Revista INTEGRACIÓN
Universidad Industrial de Santander
Escuela de Matemáticas
Vol. 19, No 2, p. 37–50, julio-diciembre de 2001

Discos relativistas magnetostáticos contra-rotantes

Favio Cala Vitery* , Gonzalo García**y Guillermo A. González***

Resumen

Se presenta en forma detallada el *modelo de contra-rotación* para el estudio de discos delgados magnetostáticos, axialmente simétricos sin presión radial. Se encuentra una condición general para las velocidades tangenciales de contra-rotación, indispensable para evaluar el tensor de energía-momento superficial del disco como la superposición de dos fluidos perfectos cargados en contra-rotación, así como expresiones para la densidad de energía, la presión y la densidad de corriente de los fluidos contra-rotantes. Se muestra que esta condición se satisface cuando los fluidos contra-rotantes circulan con velocidades iguales y opuestas siguiendo electro-geodésicas. Se presentan tres ejemplos específicos donde se obtienen modelos de contra-rotación bien comportados, basados en soluciones simples de las ecuaciones de Einstein-Maxwell.

1. Introducción

Uno de los problemas relevantes en la Teoría General de la Relatividad es la obtención de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein correspondientes a configuraciones de materia físicamente aceptables. Sin embargo, la obtención de soluciones exactas es un problema altamente complejo, cuya solución solamente ha sido posible en casos simples, altamente simétricos. Dentro de este

*Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, Email: favio_cala@mixmail.com
**Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, Email: gogarcia@uis.edu.co
***Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia, Email: guillego@uis.edu.co

contexto se han desarrollado algunas técnicas para la obtención de soluciones exactas que, además de reproducir resultados conocidos, también generan nuevas soluciones. Una de estas técnicas consiste en la obtención de soluciones estacionarias o estáticas de las ecuaciones de Einstein que describan discos relativistas.

Estos discos son de gran interés en astrofísica, ya que pueden aplicarse al modelamiento de galaxias, distribuciones discoidales de polvo y universos. Este tipo de soluciones fueron estudiadas por primera vez por Bonnor y Sackfield [1], quienes obtuvieron discos estáticos sin presión. Posteriormente, Morgan y Morgan obtuvieron discos estáticos con y sin presión radial [2, 3]. En relación con el colapso gravitacional, Chamorro, Gregory y Stewart obtuvieron soluciones discoidales [4]. Así, un conjunto de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein, que corresponden a discos estáticos y estacionarios con o sin presión radial, han sido estudiadas por diversos autores [6-15].

En el caso de discos estáticos sin presión radial, los cuales pueden construirse partiendo de soluciones de Weyl, existen dos interpretaciones generalmente aceptadas. La estabilidad de estos modelos se puede explicar ya sea suponiendo que existen esfuerzos en la dirección tangencial o suponiendo que las partículas sobre el plano del disco se mueven bajo la acción de su propio campo gravitacional de tal forma que el mismo número de partículas se mueve en sentido horario y antihorario. Esta interpretación, el *modelo de contrarotación*, o *Counter-Rotating Model* (CRM), se emplea frecuentemente, pues resulta conveniente para reproducir efectos rotacionales reales. Aunque esta interpretación puede tomarse como un recurso operacional, existe evidencia observacional de discos conformados por fluidos de materia rotante y contrarotante [16, 17].

El estudio de fuentes discoidales en presencia de campo magnético también es de gran interés astrofísico, puesto que se ha señalado que la existencia de campos magnéticos en la nube primitiva de plasma que origina objetos estelares como galaxias y estrellas, permanece después de que los objetos han sido formados. Se dice que las líneas de fuerza magnéticas están *congeladas* dentro del fluido. Desde luego, este campo puede desempeñar diversos papeles en astrofísica. La presencia de campos magnéticos ejerce una gran influencia sobre la estructura y evolución de estos discos. Recientemente se han considerado modelos de discos para espacio-tiempos axialmente simétricos con campos magnéticos [18]. De acuerdo con la referencia [19], los discos resultantes pueden interpretarse ya sea como anillos con corriente y presión interna o como la superposición de dos fluidos contra-rotantes que circulan a lo largo de electrogeodésicas.

