Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 18, No 2, p. 51–64, julio–diciembre de 2000

Cuantización topológica y cohomología de Čech

Guillermo A. González*

Resumen

En este trabajo se revisa el procedimiento de cuantización topológica basado en la cohomología de Čech, de acuerdo con los trabajos de O. Álvarez [4] y [5]. Se muestra cómo el método de cuantización se fundamenta en la libertad de escogencia del lagrangiano apropiado para una teoría de campos, a partir de una familia de lagrangianos que difieren entre sí por un término igual a una derivada total.

1. Introducción

Uno de los problemas más fundamentales e importantes de la física teórica es el de la determinación de condiciones de cuantización para ciertos parámetros tales como masas, cargas y constantes de acoplamiento. Este problema se remonta a los orígenes de la teoría cuántica, a comienzos del siglo pasado, cuando Planck, Bohr, Wilson y Sommerfeld formularon sus condiciones de cuantización para sistemas periódicos. En el transcurso del desarrollo de la física moderna se han utilizado diferentes clases de formalismos para llegar a la determinación de tales condiciones, incluyendo argumentos basados en teoría de grupos y otras ramas de las matemáticas. En particular, el desarrollo de la teoría cuántica de campos ha llevado a la aplicación, cada vez más extendida, de técnicas y conceptos de geometría y topología para la solución de esta clase de problemas.

Una de las aplicaciones más interesantes de la topología a la resolución de problemas físicos se encuentra en la cuantización de constantes de acoplamiento,

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Santander, Colombia, Email: guillego@uis.edu.co

cuyo primer ejemplo fue la condición de Dirac para la cuantización de la carga magnética [1]. En años recientes se han realizado numerosas investigaciones tendientes a dilucidar la relación entre la geometría, la topología y los problemas de cuantización; en particular, se ha reconocido que los argumentos homotópicos son muy útiles en la comprensión de dichos problemas [2, 3].

Ahora bien, es igualmente posible emplear argumentos cohomológicos para obtener las mismas condiciones de cuantización; es más, se puede argüir que la estructura correcta para analizar estos problemas es la teoría de cohomología de Čech [4, 5]; además, este método es más general, pues existen casos en los cuales no es posible aplicar argumentos homotópicos mientras que los argumentos cohomológicos si son aplicables, obteniéndose de una manera relativamente fácil condiciones topológicas de cuantización. En este trabajo se revisa el procedimiento de cuantización topológica basado en la cohomología de Čech, de acuerdo con los trabajos de O. Álvarez [4] y [5]. Se muestra cómo el método de cuantización se fundamenta en la libertad de escogencia del lagrangiano apropiado para una teoría de campos, a partir de una familia de lagrangianos que difieren entre sí por un término igual a una derivada total.

2. Cohomología de Čech

La teoría de cohomología de Čech proporciona el lenguaje matemático correcto con el cual catalogar la información necesaria para obtener condiciones de cuantización de parámetros físicos. Se presenta en esta sección la relación entre la cohomología de Čech de una variedad Σ y su estructura topológica, explicando igualmente el procedimiento para catalogar la información física necesaria para los problemas de cuantización [3, 4]. Se presentará inicialmente la cohomología de Čech haciendo explícita su relación con la homología simplicial [7], para luego definir la teoría de cohomología de Čech.

Consideremos una variedad Σ sobre la cual es posible seleccionar una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_A\}$ de tal manera que cada conjunto abierto U_A y cada intersección no vacía de abiertos sean difeomorfos a una bola abierta en $\mathbb{R}^n$ [6]; esta clase de cubiertas se denominan *cubiertas buenas*. Sobre cada intersección finita de abiertos en $\mathcal{U}$ se definen los objetos $U_{ABC\ldots}$ como

$$U_{AB} = U_A \cap U_B \ , \tag{2.1a}$$

$$U_{ABC} = U_A \cap U_B \cap U_C \ , \tag{2.1b}$$

$$U_{ABCD} = U_A \cap U_B \cap U_C \cap U_D \ , \tag{2.1c}$$

etc., con una orientación formal definida por

$$U_{ABC...} = (-1)^k U_{(ABC...)} \;, \tag{2.2}$$

donde $(ABC...)$ es una permutación de los números $A, B, C, ...$, con $k = 0$ si la permutación es par y $k = 1$ si la permutación es impar [7].

