración. Supongamos que X es localmente conexo. Sea $A \in 2^X$. Entonces $X \setminus A$ es un subconjunto abierto de X. Sea $p \in X \setminus A$. Como X es un espacio métrico, existe un subconjunto abierto U de X tal que $p \in U \subset Cl_X(U) \subset X \setminus A$. Como X es localmente conexo, existe un subconjunto abierto y conexo V de X tal que $p \in V \subset U$. Como V es conexo, $Cl_X(V)$ es un subcontinuo de X tal que $p \in Int_X(Cl_X(V)) \subset Cl_X(V) \subset X \setminus A$. De lo anterior se tiene que $p \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. Así, resulta que $\mathcal{T}(A) \subset A$. Por la Observación 4.4, $A \subset \mathcal{T}(A)$. Por tanto, $\mathcal{T}(A) = A$.

Ahora supongamos que $\mathcal{T}(A) = A$ para toda $A \in 2^X$. Sean U un subconjunto propio y abierto de X, C una componente de U y $p \in C$. Notemos que $X \setminus U$ es cerrado en X, de donde $X \setminus U \in 2^X$. Por hipótesis, $\mathcal{T}(X \setminus U) = X \setminus U$. Como $p \in X \setminus (X \setminus U)$, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus (X \setminus U) = U$. Como C es la componente de U que tiene a p, resulta que $W \subset C$. Lo que implica que $p \in Int_X(C)$. De esta forma se tiene que C es un subconjunto abierto de X. Por tanto, X es localmente conexo. ☑

El Teorema 4.11 se puede mejorar de la siguiente manera (una prueba se encuentra en [31, 3.1.32]):

Teorema 4.12. *Un continuo X es localmente conexo si y sólo si $\mathcal{T}(W) = W$ para todo subcontinuo W de X.*

La prueba del siguiente resultado es simple y se omite.

Teorema 4.13. *Sean X y Y espacios métricos y compactos. Si $h\colon X \twoheadrightarrow Y$ es un homeomorfismo, entonces para toda $A \in 2^X$, $h(\mathcal{T}_X(A)) = \mathcal{T}_Y(h(A))$.*

5. El teorema de Effros

Enunciaremos, sin demostración, una consecuencia de un teorema originalmente probado por E. G. Effros [15] como parte de la teoría de las álgebras C^*. Una demostración topológica de este resultado se encuentra en el Capítulo 4 de [31]. C. L. Hagopian encontró este teorema de Effros y obtuvo una consecuencia muy importante dentro del estudio de los continuos homogéneos (Teorema 5.2).

Definición 5.1. Decimos que un espacio métrico X tiene la *propiedad de Effros* si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2 de X, con $d(x_1, x_2) < \delta$, existe un homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ que cumple con que $h(x_1) = x_2$ y para cada $z \in X$, $d(z, h(z)) < \varepsilon$. El número δ es llamado *un número de Effros* para la ε dada. Un homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ que satisface que para toda $z \in X$, $d(z, h(z)) < \varepsilon$, es llamado *ε-homeomorfismo.*

A continuación enunciamos la consecuencia del teorema demostrado por E. G. Effros [15] mencionado con anterioridad:

Teorema 5.2. *Si X es un continuo homogéneo, entonces tiene la propiedad de Effros.*

Ahora veremos algunas aplicaciones del Teorema 5.2.

Teorema 5.3. *Si X es un espacio métrico y conexo que tiene la propiedad de Effros, entonces X es un espacio homogéneo.*

Demostración. Sean x y y dos puntos distintos de X y $\varepsilon > 0$. Como X tiene la propiedad de Effros, sea $\delta > 0$ un número de Effros para la ε dada. Como X es conexo, existe un número finito de puntos $z_1 = x, \dots, z_{n-1}, z_n = y$ de X tales que $d(z_{j-1}, z_j) < \delta$ para toda $j \in \{2, \dots, n\}$. En consecuencia, dada $j \in \{2, \dots, n\}$, existe un homeomorfismo $h_j\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h_j(z_{j-1}) = z_j$. Entonces $h = h_n \circ \cdots \circ h_2$ es un homeomorfismo de X en sí mismo tal que $h(x) = y$. Por tanto, X es homogéneo. ☑

Corolario 5.4. *Un continuo X es homogéneo si y sólo si X tiene la propiedad de Effros.*

Teorema 5.5. *Si X es un continuo homogéneo, entonces para cada $A \in 2^X$, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(A)$.*

Demostración. Sea $A \in 2^X$. Por la Observación 4.4, tenemos que $\mathcal{T}(A) \subset \mathcal{T}(\mathcal{T}(A))$.