El objetivo de este artículo es presentar un estudio detallado del modelo de contra-rotación para discos magnetostáticos axialmente simétricos sin presión radial. Para este efecto, en la sección 2 se presenta un resumen del procedimiento para obtener discos delgados magnetostáticos axisimétricos. Se obtienen expresiones para el tensor de energía-momento superficial y la densidad de corriente magnetostática del disco. Seguidamente, en la sección 3, los discos son interpretados en términos del CRM. Se encuentra una condición sobre las velocidades tangenciales de contra-rotación, indispensable para evaluar el tensor de energía-momento del disco como la superposición de dos fluidos de polvo cargados contra-rotantes. Después se muestra que esta condición se satisface si los dos fluidos se mueven siguiendo líneas electrogeodésicas con velocidades tangenciales iguales y opuestas. También se encuentran expresiones analíticas para la densidad de energía, la densidad de corriente y las velocidades de contra-rotación de los fluidos. En las secciones 4-6 se presentan tres ejemplos específicos, basados en soluciones simples a las ecuaciones de Einstein-Maxwell, donde se obtienen modelos de contra-rotación bien comportados. En la sección final, sección 7, se resumen los resultados principales.

2. Discos relativistas magnetostáticos

La métrica más simple para describir espacio-tiempos estáticos axialmente simétricos es el elemento de línea de Weyl

$$ds^2 = e^{-2\Phi}[r^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)] \; - \; e^{2\Phi} dt^2 \; , \tag{2.1}$$

donde Φ y Λ son funciones de r y z solamente. Para restringir el potencial electromagnético a la descripción de un campo magnético puro y axialmente simétrico el potencial A_a se escoge como

$$A_a = A(r, z)\delta_a^{\varphi}, \tag{2.2}$$

con lo cual las componentes no nulas del tensor de Maxwell son

$$F_{\varphi z} \; = \; -A_{,z} \qquad , \qquad F_{r\varphi} = \; A_{,r} \, . \tag{2.3}$$

Para la métrica (2.1) las ecuaciones de Einstein-Maxwell en presencia de campos magnéticos puros son equivalentes al sistema

$$\Phi_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \Phi_{,zz} - \frac{e^{2\Phi}}{2r^2}(A_{,r}^2 + A_{,z}^2) \;=\; 0, \tag{2.4a}$$

$$A_{,rr} - \frac{1}{r}A_{,r} + A_{,zz} + 2(A_{,r}\Phi_{,r} + A_{,z}\Phi_{,z}) \;=\; 0, \tag{2.4b}$$

$$\Lambda_{,r} \;=\; r(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2) + \frac{e^{2\Phi}}{2r}(A_{,r}^2 - A_{,z}^2), \tag{2.4c}$$

$$\Lambda_{,z} \;=\; 2r\Phi_{,r}\Phi_{,z} + \frac{1}{r}e^{2\Phi}A_{,r}A_{,z}. \tag{2.4d}$$

Para obtener una solución de (2.4) que represente un disco delgado en $z = 0$, suponemos que el tensor métrico es continuo a través del disco, pero que sus primeras derivadas presentan discontinuidades en el plano $z = 0$, de modo que se obtiene un tensor de energía-momento $T_a^b \;=\; Q_a^b\,\delta(z)$ y una densidad de corriente planar $\mathrm{i}^a = 2F^{az}\delta(z)$, donde $\delta(z)$ es la función delta de Dirac con soporte en el disco y Q_b^a es el tensor de energía-momento distribucional. El “verdadero” tensor de energía momento superficial (SEMT) del disco, S_a^b, puede obtenerse mediante la relación $S_a^b = e^{\Lambda-\Phi}Q_a^b$. Similarmente la densidad de corriente se obtiene como $\mathrm{j}^a = e^{\Lambda-\Phi}\mathrm{i}^a$ [5, 15, 18].
Para la métrica (2.1), las componentes no-nulas de S_a^b son

$$S_0^0 \;=\; 2e^{\Phi-\Lambda}\left\{\Lambda_{,z} - 2\Phi_{,z}\;\right\}, \tag{2.5a}$$

$$S_1^1 \;=\; 2e^{\Phi-\Lambda}\Lambda_{,z}\,, \tag{2.5b}$$

y la densidad de corriente es

$$\mathrm{j}_\varphi = \;-2e^{\Phi-\Lambda}A_{,z}, \tag{2.6}$$

donde todas las cantidades se evalúan en $z = 0^+$.