El objeto $U_{A_0 A_1 ... A_p}$ recibe el nombre de p-simplejo de Čech, y las p-cadenas se definen como combinaciones lineales formales de los p-simplejos

$$C_p = \left\{ c_p = \sum a_i U_{A_0 A_1 ... A_p} \right\} \;; \tag{2.3}$$

además, puede considerarse el operador frontera ∂ como el operador lineal definido por la relación

$$\partial U_{A_0 A_1 ... A_p} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^i U_{A_0 A_1 .. \hat{A}_i .. A_p} \;, \tag{2.4}$$

donde $U_{A_0 A_1 .. \hat{A}_i .. A_p}$ es el $(p-1)$-simplejo obtenido eliminando el subíndice A_i. Puede verificarse que el operador ∂ satisface la condición de nilpotencia, $\partial^2 = 0$.

Definiendo los p-ciclos $Z_p(\mathcal{U})$ como las p-cadenas cuya frontera es igual a cero y las p-fronteras $B_p(\mathcal{U})$ como las p-cadenas que son la frontera de una $(p+1)$-cadena, puede verse que $B_p(\mathcal{U}) \subset Z_p(\mathcal{U})$. Se puede definir entonces el p-ésimo grupo de homología de Čech como el cociente

$$H_p(\Sigma) = Z_p(\mathcal{U}) / B_p(\mathcal{U}) \;. \tag{2.5}$$

Así entonces, puesto que una buena cubierta determina una triangulación de la variedad Σ, el p-ésimo grupo de homología de Čech y el p-ésimo grupo de homología simplicial de Σ son equivalentes [6, 7]; además, los grupos de homología son independientes de la cubierta y están determinados únicamente por la topología de la variedad.

Para construir la teoría de cohomología de Čech se define una p-cocadena con valores en q-formas como una regla que asigna a cada p-cadena una q-forma no-singular

$$C^p(\mathcal{U}, \Omega^p) = \left\{ \{A_{A_0 A_1 ... A_p}\} \;:\; C^p(\mathcal{U}) \to \Omega^q(\Sigma) \right\} \;. \tag{2.6}$$

El operador cofrontera δ es una operación entre p-cocadenas y $(p+1)$-cocadenas, definido como

$$\delta \{A_{A_0 A_1 ... A_p}\} = \left\{ \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{i+1} A_{A_0 A_1 .. \hat{A}_i .. A_{p+1}} \right\} \;; \tag{2.7}$$

por ejemplo,

$$\delta\{A_A\} = \{A_A - A_B\} , \tag{2.8a}$$
$$\delta\{B_{AB}\} = \{B_{AC} + B_{CB} + B_{BA}\} , \tag{2.8b}$$
$$\delta\{C_{ABC}\} = \{C_{ABC} - C_{BCD} + C_{CDA} - C_{DAB}\} . \tag{2.8c}$$

Se puede mostrar que el operador cofrontera satisface la condición de nilpotencia $\delta^2 = 0$, lo cual permite definir una teoría de cohomología. Se definen los p-cociclos $Z^p_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q)$ como aquellos elementos de $C^p(\mathcal{U}, \Omega^q)$ cuya frontera es igual a cero. Se dice que un p-cociclo z es exacto si es posible encontrar una $(p-1)$-cocadena u tal que $z = \delta u$. Las p-cofronteras $B^p_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q)$ son la imagen de $C^{p-1}(\mathcal{U}, \Omega^q)$ bajo δ, y se tiene que $B^p_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q) \subset Z^p_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q)$. Esto permite definir los grupos de cohomología

$$H^p_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q) = Z^p_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q)/B^p_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q) ; \tag{2.9}$$

sin embargo, estos objetos no son los grupos de cohomología de Čech, pues son, en su mayor parte, triviales.

Para ver esto es necesario introducir una partición de la unidad; esto es, una colección de funciones $\{P_A\}$ tales que:

1. $P_A \geq 0$,
2. $\sum_A P_A = 1$,
3. P_A tiene soporte compacto en U_A.