Si $\mathcal{T}(A) = X$ entonces $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(A)$. Supongamos que $\mathcal{T}(A) \neq X$. Sea $x \in X \setminus \mathcal{T}(A)$. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus A$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon < d(W, A)$ y $\mathcal{V}^d_\varepsilon(x) \subset Int_X(W)$. Como X es homogéneo, por el Teorema 5.2 existe un número de Effros $\delta > 0$ para la ε que tenemos. Sin pérdida de generalidad suponemos que $\delta < \varepsilon$.

Como W es compacto, existe un número finito de puntos $w_1, \dots, w_m$ en W tales que $W \subset \cup_{j=1}^m \mathcal{V}^d_\delta(w_j)$. Sea $j \in \{1, \dots, m\}$. Entonces para cada $z \in \mathcal{V}^d_\delta(w_j)$ existe un ε-homeomorfismo $h_z\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h_z(w_j) = z$. Para $z = w_j$, tomamos $h_z = 1_X$, la función identidad de X. Sea

$$M_j = Cl_X\left(\bigcup_{z \in \mathcal{V}^d_\delta(w_j)} h_z(W)\right).$$

Observemos que M_j es un subcontinuo de X tal que $w_j \in \mathcal{V}^d_\delta(w_j) \subset M_j \subset X \setminus A$. Sea $M = \cup_{j=1}^m M_j$. Entonces M es un subcontinuo de X tal que $W \subset \cup_{j=1}^m \mathcal{V}^d_\delta(w_j) \subset Int_X(M) \subset M \subset X \setminus A$. Como $Int_X(M) \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$, resulta que $x \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \mathcal{T}(A)$. En consecuencia, $x \in X \setminus \mathcal{T}(\mathcal{T}(A))$. Por tanto, $\mathcal{T}(\mathcal{T}(A)) = \mathcal{T}(A)$. ☑

6. El teorema de descomposición aposindética de Jones

Presentaremos una demostración del teorema de descomposición aposindética de Jones (Teorema 6.18), el cual nos dice que para entender a los continuos homogéneos basta entender a los que son aposindéticos y los que son indescomponibles.

Definición 6.1. Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Decimos que $\mathcal{G}$ es *semicontinua superiormente* si para cada $G \in \mathcal{G}$ y cada subconjunto abierto U de X tal que $G \subset U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $G \subset V$ y si $G' \in \mathcal{G}$ es tal que $G' \cap V \neq \emptyset$ entonces $G' \subset U$. Decimos que $\mathcal{G}$ es *semicontinua inferiormente* siempre que para cada $G \in \mathcal{G}$ y cualesquiera dos puntos x y y de G y cualquier subconjunto abierto U de X tal que $x \in U$, existe un subconjunto abierto V de X tal que $y \in V$ y si $G' \in \mathcal{G}$ es tal que $G' \cap V \neq \emptyset$ entonces $G' \cap U \neq \emptyset$. Finalmente, decimos que $\mathcal{G}$ es *continua* si $\mathcal{G}$ es tanto semicontinua superiormente como semicontinua inferiormente.

Una demostración del siguiente resultado se encuentra en [31, 1.2.23].

Teorema 6.2. *Sean X un espacio métrico y $\mathcal{G}$ una descomposición de X. Entonces $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente si y sólo si la función cociente $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ es abierta.*

El siguiente teorema nos indica que las imágenes de los conjuntos de un sólo punto bajo la función $\mathcal{T}$, definida en un continuo homogéneo, forman una descomposición.

Teorema 6.3. *Sea X un continuo homogéneno. Si $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$, entonces $\mathcal{G}$ es una descomposición de X.*

Demostración. Sea x un punto de X. Veremos que si $y \in \mathcal{T}(\{x\})$, entonces $\mathcal{T}(\{y\}) = \mathcal{T}(\{x\})$.

Sea $y \in \mathcal{T}(\{x\})$. De la Observación 4.4 y del Teorema 5.5, se sigue que $\mathcal{T}(\{y\}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{T}(\{x\})) = \mathcal{T}(\{x\})$.

Para mostrar que $\mathcal{T}(\{x\}) \subset \mathcal{T}(\{y\})$ usaremos un argumento de D. P. Bellamy y L. Lum que dieron en la prueba de [3, Lemma 5]. Esto es, encontraremos un punto x_0 de X tal que $\mathcal{T}(\{x_0\}) \subset \mathcal{T}(\{z\})$ para toda $z \in \mathcal{T}(\{x_0\})$. Entonces, por el Teorema 4.13, la homogeneidad de X nos asegurará que lo mismo es cierto para el punto x.