Con una tétrada ortonormal $\mathrm{e}_{\hat{a}}{}^{b} = \{V^b, W^b, X^b, Y^b\}$, donde

$$V^a = e^{-\Phi}\,(1,0,0,0)\ , \tag{2.7a}$$

$$W^a = \frac{e^{\Phi}}{r}\,(0,1,0,0)\ , \tag{2.7b}$$

$$X^a = e^{\Phi-\Lambda}(0,0,1,0)\ , \tag{2.7c}$$

$$Y^a = e^{\Phi-\Lambda}(0,0,0,1)\ , \tag{2.7d}$$

podemos escribir la métrica y el tensor de energía-momento superficial en las formas canónicas

$$g_{ab} = -V_aV_b + W_aW_b + X_aX_b + Y_aY_b\ , \tag{2.8a}$$

$$S_{ab} = \epsilon V_aV_b + p_\varphi W_aW_b\ , \tag{2.8b}$$

donde

$$\epsilon = -S^0_0 \quad , \quad p_\varphi = S^1_1 \quad , \tag{2.9}$$

son la densidad de energía y la presión acimutal del disco.

3. El modelo de contra-rotación

En esta sección se considera, de acuerdo con las referencias [21] y [22], que el tensor de energía-momento superficial S^{ab} (SEMT) y la densidad de corriente j^a pueden ser expresados como la superposición de dos fluidos perfectos cargados contra-rotantes que circulan en direcciones opuestas. Esto significa que se hacen las siguientes suposiciones:

$$S^{ab} = S^{ab}_{+} + S^{ab}_{-}\ , \tag{3.1a}$$

$$\mathrm{j}^a = \mathrm{j}^a_{+} + \mathrm{j}^a_{-}, \tag{3.1b}$$

donde las cantidades del lado derecho son, respectivamente, el SEMT y la densidad de corriente de los fluidos contra-rotantes.

Sean $U^a_\pm = (U^0_\pm, U^1_\pm, 0, 0)$ los vectores velocidad de los dos fluidos contra-rotantes. Para hacer la descomposición (3.1a) y (3.1b) se proyectan los vectores velocidad sobre la tétrada $\mathrm{e}_{\hat{a}}{}^{b}$, usando las relaciones [23]

$$U_{\pm}^{\hat{a}} \;=\; \mathrm{e}^{\hat{a}}{}_{b} U_{\pm}^{b} \qquad , \qquad U_{\pm}^{a} = \; U_{\pm}^{\hat{c}} \mathrm{e}_{\hat{c}}{}^{a}. \tag{3.2}$$

Con la tétrada (2.7) es posible escribir

$$U_{\pm}^{a} \;=\; \frac{V^{a} + \mathrm{U}_{\pm} W^{a}}{\sqrt{1 - \mathrm{U}_{\pm}^{2}}}, \tag{3.3}$$

donde $\mathrm{U}_{\pm} = U_{\pm}^{\hat{1}} / U_{\pm}^{\hat{0}}$ son las velocidades tangenciales de los fluidos con respecto a la tétrada.

Utilizando (3.3), el tensor de energía-momento sobre la superficie del disco -SEMT- puede expresarse como

$$\begin{aligned} S^{ab} \;&=\; \frac{f(\mathrm{U}_{-}, \mathrm{U}_{-})(1 - \mathrm{U}_{+}^{2}) \; U_{+}^{a} U_{+}^{b}}{(\mathrm{U}_{+} - \mathrm{U}_{-})^{2}} \\ &+\; \frac{f(\mathrm{U}_{+}, \mathrm{U}_{+})(1 - \mathrm{U}_{-}^{2}) \; U_{-}^{a} U_{-}^{b}}{(\mathrm{U}_{+} - \mathrm{U}_{-})^{2}} \\ &-\; \frac{f(\mathrm{U}_{+}, \mathrm{U}_{-})(1 - \mathrm{U}_{+}^{2})^{\frac{1}{2}}(1 - \mathrm{U}_{-}^{2})^{\frac{1}{2}}(U_{+}^{a} U_{-}^{b} + U_{-}^{a} U_{+}^{b})}{(\mathrm{U}_{+} - \mathrm{U}_{-})^{2}}, \end{aligned}$$

donde

$$f(\mathrm{U}_{1}, \mathrm{U}_{2}) \;=\; \epsilon \mathrm{U}_{1} \mathrm{U}_{2} + p_{\varphi} \; . \tag{3.4}$$