Asumiendo que $\{J_{AB}\} \in Z^1_\delta(\mathcal{U}, \Omega^q)$, tendremos que

$$\delta\{J_{AB}\} = \{J_{AC} + J_{CB} + J_{BA}\} = 0 ; \tag{2.10}$$

así entonces, existe algún $\{K_A\} \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^q)$ tal que $\{J_{AB}\} = \delta\{K_A\}$, como puede verse definiendo la 0-cocadena $\{K_A\}$ como

$$\{K_A\} = \left\{ \sum_C J_{AC} P_C \right\} , \tag{2.11}$$

de modo que su cofrontera será

$$\begin{aligned} \delta\{K_A\} &= \{K_A - K_B\} = \left\{ \sum_C J_{AC} P_C - \sum_C J_{BC} P_C \right\} \\ &= \left\{ \sum_C (J_{AC} + J_{CB}) P_C \right\} = \left\{ \sum_C J_{AB} P_C \right\} = \{J_{AB}\} , \end{aligned}$$

Ω^3	$C^0(\mathcal{U},\Omega^3)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^3)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^3)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^3)$
Ω^2	$C^0(\mathcal{U},\Omega^2)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^2)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^2)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^2)$
Ω^1	$C^0(\mathcal{U},\Omega^1)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^1)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^1)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^1)$
Ω^0	$C^0(\mathcal{U},\Omega^0)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^0)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^0)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^0)$
$d\uparrow$				
$\delta \rightarrow$	C^0	C^1	C^2	C^3

Figura 2.1: Caja del "Tic-Tac-Toe".

y, por lo tanto, $\{J_{AB}\}$ es un cociclo exacto.

Esta construcción puede generalizarse para un p-cociclo $\{J_{A_0A_1\ldots A_p}\}$ arbitrario, con $p>0$. Podemos construir una $(p-1)$-cocadena $\{K_{A_0A_1\ldots A_{p-1}}\}$ como

$$\{K_{A_0A_1\ldots A_{p-1}}\} = \left\{\sum_B J_{A_0A_1\ldots A_p}P_B\right\} \ , \tag{2.12}$$

y es un ejercicio directo verificar que $\{J_{A_0A_1\ldots A_p}\} = \delta\{K_{A_0A_1\ldots A_{p-1}}\}$. Así, puesto que para $p>0$ todo p-cociclo es exacto, los grupos de cohomología $H^p_\delta(\mathcal{U},\Omega^q)$ son nulos. El único caso que resta por considerar es $p=0$; sin embargo, los 0-cociclos son las formas diferenciales globales y no existen 0-cofronteras, por lo tanto $H^0_\delta(\mathcal{U},\Omega^q)=\Omega^q(\Sigma)$.

Los objetos que hemos estado discutiendo, $C^p(\mathcal{U},\Omega^p)$, están caracterizados por dos enteros, de modo que es conveniente acomodarlos en una tabla, siguiendo las convenciones de Bott y Tu [6], como muestra la Fig. 2.1. Hay dos operadores que conmutan entre sí, actuando sobre las entradas de la tabla: horizontalmente el operador cofrontera δ y verticalmente el operador derivada exterior d. Este arreglo recibe el nombre de caja del "Tic-Tac-Toe". La cohomología del operador δ correspondiente a cada una de las entradas de la caja anterior está dada por la caja de la Fig. 2.2.

Si se considera la acción del operador $d: C^p(\mathcal{U},\Omega^q)\rightarrow C^p(\mathcal{U},\Omega^{q+1})$, el hecho de que $d^2=0$ permite definir una teoría de cohomología con respecto a d actuando sobre las $C^p(\mathcal{U},\Omega^q)$. Las formas diferenciales cerradas $Z^p_d(\mathcal{U},\Omega^q)$ son aquellos elementos de $C^p(\mathcal{U},\Omega^q)$ cuya derivada exterior es cero. Las formas exactas $B^p_d(\mathcal{U},\Omega^q)$ son la imagen de $C^p(\mathcal{U},\Omega^{q-1})$ bajo d. Se pueden definir grupos de cohomología como

$$H^p_d(\mathcal{U},\Omega^q) = Z^p_d(\mathcal{U},\Omega^q)/B^p_d(\mathcal{U},\Omega^q) \ ; \tag{2.13}$$

sin embargo, la mayoría de estos grupos son triviales.