Daremos un orden parcial en $\mathcal{G}$ de la siguiente manera: $\mathcal{T}(\{z\}) < \mathcal{T}(\{w\})$ si $\mathcal{T}(\{z\}) \subset \mathcal{T}(\{w\})$. Sea $\mathcal{K} = \{\mathcal{T}(\{x_\lambda\})\}_{\lambda\in\Lambda}$ una cadena (conjuntista) de elementos de $\mathcal{G}$. Probaremos que $\mathcal{K}$ tiene una cota inferior en $\mathcal{G}$. Como cada $\mathcal{T}(\{x_\lambda\})$ es un continuo (Teorema 4.10) y $\mathcal{K}$ es una cadena, se tiene que $\cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(\{x_\lambda\}) \neq \emptyset$. Sea $x' \in \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(\{x_\lambda\})$. Por el argumento del segundo párrafo se obtiene que $\mathcal{T}(\{x'\}) \subset \mathcal{T}(\{x_\lambda\})$ para cada $\lambda \in \Lambda$, de donde, $\mathcal{T}(\{x'\}) \subset \cap_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}(\{x_\lambda\})$. De esta forma se tiene que $\mathcal{K}$ tiene una cota inferior. Por el Lema de Kuratowski-Zorn, $\mathcal{G}$ tiene un elemento minimal; esto es, existe un $x_0 \in X$ tal que para cada $z \in \mathcal{T}(\{x_0\})$, $\mathcal{T}(\{x_0\}) \subset \mathcal{T}(\{z\})$.

Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(x_0) = x$. Como $y \in \mathcal{T}(\{x\})$, por el Teorema 4.13, $h^{-1}(y) \in \mathcal{T}(\{x_0\})$. Por lo anterior, obtenemos que $\mathcal{T}(\{x_0\}) \subset \mathcal{T}(\{h^{-1}(y)\})$. De donde se sigue que: $\mathcal{T}(\{x\}) = h(\mathcal{T}(\{x_0\})) \subset h(\mathcal{T}(\{h^{-1}(y)\})) = \mathcal{T}(\{y\})$ (Teorema 4.13), lo que implica que $\mathcal{T}(\{x\}) \subset \mathcal{T}(\{y\})$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es una descomposición. ☑

Definición 6.4. Sean $\mathcal{G}$ una descomposición de un continuo X y $\mathcal{H}$ una familia de homeomorfismos de X en sí mismo. Decimos que $\mathcal{H}$ *respeta a* $\mathcal{G}$ si para cualesquiera dos elementos G_1 y G_2 de $\mathcal{G}$ y cualquier elemento h de $\mathcal{H}$, se tiene que $h(G_1) = G_2$ o $h(G_1) \cap G_2 = \emptyset$.

Teorema 6.5. *Sean X un continuo homogéneo y $\mathcal{G}$ una descomposición de X tal que los elementos de $\mathcal{G}$ son continuos. Si el grupo de homeomorfismos, $\mathcal{H}(X)$, de X respeta a $\mathcal{G}$, entonces se cumple lo siguiente:*

(1) *$\mathcal{G}$ es una descomposición continua de X.*

(2) *Los elementos de $\mathcal{G}$ son continuos homogéneos mutuamente homeomorfos.*

(3) *El espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo.*

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente. Sean $G \in \mathcal{G}$ y U un subconjunto abierto de X tal que $G \subset U$. Sea $\varepsilon = d(G, X \setminus U)$. Como G y $X \setminus U$ son compactos disyuntos, $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ un número de Effros para la ε que tenemos (Teorema 5.2). Sin pérdida de generalidad, suponemos que $\delta < \varepsilon$. Sea $V = \mathcal{V}^d_\delta(G)$. Entonces V es un subconjunto abierto de X tal que $G \subset V \subset U$. Sea $G' \in \mathcal{G}$ tal que $G' \cap V \neq \emptyset$. Sean $y \in G' \cap V$ y $x \in G$ tales que $d(y, x) < \delta$. Como δ es un número de Effros para ε, existe un ε-homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(x) = y$. Como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$ y $h(G) \cap G' \neq \emptyset$, resulta que $h(G) = G'$. En consecuencia, $G' \subset \mathcal{V}^d_\varepsilon(G)$, pues h es un ε-homeomorfismo. Esto implica que $G' \subset U$. Por tanto, $\mathcal{G}$ es semicontinua superiormente.

Ahora probaremos que $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente. Sean $G \in \mathcal{G}$, p y q dos puntos de G y U un subconjunto abierto de X tal que $p \in U$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}^d_\varepsilon(p) \subset U$. Sea $\delta > 0$ un número de Effros para la ε dada (Teorema 5.2). Sea $V = \mathcal{V}^d_\delta(q)$. Tomemos $G' \in \mathcal{G}$ tal que $G' \cap V \neq \emptyset$, y sea $z \in \mathcal{G}' \cap V$. Notemos que $d(z, q) < \delta$. Como δ es un número de Effros para ε, existe un ε-homeomorfismo $k\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $k(q) = z$. Como k es un ε-homeomorfismo, $d(p, k(p)) < \varepsilon$. Así que $k(p) \in U$. Como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$ y $k(q) \in G'$, se tiene que $k(G) = G'$. De donde, $G' \cap U \neq \emptyset$. De lo anterior, resulta que $\mathcal{G}$ es semincontinua inferiormente. Por tanto, $\mathcal{G}$ es continua.