Para expresar el SEMT en la forma (3.1a), el término mixto debe desaparecer, así que las velocidades tangenciales de contra-rotación deberán estar relacionadas mediante la expresión

$$f(\mathrm{U}_{+}, \mathrm{U}_{-}) \;=\; 0 \; , \tag{3.5}$$

donde se ha supuesto que $|\mathrm{U}_{\pm}| \neq 1$. En consecuencia, el SEMT S^{ab} puede expresarse como la superposición de dos fluidos perfectos en contra-rotación si, y sólo si, la ecuación anterior admite una solución tal que $\mathrm{U}_{+} \neq \mathrm{U}_{-}$.

En este caso el SEMT puede escribirse como en (3.1a),

$$S_{\pm}^{ab} = (\epsilon_{\pm} + p_{\pm}) \; U_{\pm}^{a} U_{\pm}^{b} \, , \tag{3.6}$$

donde

$$\epsilon_+ + \ p_+ \ = \left[\frac{1 - \mathrm{U}_+^2}{\mathrm{U}_- - \mathrm{U}_+}\right] \mathrm{U}_- \epsilon \ , \tag{3.7a}$$

$$\epsilon_- + \ p_- \ = \left[\frac{1 - \mathrm{U}_-^2}{\mathrm{U}_+ - \mathrm{U}_-}\right] \mathrm{U}_+ \epsilon \ , \tag{3.7b}$$

$$\epsilon_+ + \ \epsilon_- \ = \ \epsilon \ - \ p_\varphi, \tag{3.7c}$$

$$p_+ + \ p_- \ = \ 0. \tag{3.7d}$$

Nótese que las densidades de energía contra-rotantes $\epsilon_\pm$ y las presiones $p_\pm$ no quedan definidas unívocamente mediante las relaciones anteriores, aún para valores definidos de $\mathrm{U}_\pm$.

Para obtener dos fluidos contra-rotantes es indispensable tomar $p_+ = p_- = 0$. En este caso sus densidades de energía estarán dadas por

$$\epsilon_\pm = \left[\frac{1 - \mathrm{U}_\pm^2}{\mathrm{U}_\mp - \mathrm{U}_\pm}\right] \mathrm{U}_\mp \epsilon. \tag{3.8}$$

De igual manera, es posible expresar la densidad de corriente (3.1b) como

$$\mathrm{j}_\pm^a = \sigma_\pm U_\pm^a, \tag{3.9}$$

donde $\sigma_\pm$ son las densidades de carga en reposo de los fluidos contra-rotantes y están dadas por

$$\sigma_\pm = \frac{\mathrm{J}^1}{W^1} \left[\frac{\sqrt{1 - \mathrm{U}_\pm^2}}{\mathrm{U} \pm - \mathrm{U}\mp}\right]. \tag{3.10}$$

Para analizar la estabilidad del disco en caso de perturbaciones radiales es importante tener en cuenta la condición de estabilidad,

$$\frac{d(h^2)}{dr} \ > \ 0 \ , \tag{3.11}$$

la cual es una extensión del criterio de estabilidad de Rayleigh para un fluido en reposo en un campo gravitacional(véase, por ejemplo, [24]). En la expresión anterior h es el momento angular específico para una partícula que rota a un radio r determinado, dado por

$$h_\pm = \frac{r e^{-\Phi} \mathrm{U}_\pm}{\sqrt{1 - \mathrm{U}_\pm^2}}. \tag{3.12}$$

La condición (3.5) no determina los $\mathrm{U}_\pm$ unívocamente, así que existe cierta libertad en la elección de $U^a_\pm$. Una posibilidad comúnmente utilizada consiste en suponer que los dos fluidos contra-rotantes circulan a lo largo de electro-geodésicas:

$$\frac{1}{2}\epsilon_\pm g_{ab,r} U^a_\pm U^b_\pm = -\sigma_\pm F_{ra} U^a_\pm. \tag{3.13}$$

Sean $\omega_\pm = U^1_\pm / U^0_\pm$ las velocidades angulares de las partículas. Sustituyendo (3.3), (3.8) y (3.10) en (3.13), se sigue que

$$g_{11,r}\omega^2 + g_{00,r} = -\frac{2\mathrm{j}^1 V_0^2}{\epsilon} A_{,r} \,, \tag{3.14}$$

de modo que

$$\omega_\pm \ = \ \pm\,\omega \qquad , \qquad \omega^2 \ = \ -\ \frac{g_{00,r}}{g_{11,r}} \ -\ \frac{2\mathrm{j}^1 V_0^2}{\epsilon g_{11,r}} A_{,r}. \tag{3.15}$$

Nótese que el par de fluidos geodésicos circulan con velocidades iguales y opuestas.