Ω^3	$\Omega^3(\Sigma)$	0	0	0	
Ω^2	$\Omega^2(\Sigma)$	0	0	0	
Ω^1	$\Omega^1(\Sigma)$	0	0	0	
Ω^0	$\Omega^0(\Sigma)$	0	0	0	
$d \uparrow$ $\delta \rightarrow$	C^0	C^1	C^2	C^3	

Figura 2.2: Cohomología del operador δ.

Ω^3	0	0	0	0	
Ω^2	0	0	0	0	
Ω^1	0	0	0	0	
Ω^0	$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R})$	$C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$	$C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$	$C^3(\mathcal{U},\mathbb{R})$	
$d \uparrow$ $\delta \rightarrow$	C^0	C^1	C^2	C^3	

Figura 2.3: Cohomología del operador d.

Sobre cada intersección multiple no vacía de conjuntos abiertos de $\mathcal{U}$ es válido el lema de Poincaré, de modo que toda q-forma cerrada local, con $q > 0$, es localmente exacta. Sin embargo, esto no se cumple para $q = 0$, puesto que las 0-formas cerradas $Z_d^p(\mathcal{U}, \Omega^0)$ están dadas por funciones constantes, de acuerdo con el lema de Poincaré, y se denotarán como $C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$; esto es, cada elemento de $C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ es una colección $\{C_{A_0A_1\ldots A_p}\}$, donde cada elemento en la colección es un número real. La caja del "Tic-Tac-Toe" para la cohomología del operador d se muestra en la Fig. 2.3.

Es conveniente construir una caja del "Tic-Tac-Toe" ampliada, como se ve en la Fig. 2.4. La fila y la columna externas pueden marcarse con el índice -1. El lema de Poincaré correspondiente no se aplica sobre las entradas externas; esto es, en lo que concierne a la columna externa no toda forma diferencial cerrada es exacta, lo que significa que la columna externa tienen una cohomología no trivial para el operador d. Esta es la cohomología usual de formas diferenciales, la cual se denomina cohomología de De Rham y se denota por $H^q_{DR}(\Sigma)$.

Los objetos de la fila exterior son cocadenas localmente constantes. Si $c \in C^p(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ es un cociclo localmente constante, el aplicar la prescripción del lema de Poincaré para δ llevaría a una cocadena que no es localmente constante. Recordando que se debe multiplicar el cociclo por el correspondiente elemento

Ω^3	$C^0(\mathcal{U},\Omega^3)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^3)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^3)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^3)$	
Ω^2	$C^0(\mathcal{U},\Omega^2)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^2)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^2)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^2)$	
Ω^1	$C^0(\mathcal{U},\Omega^1)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^1)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^1)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^1)$	
Ω^0	$C^0(\mathcal{U},\Omega^0)$	$C^1(\mathcal{U},\Omega^0)$	$C^2(\mathcal{U},\Omega^0)$	$C^3(\mathcal{U},\Omega^0)$	
$d\uparrow$	$C^0(\mathcal{U},\mathbb{R})$	$C^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$	$C^2(\mathcal{U},\mathbb{R})$	$C^3(\mathcal{U},\mathbb{R})$	
$\delta\rightarrow$	C^0	C^1	C^2	C^3	

Figura 2.4: Caja del "Tic-Tac-Toe" ampliada.

de partición de la unidad, entonces, dado que los P_A no son constantes, el elemento construido no será localmente constante, y por lo tanto no estará en $C^{p-1}(\mathcal{U},\mathbb{R})$. La conclusión es que la fila externa tiene una cohomología no trivial para el operador δ, la cual se denomina cohomología de Čech de la variedad con coeficientes reales, y será denotada por $H^p_{\check{C}}(\Sigma,\mathbb{R})$. Existe un teorema [6] que afirma que las clases de cohomología de Čech son independientes de la cubierta escogida, y que solo dependen de la estructura topológica de la variedad.

Ahora bien, se puede demostrar que las teorías de cohomología de Čech y de De Rham son isomorfas [4, 5], para lo cual basta ver que a partir de un elemento en la clase de cohomología de De Rham se puede construir un elemento en la clase de cohomología de Čech, procediendo en "zig-zag", hacia la derecha y hacia abajo, en la caja del "Tic-Tac-Toe" y empleando el lema de Poincaré. Igualmente se puede mostrar que a partir de un elemento de la clase de cohomología de Čech se puede atravesar la caja del "Tic-Tac-Toe" en "zig-zag", hacia arriba y a la izquierda, hasta construir un elemento en la clase de cohomología de De Rham.