Observemos que, como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$, los elementos de $\mathcal{G}$ son mutuamente homeomorfos. Sean $G \in \mathcal{G}$ y x y y dos puntos de G. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $\ell\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $\ell(x) = y$. Como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$, se tiene que $\ell(G) = G$. Esto implica que $\ell|_G\colon G \twoheadrightarrow G$ es un homeomorfismo que manda a x en y. Por tanto, G es un continuo homogéneo.

A continuación mostraremos que $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo. Por [31, 1.7.3], $X/\mathcal{G}$ es un continuo. Sea $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ la función cociente.

Sean χ_1 y χ_2 dos puntos de $X/\mathcal{G}$. Tomemos dos puntos x_1 y x_2 en X tales que $q(x_1) = \chi_1$ y $q(x_2) = \chi_2$. Como X es homogéneo, existe un homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(x_1) = x_2$. Como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$, se tiene que $h(q^{-1}(\chi_1)) = q^{-1}(\chi_2)$.

Definimos $\xi\colon X/\mathcal{G} \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ como

$$\xi(\chi) = q \circ h(q^{-1}(\chi)).$$

Entonces ξ está bien definida, pues $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$ y $\xi(\chi_1) = \chi_2$. Como $\mathcal{G}$ es semicontinua inferiormente, por el Teorema 6.2 q es abierta. En consecuencia, como q es abierta y h es continua, ξ es continua. Notemos que $\xi^{-1}\colon X/\mathcal{G} \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ está dada por $\xi^{-1}(\chi) = q \circ h^{-1}(q^{-1}(\chi))$ y, también, es continua. De esta forma, tenemos que ξ es un homeomorfismo. Por tanto, $X/\mathcal{G}$ es homogéneo. ☑

Definición 6.6. Una función continua y suprayectiva $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ definida entre continuos es *completamente regular*, si para cada $\varepsilon > 0$ y cada punto $y \in Y$, existe un subconjunto abierto V de Y que tiene a y tal que si $y' \in V$ entonces existe un homeomorfismo $h\colon f^{-1}(y) \twoheadrightarrow f^{-1}(y')$ tal que para cada $x \in f^{-1}(y)$, $d(x, h(x)) < \varepsilon$.

Teorema 6.7. *Sean X un continuo homogéneo y $\mathcal{G}$ una descomposición de X cuyos elementos son subcontinuos propios y no degenerados de X. Si el grupo de homeomorfismos, $\mathcal{H}(X)$, de X respeta a $\mathcal{G}$ entonces los elementos de $\mathcal{G}$ son densos en ninguna parte y la función cociente $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ es completamente regular.*

Demostración. Sea $G \in \mathcal{G}$ y supongamos que $Int_X(G) \neq \emptyset$. Sean $g' \in Int_X(G)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\mathcal{V}^d_\varepsilon(g') \subset G$. Como X es homogéneo, por el Teorema 5.2 existe un número de Effros $\delta > 0$ para esta ε. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\delta < \varepsilon$. Sea $x \in X \backslash G$ tal que $d(x, G) < \delta$. Como G es compacto, existe $g \in G$ tal que $d(x, g) = d(x, G)$. Ahora, como $d(x, g) < \delta$, existe un ε-homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(g) = x$. Observemos que $h(g') \in \mathcal{V}^d_\varepsilon(g') \subset G$. Como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$, resulta que $h(G) = G$, lo cual no es posible porque $x \in X \setminus G$. Por tanto, $Int_X(G) = \emptyset$.

Para ver que la función cociente $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ es completamente regular, sean $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ un número de Effros para ε (Teorema 5.2). Como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$, por el Teorema 6.5 (1) $\mathcal{G}$ es continua. De donde, por el Teorema 6.2, q es abierta.

Sean $\chi \in X/\mathcal{G}$, $x \in q^{-1}(\chi)$ y $V = q(\mathcal{V}^d_\delta(x))$. Como q es abierta, V es un subconjunto abierto de $X/\mathcal{G}$ y $\chi \in V$. Sean $\chi' \in V$ y $x' \in q^{-1}(\chi') \cap \mathcal{V}^d_\delta(x)$. Como $d(x, x') < \delta$, existe un ε-homeomorfismo $h\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h(x) = x'$. Como $\mathcal{H}(X)$ respeta a $\mathcal{G}$, resulta que $h(q^{-1}(\chi)) = q^{-1}(\chi')$. En consecuencia, $h|_{q^{-1}(\chi)}\colon q^{-1}(\chi) \twoheadrightarrow q^{-1}(\chi')$ es un homeomorfismo tal que $d(z, h|_{q^{-1}(\chi)}(z)) < \varepsilon$ para toda $z \in q^{-1}(\chi)$. Por tanto, q es completamente regular. ☑

Definición 6.8. Sean X un continuo y Z un subcontinuo de X. Decimos que Z es *terminal* en X si para cada subcontinuo K de X tal que $K \cap Z \neq \emptyset$, se tiene que $Z \subset K$ o $K \subset Z$.