Para verificar que las velocidades de los fluidos geodésicos están de acuerdo con (3.5), es necesario calcular $f(\mathrm{U}_+, \mathrm{U}_-)$. En términos de $\omega_\pm$ se obtiene

$$\mathrm{U}_\pm \ = \ \pm\,\mathrm{U} \ = \ \mp \left[\frac{W_1}{V_0}\right]\omega. \tag{3.16}$$

Ahora bien, utilizando las ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.4) y las expresiones (2.5) para el SEMT y la densidad de corriente, se puede demostrar que, efectivamente, $f(\mathrm{U}_+, \mathrm{U}_-)$ se anula. Esto implica que la condición (3.5) resulta cómodamente equivalente a

$$\mathrm{U}^2 \ = \ \frac{p_\varphi}{\epsilon} \,, \tag{3.17}$$

como suele suponerse en los trabajos concernientes a modelos de discos en contra-rotación.

Tenemos, entonces, dos fluidos de polvo contra-rotantes con iguales densidades de energía, dadas por

$$\epsilon_\pm \ = \ \frac{\epsilon - p_\varphi}{2}, \tag{3.18}$$

momentos angulares específicos

$$h_\pm = r e^{-\Phi}\sqrt{\frac{p_\varphi}{\epsilon - p_\varphi}}, \tag{3.19}$$

y densidades de carga

$$\sigma_{m\pm} = \frac{1}{2r} e^{\Phi} \mathrm{j}_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{p_\varphi} - 1}. \tag{3.20}$$

Como puede verse, se han determinado todas las cantidades involucradas en el modelo de contra-rotación para el caso de discos magnetostáticos axialmente simétricos.

4. CRM para discos tipo Reissner-Nordström

Una solución sencilla del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.4) es la solución de Reissner-Nordström [25], dada por

$$\Phi = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{(x+a)^2} \right], \tag{4.1a}$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{x^2 - 1}{x^2 - y^2} \right], \tag{4.1b}$$

$$A = \sqrt{2} k b y, \tag{4.1c}$$

donde $a = m/k$, $b = e/k$, con $k^2 = m^2 - e^2$, de modo que $a^2 = 1 + b^2$. Aquí m y e son la masa y la carga, respectivamente, x e y son las coordenadas esferoidales prolatas, que se relacionan con las coordenadas de Weyl, mediante las expresiones

$$2kx = \sqrt{r^2 + (z + z_0 + k)^2} + \sqrt{r^2 + (z + z_0 - k)^2}, \tag{4.2a}$$

$$2ky = \sqrt{r^2 + (z + z_0 + k)^2} - \sqrt{r^2 + (z + z_0 - k)^2}. \tag{4.2b}$$

Nótese que el origen ha sido desplazado del eje z a z_0.

A partir de las expresiones anteriores pueden calcularse las cantidades físicas asociadas al disco. Sea $\tilde{\epsilon} = k\epsilon$, $\tilde{p}_\varphi = kp_\varphi$; entonces

$$\tilde{\epsilon} = \frac{4\bar{y}(\bar{x}^2 - 1)(a\bar{x} + \bar{y}^2)}{(\bar{x}+a)^2(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^{3/2}}, \tag{4.3}$$

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{4\bar{x}\bar{y}(1 - \bar{y}^2)}{(\bar{x}+a)(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^{3/2}}, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{j}_\varphi = -\frac{2\sqrt{2}b\bar{x}(1 - \bar{y}^2)}{(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)^{1/2}(\bar{x}+a)}, \tag{4.5}$$

donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ están dadas por

$$2\bar{x} = \sqrt{\tilde{r}^2 + (\alpha+1)^2} + \sqrt{\tilde{r}^2 + (\alpha-1)^2}, \tag{4.6a}$$

$$2\bar{y} = \sqrt{\tilde{r}^2 + (\alpha+1)^2} - \sqrt{\tilde{r}^2 + (\alpha-1)^2}, \tag{4.6b}$$

con $\tilde{r} = r/k$, $\alpha = z_0/k$ y $\alpha > 1$.