Para ver la naturaleza uno a uno de la aplicación se debe mostrar que un elemento igual a cero en la cohomología de De Rham lleva a un elemento igual a cero en la cohomología de Čech. El elemento cero en la cohomología de De Rham puede representarse por una forma diferencial exacta global, la cual puede usarse para comenzar un recorrido en "zig-zag" y deducir la existencia de un b tal que $c = \delta b$. Así mismo, puede probarse lo inverso de manera similar. Se puede enfatizar entonces que toda clase de cohomología de De Rham puede representarse por una clase de cohomología de Čech, y que toda clase de cohomología de Čech puede representarse por una clase de cohomología de De Rham.

Consideremos, finalmente, la relación entre la cohomología de Čech con coeficientes enteros y la cohomología de Čech con coeficientes reales proporcionada por el teorema del coeficiente universal [6, 8] el cual, de manera no muy precisa, puede enunciarse mediante la relación

$$H^p_C(\Sigma, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R} = H^p_C(\Sigma, \mathbb{R}) \ . \tag{2.14}$$

Así, las clases de cohomología enteras contienen mas información que las clases de cohomología reales, lo cual puede verse mediante el uso de dos hechos; primero, un lema que afirma que

$$\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{R} = 0 \ , \tag{2.15}$$

y, segundo, un teorema que afirma que las clases de cohomología enteras son de la forma

$$H^p_C(\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \otimes ... \otimes \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_{n_1} \otimes ... \otimes \mathbb{Z}_{n_f} \ . \tag{2.16}$$

Los términos $\mathbb{Z}_n$ se denominan términos de torsión o términos finitos. Cuando se multiplica tensorialmente con los reales se pierden todos los términos de torsión, de acuerdo con el lema; por lo tanto, las clases de cohomología reales se obtienen de las clases de cohomología enteras eliminando todos los términos de torsión y reemplazando a los enteros por los reales; como un beneficio adicional, un elemento sin torsión de $H^p_C(\Sigma, \mathbb{Z})$ puede representarse como una forma diferencial, de tal manera que la integral de dicha forma diferencial sobre cualquier contorno cerrado de dimensión p es igual a un número entero, mientras que los elementos con torsión no pueden representarse como formas diferenciales.

3. Cuantización topológica

Uno de los problemas más importantes en la física teórica es el de la determinación de condiciones de cuantización para ciertos parámetros (masas, cargas, constantes de acoplamiento, etc.), los cuales determinan la dinámica de un sistema físico. Se presenta aquí una estructura muy general en la cual las condiciones de cuantización de estos parámetros surgen de una estrecha relación entre el formalismo matemático de la cohomología de Čech y la formulación lagrangiana de una teoría de campos, con el requerimiento adicional de que la teoría sea cuánticamente consistente.

Consideremos una teoría de campos en la cual el espacio-tiempo es una variedad M, sin frontera espacial, de dimensión d (posibles ejemplos son $\mathbb{R} \times S^{d-1}$, S^d, $\mathbb{R} \times T^{d-1}$, etc.). Los campos clásicos se interpretan como aplicaciones $\phi : M \to \Sigma$, donde Σ es una variedad de dimensión n, la cual asumiremos compacta y sin frontera. Desde el punto de vista físico, el objeto fundamental en una teoría dinámica es el lagrangiano, el cual es una función de los campos y sus derivadas: $L(\phi, \partial_a \phi)$; sin embargo, es de vital importancia recordar el hecho de que el lagrangiano de una teoría no es único: una familia de lagrangianos que difieren entre sí por una derivada total dan lugar a las mismas ecuaciones de campo y, por lo tanto, describen la misma realidad física [9, 10].

Ahora bien, consideraremos teorías en las cuales el lagrangiano puede escribirse como la suma de dos términos:

$$L = L_0 + L_T \ . \tag{3.1}$$

En esta expresión el término L_0 está perfectamente definido en todo punto de la variedad Σ y puede consistir de términos de energía cinética más interacciones, cuyo comportamiento bajo transformaciones de coordenadas en el espacio-tiempo M es el de una densidad tensorial o tensor relativo; esto es, la transformación de L_0 incluye el determinante del jacobiano de las transformaciones de coordenadas [11, 12].