Definición 6.9. Sean X y Y continuos y $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Decimos que f es *monótona* si $f^{-1}(R)$ es conexa para todo subconjunto conexo R de Y.

Lema 6.10. *Sean X y Y continuos. Si $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ es una función monótona y Z es un subcontinuo terminal de X entonces $f(Z)$ es un subcontinuo terminal de Y.*

Demostración. Sean Z un subcontinuo terminal de X y K un subcontinuo de Y tal que $f(Z) \cap K \neq \emptyset$. Como f es monótona, $f^{-1}(K)$ es un subcontinuo de X tal que $Z \cap f^{-1}(K) \neq \emptyset$. Como Z es terminal en X, resulta que $Z \subset f^{-1}(K)$ o $f^{-1}(K) \subset Z$. Lo que implica que $f(Z) \subset K$ o $K \subset f(Z)$. Por tanto, $f(Z)$ es un subcontinuo terminal de Y. ☑

Corolario 6.11. *Sean X y Y continuos. Si $h\colon X \twoheadrightarrow Y$ es un homeomorfismo y Z es un subcontinuo terminal de X, entonces, $h(Z)$ es un subcontinuo terminal de Y.*

Una prueba del siguiente teorema está en [31, 5.1.13].

Teorema 6.12. *Si X es un continuo aposindético, entonces X no contiene subcontinuos propios, no degenerados y terminales.*

Definición 6.13. Decimos que un continuo X es un *retracto de vecindad absoluto* si para cualquier encaje de X en $\mathcal{Q}$ existen un abierto U de $\mathcal{Q}$ que contiene a X y una función continua $r\colon U \twoheadrightarrow X$ tal que $r(x) = x$ para toda $x \in X$.

Definición 6.14. Decimos que un continuo X es *tipo celda* si cualquier función continua de X en un retracto de vecindad absoluto es homotópica a una función constante.

Definición 6.15. Sean X y Y continuos. Decimos que una función continua y suprayectiva $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ es *tipo celda* si $f^{-1}(y)$ es un continuo tipo celda para toda $y \in Y$.

Una prueba del siguiente resultado se encuentra en [31, 5.1.17].

Teorema 6.16. *Sean X y Z continuos no degenerados. Supongamos que $g\colon X \twoheadrightarrow Z$ es una función monótona y completamente regular. Si z_1 es un punto de Z tal que $g^{-1}(z_1)$ es un subcontinuo terminal de X, entonces g es una función tipo celda.*

El siguiente teorema fue originalmente demostrado por E. Dyer (una prueba se encuentra en [27, 2.1]).

Teorema 6.17. *Sean X y Y continuos no degenerados. Si $f\colon X \twoheadrightarrow Y$ es una función continua, suprayectiva, abierta y monótona, entonces existe un subconjunto G_δ denso W de Y con la siguiente propiedad: para cada $y \in W$, para cada subcontinuo B de $f^{-1}(y)$, para cada $x \in Int_{f^{-1}(y)}(B)$ y cada vecindad U de B en X, existen un subcontinuo Z de X que contiene a B y una vecindad V de y en Y tales que $x \in Int_X(Z)$, $(f|_Z)^{-1}(V) \subset U$ y $f|_Z\colon Z \twoheadrightarrow Y$ es una función monótona y suprayectiva.*

Ya estamos listos para demostrar el teorema de descomposición aposindética de Jones.

Teorema 6.18. *Sea X un continuo descomponible, homogéneo y no aposindético. Si $\mathcal{G} = \{\mathcal{T}(\{x\}) \mid x \in X\}$, entonces se cumple lo siguiente:*

(1) *$\mathcal{G}$ es una descomposición continua y los elementos de $\mathcal{G}$ son subcontinuos terminales de X.*

(2) *Los elementos de $\mathcal{G}$ son continuos indescomponibles, tipo celda, homogéneos, mutuamente homeomorfos y de la misma dimensión de X.*

(3) *La función cociente $q\colon X \twoheadrightarrow X/\mathcal{G}$ es completamente regular.*

(4) *El espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo, aposindético y de dimensión uno que no contiene subcontinuos propios, no degenerados y terminales.*

Demostración. Como X es un continuo descomponible, resulta que X es aposindético en algún punto con respecto a otro. En consecuencia, los elementos de $\mathcal{G}$ son subcontinuos propios no degenerados (Teorema 4.10) de X. Por el Teorema 6.3, $\mathcal{G}$ es una descomposición de X. Por el Teorema 4.13, el grupo de homeomorfismos, $\mathcal{H}(X)$, de X respeta a $\mathcal{G}$. Por consiguiente, $\mathcal{G}$ es una descomposición continua, los elementos de $\mathcal{G}$ son continuos homogéneos, mutuamente homeomorfos y el espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es un continuo homogéneo (Teorema 6.5). Una demostración de que los elementos de $\mathcal{G}$ tienen la misma dimensión de X se encuentra en [48, Corollary 9].