Para estudiar el comportamiento de estas cantidades físicas sobre el disco se realizó un análisis gráfico, tomando diferentes valores para los parámetros α y b. Se observó que la densidad de energía presenta un máximo en $\tilde{r} = 0$ y luego disminuye rápidamente con $\tilde{r}$. Igualmente se observó que la presencia de campo magnético provoca la disminución de la densidad de energía en las regiones centrales del disco. Por otro lado, la presión acimutal $\tilde{p}_\varphi$ aumenta rápidamente a medida que uno se aleja del centro del disco, alcanzando un máximo para luego disminuir rápidamente. Se notó también que el campo magnético disminuye la presión en todas las regiones del disco. La corriente j_φ, al igual que la densidad de energía, tiene un máximo hacia el centro del disco y luego decrece.

Seguidamente se consideró el CRM para los mismos valores de los parámetros. Es preciso apuntar que todas las cantidades relevantes también pueden presentarse en forma analítica, partiendo de las expresiones anteriores, pero el resultado es tan engorroso que resulta más conveniente comentar su comportamiento. Con base en un análisis gráfico de las curvas de velocidad de los fluidos contra-rotantes U^2 como funciones de $\tilde{r}$, se observó que éstas se incrementan rápidamente en la región central del disco y alcanzan un máximo, para luego decrecer monótonamente. También pudo verificarse que la presencia de campo magnético atenúa el comportamiento relativista de los discos. Se pudo observar también que los discos se hacen menos relativistas con incrementos en el valor de α, y que los discos con $\alpha < 1$ no pueden construirse empleando el CRM, debido a que $\mathrm{U}^2 > 1$.

Para el momento angular específico h^2 de los fluidos contra-rotantes, para los parámetros elegidos, se obtuvieron funciones monótonas crecientes de $\tilde{r}$ que corresponden a modelos de contra-rotación estables para los discos. Sin embargo, el CRM no puede aplicarse para $b = 4{,}0$. En consecuencia, la presencia de campo magnético puede hacer inestable el CRM contra perturbaciones radiales. Finalmente, las curvas de las densidades de masa $\epsilon_\pm$ y las densidades de carga $(\sigma_{m\pm})$ de los dos fluidos presentan un máximo hacia el centro del disco y luego decrecen monótonamente. En consecuencia, los CRM construidos a partir de estos valores de los parámetros son bien comportados.

5. CRM para discos tipo Taub-NUT

Una solución tipo Taub-NUT de las ecuaciones de Einstein-Maxwell puede presentarse así:

$$\Phi = \ln\left[\frac{x^2-1}{x^2+2ax+1}\right], \tag{5.1a}$$

$$\Lambda = 2\ln\left[\frac{x^2-1}{x^2-y^2}\right], \tag{5.1b}$$

$$A = 2\sqrt{2}kby, \tag{5.1c}$$

con $a^2 - b^2 = 1$ y x e y son, nuevamente, las coordenadas esferoidales prolatas, dadas previamente por las ecuaciones (4.2a) y (4.2b).

Las cantidades físicas asociadas al disco pueden escribirse, en este caso, como

$$\tilde{\epsilon} = \frac{8\bar{y}[\bar{x}(a\bar{x}^3 - 3a\bar{x} - 2) + \bar{y}^2(2\bar{x}^3 + 3a\bar{x}^2 - a)]}{(\bar{x}^2-1)(\bar{x}^2+2a\bar{x}+1)^2}, \tag{5.2}$$

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{16\bar{x}\bar{y}(1-\bar{y}^2)}{(\bar{x}^2-1)(\bar{x}^2+2a\bar{x}+1)}, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{j}_\varphi = -\frac{4\sqrt{2}b\bar{x}(1-\bar{y}^2)(\bar{x}^2-\bar{y}^2)}{(\bar{x}^2-1)(\bar{x}^2+2a\bar{x}+1)}, \tag{5.4}$$

donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ están dadas por las ecuaciones (4.6a) y (4.6b).