El segundo término en (3.1), al cual denominaremos lagrangiano topológico, presenta algunos rasgos característicos que conducen a las condiciones de cuantización. En primer lugar, L_T se comporta como una forma diferencial bajo transformaciones de coordenadas en el espacio-tiempo M y, por lo tanto, su transformación no incluye al determinante del jacobiano, sino solo al jacobiano mismo; es más, L_T debe interpretarse como el *pull-back* a M de una forma diferencial T sobre Σ [13, 14]. Sin embargo, las propiedades más interesantes de L_T surgen cuando se observa que T no está definida globalmente sobre la variedad Σ y se explota la no unicidad del lagrangiano considerando una familia de formas diferenciales $\{T_A\}$, cada una definida sobre un conjunto abierto U_A perteneciente a una cubierta $\mathcal{U} = \{U_A\}$ para la variedad Σ. Con el fin de mantener invariables las ecuaciones de campo, las formas diferenciales locales T_A deben coincidir en las intersecciones, excepto por una derivada total. Esto significa que sobre cada intersección no vacía $U_{AB} = U_A \cap U_B$ debe definirse una función de transición J_{AB} de tal manera que

$$T_A - T_B = dJ_{AB} \tag{3.2}$$

en dicha intersección.

En el lenguaje de la teoría de cohomología de Čech la familia $\{T_A\}$ constituye una 0-cocadena con valores en d-formas, $\{T_A\} \in C^0(\mathcal{U}, \Omega^d)$, donde d es la dimensión del espacio-tiempo M. La colección de funciones de transición $\{J_{AB}\}$ constituye una 1-cocadena con valores en $(d-1)$-formas, $\{J_{AB}\} \in C^1(\mathcal{U}, \Omega^{d-1})$.

Así mismo, la condición de invariancia de las ecuaciones de campo, (3.2), se expresa en términos del operador cofrontera δ de la cohomología de Čech como

$$\delta\{T_A\} = \{T_A - T_B\} = \{dJ_{AB}\} \ ; \tag{3.3}$$

sin embargo, la definición de estos objetos depende de la selección de una buena cubierta $\mathcal{U}$ sobre Σ, en la cual cada conjunto abierto U_A y cada intersección finita no vacía de abiertos $U_{AB\ldots}$ sea difeomorfa a una bola abierta en $\mathbb{R}^n$.

Integrando el lagrangiano L sobre una región R del espacio-tiempo d-dimensional M se obtiene la correspondiente integral de acción de la teoría clásica,

$$I = \int_R L = \int_R L_0 + \int_R L_T = I_0 + I_T \ , \tag{3.4}$$

la cual se expresa también como la suma de dos términos. Ahora bien, la contribución del término topológico I_T podría interpretarse como la integral de la d-forma T sobre la imagen $\phi(R)$ de la región R en la variedad Σ:

$$I_T = \int_R L_T = \int_{\phi(R)} T \ ; \tag{3.5}$$

sin embargo, esto no es posible a causa de la no unicidad de la d-forma diferencial T.

El problema en la integración del término topológico T surge cuando la región de integración $\phi(R)$ atraviesa una intersección de abiertos de la cubierta $\mathcal{U}$, y por lo tanto la acción debe definirse de tal modo que tenga en cuenta las diferentes formas diferenciales T_A sobre cada abierto U_A de la intersección; sin embargo, esto puede llevar a que el término I_T dependa de la selección de algún subconjunto de la intersección. No obstante es posible obviar esta dificultad generalizando un procedimiento desarrollado por Wu y Yang para el caso de un positrón en presencia del campo magnético de un monopolo [4, 5, 15].

Es posible generalizar el procedimiento de Wu y Yang al caso d-dimensional introduciendo en la acción términos apropiados que permitan definirla sin ambigüedades sobre toda la intersección, excepto por una constante adicional. Los términos necesarios para modificar la acción pueden obtenerse empleando la caja del Tic-Tac-Toe de la cohomología de Čech: se ubican inicialmente las cocadenas $\{T_A\}$ y $\{J_{AB}\}$ y se procede en zig-zag, a la derecha y hacia abajo, empleando los operadores d y δ, hasta obtener todos los términos que sean de la forma $C^p(\mathcal{U}, \Omega^{d-p})$, en donde $0 \leq p \leq d$ y d es la dimensión del espacio-tiempo, como se muestra en la Fig. 3.5.