Ahora veremos que los elementos de $\mathcal{G}$ son subcontinuos terminales de X. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $\mathcal{T}(\{x\})$ no es terminal. Entonces existe un subcontinuo Y de X tal que $Y \cap \mathcal{T}(\{x\}) \neq \emptyset$, $Y \setminus \mathcal{T}(\{x\}) \neq \emptyset$ y $\mathcal{T}(\{x\}) \setminus Y \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $x \in \mathcal{T}(\{x\}) \setminus Y$. Sean $p \in Y \setminus \mathcal{T}(\{x\})$ y $y \in Y \cap \mathcal{T}(\{x\})$.

Como $p \in Y \setminus \mathcal{T}(\{x\})$, existe un subcontinuo W de X tal que $p \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{x\}$. Sea $K = Y \cup W$. Entonces K es un subcontinuo de X, $p \in Int_X(K) \subset K \subset X \setminus \{x\}$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{V}^d_\varepsilon(p) \subset K$, $\mathcal{V}^d_{2\varepsilon}(K) \subset X \setminus \{x\}$ y $\varepsilon < d(x,y)$. Sea $\delta > 0$ un número de Effros para ε (Teorema 5.2). De aquí se sigue que para cada $y' \in \mathcal{V}^d_\delta(y)$, existe un

ε-homeomorfismo $h_{y'}\colon X \twoheadrightarrow X$ tal que $h_{y'}(y) = y'$; cuando $y' = y$ tomamos $h_y = 1_X$. Sea

$$M = Cl_X\left(\bigcup_{y'\in\mathcal{V}_\delta^d(y)} h_{y'}(K)\right).$$

Entonces M es un subcontinuo de X tal que $\mathcal{V}_\delta^d(y) \subset M \subset X \setminus \{x\}$, lo cual es una contradicción. Por tanto, todos los elementos de $\mathcal{G}$ son subcontinuos terminales de X. Notemos que esto implica que todos los elementos de $\mathcal{G}$ son tipo celda (Teorema 6.16), ya que la función cociente es completamente regular (Teorema 6.7).

Ahora veremos que los elementos de $\mathcal{G}$ son indescomponibles. Supongamos que esto no es cierto. Entonces existe un elemento $x' \in X$ tal que $\mathcal{T}(\{x'\})$ es descomponible. En consecuencia, como X es homogéneo, $\mathcal{T}(\{x\})$ es descomponible para toda $x \in X$ (Teorema 4.13). Sea $\mathfrak{W}$ el subconjunto G_δ denso de $X/\mathcal{G}$ garantizado por el Teorema 6.17. Sean $\omega \in \mathfrak{W}$ y $z \in X$ tales que $q(z) = \omega$. Supongamos que $\mathcal{T}(\{z\}) = H \cup K$, donde H y K son subcontinuos propios de $\mathcal{T}(\{z\})$. Sean $x \in H \setminus K$ y U un subconjunto abierto de X tal que $H \subset U$ y $K \setminus U \neq \emptyset$. Por el Teorema 6.17, existen un subcontinuo Z de X que cumple con que $H \subset Z$ y una vecindad $\mathcal{V}$ de ω en $X/\mathcal{G}$, tales que $x \in Int_X(Z)$ y $(q|_Z)^{-1}(\mathcal{V}) \subset U$. Como $\mathcal{T}(\{z\})$ es un subcontinuo terminal de X que es denso en ninguna parte (Teorema 6.7) y $\mathcal{T}(\{z\}) \cap Z \neq \emptyset$, se tiene que $\mathcal{T}(\{z\}) \subset Z$. Observemos que esto implica que $\mathcal{T}(\{z\}) \subset (q|_Z)^{-1}(\mathcal{V}) \subset U$, lo cual es una contradicción. Por tanto, los elementos de $\mathcal{G}$ son indescomponibles.