Nuevamente se hará un breve comentario de los resultados analizados a partir de las gráficas para esta solución, en las cuales se observa que estos discos tienen un comportamiento similar al caso anterior. Estos modelos de contra-rotación son más relativistas que los construidos a partir de la solución tipo Reissner-Nordström. Encontramos también que los discos con $b = 0{,}5$, $\alpha = 1{,}5$ no pueden construirse a partir del CRM porque $\mathrm{U}^2 > 1$. También se verifica que la presencia de campo magnético puede contribuir con la inestabilidad del CRM en caso de perturbaciones radiales. De modo que el CRM no puede aplicarse para $b = 3$. Las restantes funciones tienen, también, un comportamiento similar al de la solución analizada previamente.

6. CRM para discos tipo Kerr

A continución se presenta el modelo de discos contra-rotantes generado a partir de una solución tipo Kerr. Una solución tipo Kerr del conjunto de ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.4) puede escribirse así:

$$\Phi = \ln\left[\frac{a^2x^2 - b^2y^2 - 1}{(ax+1)^2 - b^2y^2}\right], \tag{6.1a}$$

$$\Lambda = 2\ln\left[\frac{a^2x^2 - b^2y^2 - 1}{a^2(x^2 - y^2)}\right], \tag{6.1b}$$

$$A = -\frac{\sqrt{2}kb(1-y^2)(ax+1)}{a(a^2x^2 - b^2y^2 - 1)}, \tag{6.1c}$$

con $a^2 - b^2 = 1$ y x e y son, una vez más, las coordenadas esferoidales prolatas, dadas por las ecuaciones (4.2a) y (4.2b).

Las cantidades físicas asociadas al disco pueden escribirse, en este caso, como

$$\tilde{\epsilon} = \frac{8a^4\bar{y}}{(a^2\bar{x}^2 - b^2\bar{y}^2 - 1)^2[(a\bar{x}+1)^2 - b^2\bar{y}^2]^2}\big\{(\bar{x}^2 - \bar{y}^2)[a(\bar{x}^2-1)[(a\bar{x}+1)^2 + b^2\bar{y}^2] - 2b^2\bar{x}(a\bar{x}+1)(1-\bar{y}^2)] - 2\bar{x}(\bar{x}^2-1)(1-\bar{y}^2)[(a\bar{x}+1)^2 - b^2\bar{y}^2]\big\}, \tag{6.2}$$

$$\tilde{p}_\varphi = \frac{16a^4\bar{x}\bar{y}(\bar{x}^2-1)(1-\bar{y}^2)}{(a^2\bar{x}^2 - b^2\bar{y}^2 - 1)^2[(a\bar{x}+1)^2 - b^2\bar{y}^2]}, \tag{6.3}$$

$$\mathrm{j}_\varphi = -\frac{2\sqrt{2}a^4b\bar{y}(\bar{x}^2-1)(1-\bar{y}^2)(\bar{x}^2-\bar{y}^2)[(a\bar{x}+1)(3a\bar{x}+1) + b^2\bar{y}^2]}{(a^2\bar{x}^2 - b^2\bar{y}^2 - 1)^3[(a\bar{x}+1)^2 - b^2\bar{y}^2]}, \tag{6.4}$$

donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ están dadas por las ecuaciones (4.6a) y (4.6b).

La densidad de energía tiene un comportamiento opuesto al mostrado en el caso anterior. Esto es, cerca de la región central del disco ésta incrementa cuando el campo magnético es aplicado. Las otras cantidades tienen un comportamiento similar al de los casos precedentes. No obstante, la corriente magnetostática a partir de cierto r toma valores negativos. Estos CRM son más relativistas que los considerados anteriormente. Nótese que los discos con $b = 0{,}5$ y $\alpha = 1{,}4$ no pueden obtenerse a partir del modelo de contra-rotación porque $\mathrm{U}^2 > 1$. También puede observarse que la presencia de campos magnéticos, en este caso, puede estabilizar el CRM contra perturbaciones radiales. De modo que, solamente los CRM con $b = 1{,}0$, y 1,5 se comportan satisfactoriamente.

7. Discusión de resultados

Hemos presentado un estudio detallado del modelo de contra-rotación para discos delgados magnetostáticos, axialmente simétricos sin presión radial. En este análisis se encontró una condición general para las velocidadaes tangenciales de los fluidos contra-rotantes. Esta condición es requerida para poder evaluar el tensor de energía-momento superficial del disco, de tal forma que su interpretación pueda ser tomada por la superposición de dos fluidos perfectos contra-rotantes debidamente cargados. Se obtuvieron expresiones para las cantidades físicas de los fluidos contra-rotantes. Esto es, se hallaron expresiones para la densidad de energía, la presión y la densidad de corriente magnetostática de los fluidos contra-rotantes en términos de la densidad de energía, la presión acimutal y la densidad de corriente planar del disco, previamente generado. Se mostró que esta condición se satisface si suponemos que los dos fluidos cargados contra-rotantes circulan a lo largo de electro-geodésicas con velocidades tangenciales iguales y opuestas.