A partir de la caja del Tic-Tac-Toe se encuentra que existe una ambigüedad en la acción clásica cuando se consideran intersecciones de $d + 2$ abiertos

	0					
Ω^{d+1} G	$\{dT_A\}$	0				
Ω^{d}	$\{T_A\}$	$\delta\{T_A\}$	0			
Ω^{d-1}		$\{J_{AB}\}$	$\delta\{J_{AB}\}$	0		
					0	
Ω^{1}					$\delta\{K_{AB..}\}$	0
Ω^{0}					$\{C_{ABC..}\}$	$\delta\{C_{ABC..}\}$
$d\uparrow$						$\{C\}$
$\delta\rightarrow$	C^0	C^1	C^2		C^d	C^{d+1}

Figura 3.5: Caja del Tic-Tac-Toe.

en $\mathcal{U}$. Dicha ambigüedad viene dada por un cociclo localmente constante $\{C\} \in C^{d+1}(\mathcal{U}, \Omega^0)$, el cual define una clase de cohomología en $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{R})$. Desde el punto de vista clásico, la ambigüedad en la acción no presenta problemas, puesto que las ecuaciones de campo permanecen invariables; sin embargo, dicha ambigüedad en la acción conduce a una inconsistencia en la teoría cuántica.

Formulando la cuantización de la teoría en términos de integrales de camino de Feynman, se encuentra que la ambigüedad en la acción clásica introduce un factor de fase ambiguo $\exp(iC_{ABC...})$ sobre cada intersección no vacía de $d+2$ abiertos de la cubierta; así entonces, exigiendo que la teoría sea cuánticamente consistente se impone una condición sobre el cociclo $\{C_{ABC...}\}$: dicho cociclo debe ser un múltiplo entero de 2π para que la integral de camino de Feynman esté bien definida. Esto significa entonces que el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{Z})$ debe contener a los enteros para así poder escoger apropiadamente a $\{C_{ABC...}\}$.

Ahora bien, procediendo hacia arriba y a la izquierda en la caja del Tic-Tac-Toe a partir de la 0-cocadena $\{T_A\}$, puede construirse una $(d+1)$-forma diferencial cerrada G definida globalmente sobre Σ, la cual define un elemento de $H_{DR}^{d+1}(\Sigma)$, como se indica en la Fig. 3.5. Además, debido a que las teorías de cohomología de Čech y de De Rham son isomorfas, la información topológica contenida en el cociclo $\{C\}$ es equivalente a la contenida en la forma diferencial G. Más específicamente, el flujo de G a través de una subvariedad sin frontera de dimensión $d+1$, es decir, la integral de G sobre un ciclo $(d+1)$-dimensional S^{d+1}, está dado por la suma de los $C_{ABC...}$ que pertenecen a una cubierta de la variedad:

$$\int_{S^{d+1}} G = \sum_{ABC...} C_{ABC...} \; . \tag{3.6}$$

La condición de consistencia cuántica de la teoría impone la restricción adicional de que estos $C_{ABC...}$ sean múltiplos enteros de 2π y, por lo tanto, concluimos que el flujo total de G es igual a un múltiplo entero de 2π. Así se obtiene una condición de cuantización para el flujo de G, lo que implica una condición de cuantización para la "carga" asociada con ese flujo.

La relación entre la teoría clásica y la teoría cuántica puede comprenderse mejor mediante el teorema del coeficiente universal: el grupo de cohomología de Čech real $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{R})$ se puede construir si se conoce el grupo de cohomología entero $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{Z})$; ahora bien, si este último es un grupo de torsión, entonces el primero se anula y no hay ambigüedad en la acción clásica. Más precisamente, una ambigüedad en el nivel $d+2$ de intersecciones es la cofrontera de alguna d-cocadena y puede así ser absorbida en la redefinición de los términos al nivel $d+1$ de intersecciones. En este caso, la teoría cuántica será igualmente trivial pues el flujo de G será igual a cero.

Cuando el grupo de cohomología entero $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{Z})$ contenga a los enteros, el grupo de cohomología real $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{R})$ contendrá a los reales y, si hay una ambigüedad en la acción clásica, habrá automáticamente una condición de cuantización del flujo en la teoría cuántica. Puede verse entonces que la teoría de cohomología de Čech proporciona una estructura muy general y poderosa para describir la cuantización de constantes de acoplamiento físicas.