Probaremos que el espacio cociente $X/\mathcal{G}$ es aposindético. Sean χ_1 y χ_2 dos elementos distintos de $X/\mathcal{G}$. Mostratemos que $X/\mathcal{G}$ es aposindético en χ_1 con respecto a χ_2. Sean $x_1 \in q^{-1}(\chi_1)$ y $x_2 \in q^{-1}(\chi_2)$. Notemos que X es aposindético en x_1 con respecto a x_2. Entonces existe un subcontinuo W de X tal que $x_1 \in Int_X(W) \subset W \subset X \setminus \{x_2\}$. Como $\mathcal{G}$ es una descomposición cuyos elementos son terminales, resulta que $\mathcal{T}(\{x_1\}) \subset W$ y $W \cap \mathcal{T}(\{x_2\}) = \emptyset$ (recordemos que $\mathcal{T}(\{x_1\})$ es denso en ninguna parte por el Teorema 6.7). Como $\mathcal{G}$ es una descomposición continua, por el Teoream 6.2, q es una función abierta. De lo anterior se sigue que:

$$\chi_1 = q(x_1) \in Int_{X/\mathcal{G}}(q(W)) \subset q(W) \subset X/\mathcal{G} \setminus \{\chi_2\}.$$

Por tanto, $X/\mathcal{G}$ es aposindético.

Una demostración de que la dimensión de $X/\mathcal{G}$ es uno se puede encontrar en [49, Theorem 3]. El hecho de que $X/\mathcal{G}$ no contiene subcontinuos propios y no degenerados que sean terminales se sigue del Teorema 6.12. ☑

Corolario 6.19. *Si X es un continuo homogéneo tal que todos sus subcontinuos no degenerados son descomponibles, entonces X es aposindético.*

Corolario 6.20. *Si X es un continuo homogéneo y arcoconexo, entonces X es aposindético.*

Demostración. Por el Teoreama 4.6, basta ver que $\mathcal{T}(\{x\}) = \{x\}$ para toda $x \in X$. Sea $x_0 \in X$. De la Observación 4.4 sabemos que $\{x_0\} \subset \mathcal{T}(\{x_0\})$. Por el Teorema 6.18, $\mathcal{T}(\{x_0\})$ es un subcontinuo propio de X. Sea $x_1 \in X \setminus \mathcal{T}(\{x_0\})$. Como X es arcoconexo, existe un arco α en X cuyos puntos extremos son x_0 y x_1. Como $\mathcal{T}(\{x_0\})$ es un subcontinuo terminal de X (Teorema 6.18), $\mathcal{T}(\{x_0\}) \cap \alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \setminus \mathcal{T}(\{x_0\}) \neq \emptyset$, se tiene que $\mathcal{T}(\{x_0\}) \subset \alpha$. Como, además, $\mathcal{T}(\{x_0\})$ es indescomponible, se tiene que $\mathcal{T}(\{x_0\})$ es un conjunto de un sólo punto (los únicos subcontinuos indescomponibles de un arco son los subconjuntos de un sólo punto). De lo anterior se tiene que $\mathcal{T}(\{x_0\}) = \{x_0\}$. Como x_0 es un punto arbitrario de X, X es aposindético. ☑

Referencias

[1] Anderson R.D., "A characterization of the universal curve and a proof of its homogeneity", *Ann. Math.*, 67 (1958), 313-324.

[2] Anderson R.D., "One-dimensional continuous curves and a homogeneity theorem", *Ann. Math.*, 68 (1958), 1-16.

[3] Bellamy D.P. and Lum L., "The cyclic connectivity of homogeneous arcwise connected continua", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 266 (1981), 389-396.

[4] Bing R.H., "A homogeneous indecomposable plane continuum", *Duke Math. J.*, 15 (1948), 729-742.

[5] Bing R.H., "Snake-like continua", *Duke Math. J.*, 18 (1951), 653-663.

[6] Bing R.H., "Concerning hereditarily indecomposable continua", *Pacific J. Math.*, 1 (1951), 43-51.

[7] Bing R.H., "Each homogeneous nondegenerate chainable continuum is a pseudo-arc", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 10 (1959), 345-346.

[8] Bing R.H., "A simple closed curve is the only homogeneous bounded homogeneous plane continuum that contains an arc", *Canad. J. Math.*, 12 (1960), 209-230.

[9] Bing R.H. and Jones F.B., "Another homogeneous plane continuum", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 90 (1959), 171-192.

[10] Case J.H., "Another 1-dimensional homogeneous continuum which contains an arc", *Pacific J. Math.*, 11 (1961), 455-469.

[11] Charatonik J.J., "History of continuum theory", en *Handbook of the history of general topology* Vol. 2 (C. E. Aull y R. Lowen, editores), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London (1998), 703-786.

[12] Choquet G., "Prolongement d'homeomorphies. Ensembles topologiquement Charactérisation topologique individuelle des ensembles fermés totalement discontinus", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 219 (1944), 542-544.

[13] Cohen H.J., "Some results concerning homogeneous plane continua", *Duke Math. J.*, 18 (1951), 467-474.

[14] Dantzig D. van, "Ueber topologisch homogene kontinua", *Fund. Math.*, 15 (1930), 102-125.

[15] Effros E.G., "Transformation groups and C^*-algebras", *Ann. Math.*, (2) 81 (1965), 38-55.