En este trabajo se presentaron tres ejemplos específicos basados en soluciones simples a las ecuaciones de Einstein-Maxwell partiendo de soluciones generadas mediante técnicas convencionales para tal efecto [25]. Se encontró que el modelo de contra-rotación tiene un comportamiento más relativista cuando se aplica a discos generados a partir de la solución tipo Kerr, que cuando se aplica a aquellos generados partiendo de las soluciones tipo Taub-NUT y tipo Reissner-Nordström. También se concluyó que la presencia de campos magnéticos puede inestabilizar el CRM ante perturbaciones radiales en el caso de los discos construidos partiendo tanto de la solución tipo Taub-NUT, como de la tipo Reissner-Nordström. Recíprocamente, el modelo de contra-rotación puede estabilizar los discos tomados de la solución tipo Kerr. También se construyeron algunos modelos de contra-rotación muy estables ante perturbaciones radiales con velocidades tangenciales contra-rotantes bien definidas.

Agradecimientos

Favio Cala desea agradecer el apoyo brindado por la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia. Gonzalo García desea agradecer el apoyo recibido por parte de la Vicerrectoría Académica de la Universidad Industrial de Santander a través de una beca de posgrado.

Referencias

[1] W. A. Bonnor and A. Sackfield. *Comm. Math. Phys.* 8, 338 (1968).
[2] T. Morgan and L. Morgan. *Phys. Rev.* 183, 1097 (1969).
[3] L. Morgan and T. Morgan. *Phys. Rev.* D2, 2756 (1970).

[4] A. Chamorro, R. Gregory and J. M. Stewart. *Proc. R. Soc. Lond.* A 413, 251 (1987).

[5] G. A. González and P. S. Letelier. *Class. Quantum. Grav.* 16, 479 (1999).

[6] D. Lynden-Bell and S. Pineault. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 185, 679 (1978).

[7] P.S. Letelier and S. R. Oliveira. *J. Math. Phys.* 28, 165 (1987).

[8] J. P. S. Lemos. *Class. Quantum Grav.* 6, 1219 (1989).

[9] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. *Class. Quantum Grav.* 10, L75 (1993).

[10] J. Bičák, D. Lynden-Bell and J. Katz. *Phys. Rev.* D47, 4334 (1993).

[11] J. Bičák, D. Lynden-Bell and C. Pichon. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 265, 126 (1993).

[12] J. Bičák and T. Ledvinka. *Phys. Rev. Lett.* 71, 1669 (1993).

[13] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. *Phys. Rev.* D49, 5135 (1994).

[14] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. *Int. J. Mod. Phys.* D5, 53 (1996).

[15] G. A. González and P. S. Letelier. *Phys. Rev.* D 62, 064025 (2000).

[16] V. C. Rubin, J. A. Graham and J. D. P Kenney. *Ap. J.* 394, L9-L12, (1992).

[17] H. Rix, M. Franx, D. Fisher and G. Illingworth. *Ap. J.* 400, L5-L8, (1992).

[18] P. S. Letelier. *Phys. Rev.* D 60, 104042 (1999).

[19] T. Ledvinka, J. Bičák, and M. Žofka. *Procceedings of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General Relativity*, edited by T. Piran (World Scientific, Singapure, 1999)

[20] J. Katz, J. Bičák and D. Lynden-Bell. *Class. Quantum Grav.* 16, 4023 (1999).

[21] P. S. Letelier. *Phys. Rev.* D 22, 807 (1980).

[22] J. J. Ferrando, J. A. Morales and M. Portilla. *Gen. Rel. and Grav.* 22, 1021 (1990).

[23] S. Chandrasekar. *The Mathematical Theory of Black Holes.* Oxford University Press, 1992.

[24] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics.* Addisson-Wesley, Reading, MA, 1989.

[25] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt, and M. McCallum. *Exact Solutions of Einsteins's Field Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1980.