4. Conclusiones

Se ha presentado en este trabajo un método muy general, basado en la teoría de cohomología de Čech, mediante el cual pueden obtenerse condiciones topológicas de cuantización. De acuerdo con los trabajos de O. Álvarez [4, 5], se mostró que este método surge de considerar la relación que existe entre la formulación lagrangiana para una teoría de campos y la teoría de cohomología de Čech. Es importante destacar que los argumentos basados en teorías de cohomología son más generales que los argumentos basados en teorías de homotopía. En general, los argumentos homotópicos se basan en considerar el grupo de homotopía $\Pi_{d+1}(\Sigma)$ de la variedad Σ [16, 3]: si $\Pi_{d+1}(\Sigma)$ contiene los enteros, entonces es posible construir un argumento de cuantización; sin embargo, para hacer esto es necesario suponer ciertas propiedades para la variedad Σ.

De acuerdo con lo anterior, se pueden destacar los siguientes hechos:

1. En una teoría de campos en un espacio-tiempo de dimensión d existirá una ambigüedad en la acción clásica cuando se considere lo que sucede en las intersecciones de $d+2$ abiertos de una cubierta apropiada para la variedad Σ.

2. Si se exige que la teoría obtenida sea cuánticamente consistente, el término que produce la ambigüedad en la acción debe ser un múltiplo entero de 2π.

3. Sólo es posible escoger constantes enteras para el término ambiguo en la acción cuando el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{Z})$ contiene los enteros.

4. Cuando el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{Z})$ contiene los enteros, se obtiene una condición de cuantización para el flujo de una $(d+1)$-forma diferencial, en términos de las constantes enteras de dicho grupo.

5. La información contenida en el grupo de homotopía $\Pi_{d+1}(\Sigma)$ no siempre es útil para obtener argumentos de cuantización, a diferencia de lo que sucede con la información contenida en el grupo de cohomología $H_C^{d+1}(\Sigma, \mathbb{Z})$.

Los anteriores hechos permiten afirmar que el método más general para obtener condiciones de cuantización debe estar basado en argumentos originados en teorías de cohomología.

Referencias

[1] P. A. M. Dirac. "Quantized Singularities in the Electromagnetic Field". *Proc. R. Soc. Lond.* A**33**, 60. 1931.

[2] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton. "Three-dimensional Massive Gauge Theories". *Phys. Rev. Lett.* **48**(15), 975. 1982.

[3] R. Jackiw. "Topological Investigations of quantized Gauge Theories". *Current Algebra and Anomalies.* World Scientific, 1985.

[4] O. Álvarez. "Cohomology and Field Theory". *Symposium on Anomalies, Geometry and Topology.* World Scientific, 1985.

[5] O. Álvarez. "Topological Quantization and Cohomology". *Comm. Math. Phys.* **100** (2), 279. 1985.

[6] R. Bott and L. Tu. *Differential Forms in Algebrai c Topology.* Springer-Verlag. 1982.

[7] I. M. Singer and J. Thorpe. *Lecture Notes in Elementary Topology and Geometry*. Undergraduate Text in Mathematics. Springer-Verlag. 1976.

[8] E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. McGraw-Hill. 1966.

[9] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica*. Reverté, Barcelona, 1975.

[10] A. O. Barut. *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*. Dover, 1980.

[11] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, 1972.

[12] T. Y. Thomas. *Concepts from Tensor Analysis and Differential Geometry*. Second Edition. Academic Press, 1965.

[13] Y. Choqut-Bruhat, C. DeWitt-Morette and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manyfolds and Physics*. North-Holland, 1977.

[14] T. Eguchi, P. B. Gilkey and A. J. Hamson. "Gravitation, Gauges Theories and Differential Geometry". *Phys. Rep.* **66**(6) , 213, 1980.

[15] T. T. Wu and C. N. Yang. "Dirac's Monopole without String: Classical Lagrangian Theory". *Phys. Rev.* D **14**(2), 437, 1976.

[16] E. Witten. "Global Aspects of Current Algebras". *Nucl. Phys.* B**223**, 422, 1983.