[16] Espinoza B. and Macías S., "On the set function $\mathcal{R}$", *Topology Appl.*, 154 (2007), 2988-2996.

[17] Fearnley L., "The pseudo-circle is not homogeneous", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 75 (1969), 554-558.

[18] Fernández L. and Macías S., "The set functions $\mathcal{T}$ and $\mathcal{K}$ and irreducible continua", *Colloq. Math.*, 121 (2010), 79-91.

[19] Hagopian C.L., "Homogeneous plane continua", *Houston J. Math.*, 1 (1975), 35-41.

[20] Hagopian C.L., "A characterization of solenoids", *Pacific J. Math.*, 68 (1977), 425-435.

[21] Jones F.B., "Aposyndetic continua and certain boundary problems", *Amer. J. Math.*, 63 (1941), 545-553.

[22] Jones F.B., "Concerning non-aposyndetic continua", *Amer. J. Math.*, 70 (1948), 403-413.

[23] Jones F.B., "A note on homogeneous plane continua", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 113-114.

[24] Jones F.B., "On a certain type of homogeneous plane continuum", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 735-740.

[25] Jones F.B., "Use of a new technique in homogeneous continua", *Houston J. Math.*, 1 (1975), 57-61.

[26] Kennedy J. and Rogers J.T. Jr., "Orbits of the pseudocircle", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296 (1986), 327-340.

[27] Krasinkiewicz J., "On two theorems of Dyer", *Colloq. Math.*, 50 (1986), 201-208.

[28] Knaster B. and Kuratowski C., "Problèmes", *Fund. Math.*, 1 (1920), 223.

[29] Macías S., "Covering spaces of homogeneous continua", *Topology Appl.*, 59 (1994), 157-177.

[30] Macías S., "Un poco de continuos homogéneos", *en Memorias del XXIX Congreso de Matemáticas de la Sociedad Matemática Mexicana*. Aportaciones Matemáticas, Comunicaciones # 20, Sociedad Matemática Mexicana (1997), 109-116.

[31] Macías S., *Topics on continua*, Pure and Applied Mathematics Series, Vol. 275, Chapman & Hall/CRC, Taylor & Francis Group, Boca Raton, London, New York, Singapore, 2005.

[32] Macías S., "A class of one-dimensional, nonlocally connected continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous", *Houston J. Math.*, 32 (2006), 161-165.

[33] Macías S., "Homogeneous continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous", *Topology Appl.*, 153 (2006), 3397-3401.

[34] Macías S., "A decomposition theorem for a class of continua for which the set function $\mathcal{T}$ is continuous", *Colloq. Math.*, 109 (2007), 163-170.

[35] Macías S., "On the continuity of the set function $\mathcal{K}$", *Topology Proc.*, 34 (2009), 167-173.

[36] Macías S., "On continuously irreducible continua", *Topology Appl.*, 156 (2009), 2357-2363.

[37] Macías S., "On the idempotency of the set function $\mathcal{T}$", *Houston J. Math.*, 37 (2011), 1297-1305.

[38] Macías S. and Nadler S.B. Jr., "On hereditarily decomposable homogeneous continua", *Topology Proc.*, 34 (2009), 131-145.

[39] Mazurkiewicz S., "Problème 14", *Fund. Math.*, 2 (1921), 285.

[40] Mazurkiewicz S., "Sur les continus homogènes", *Fund. Math.*, 5 (1924), 137-146.

[41] McCord M.C., "Inverse limit sequences with covering maps", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 (1965), 197-209.

[42] Minc P. and Rogers J.T. Jr., "Some new examples of homogeneous curves", *Topology Proc.*, 10 (1985), 347-356.

[43] Moise E.E., "An indecomposable plane continuum which is homeomorphic to each of its nondegenerate subcontinua", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 63 (1948), 581-594.

[44] Moise E.E., "A note on the pseudo-arc", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67 (1949), 57-58.

[45] Nadler S.B. Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 158, Marcel Dekker, New York, Basel, Hong Kong, 1992.

[46] Rogers J.T. Jr., "The pseudo-circle is not homogeneous", *Trans. Amer. Math.* Soc., 148 (1970), 417-428.

[47] Rogers J.T. Jr., "An aposyndetic homogeneous curve that is not locally connected", *Houston J. Math.*, 9 (1983), 433-440.

[48] Rogers J.T. Jr., "Orbits of higher-dimensional hereditarily indecomposable continua", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 95 (1985), 483-486.

[49] Rogers J.T. Jr., "Higher dimensional aposyndetic decompositions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131 (2003), 3285-3288.

[50] Sierpiński W., "Sur une propiété topologique des ensembles dénombrables denses en soi", *Fund. Math.*, 1 (1920), 11-16.

[51] Waraszkiewicz Z., "Sur les courbes planes topologiquement homogènes", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 204 (1937), 1388-1390.