Flujo en Medio Poroso No Saturado con Conductividad Hidráulica Discontinua

Planteamiento del Problema

SULLY GÓMEZ I.
Profesora Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Industrial de Santander
sgomez@uis.edu.co

CARLOS F. COGOLLO A.
Ingeniero Civil
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Industrial de Santander

OSCAR J. MESA S.
Profesor Facultad de Minas
Universidad Nacional de Colombia, Medellín

LILIAN I. ROJAS V.
Ingeniero Civil
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Industrial de Santander.

Resumen

Cuando se estudia el flujo en un medio poroso no saturado a partir de una recarga puntual, se identifican dos fenómenos: En el primero las condiciones de retención residual del suelo son despreciables, la masa de agua disponible para fluir es constante en el tiempo, por lo tanto el análisis dimensional considerando autosimilaridad de primer orden es suficiente para solucionar la conocida ***Ecuación de difusión.*** *Por el contrario, si se tiene en cuenta la retención residual del suelo, la masa de agua disponible para fluir es variable con el tiempo debido a que las fuerzas de capilaridad retienen parte del agua en los poros, por lo tanto la masa no cumple una ley de conservación y la suposición de autosimilaridad anterior no es válida. Se considera entonces otro tipo de suposición autosimilar llamada de segundo orden, en la cual aparecen los llamados exponentes anómalos. Bajo estas condiciones la ecuación a solucionar es no lineal con coeficiente discontinuo y recibe el nombre de* ***Ecuación de Baremblatt.*** *El análisis dimensional no es suficiente para obtener la solución completa y se acude a otras técnicas diferentes, en este caso a resolver un problema de autovalor. En la segunda parte se presentara la solución numerica y la aplicación de este problema.*

Palabras Clave: Medio poroso, difusión autosimilaridad, escalamiento, exponente anómalo, conductividad hidráulica, Barenblatt, análisis dimensional, autovalores, medio no saturado, retención residual, capilaridad, saturación, porosidad.

INTRODUCCIÓN

El problema del flujo en un medio poroso no saturado fue estudiado por Barenblatt [1]. El medio poroso o suelo se encuentra localizado sobre una roca impermeable de substrato horizontal, en el cual se distribuye una recarga puntual en forma instantánea, dicha recarga puede ser suministrada a través de un pozo de radio pequeño. Barenblatt obtuvo una solución para el problema idealizado a partir del análisis dimensional. Lo anterior significa que no ocurre retención residual en los poros y la conductividad hidráulica toma un valor constante. Posteriormente el mismo autor [2], solucionó el problema anterior considerando que una parte del agua es retenida en los poros por las fuerzas de capilaridad, por lo tanto la cantidad de agua disponible para fluir es variable. En este caso las condiciones del problema cambian, la conductividad hidráulica se convierte en una función discontinua y la suposición de similaridad para obtener la solución es diferente, debiéndose considerar los llamados exponentes anómalos en la nueva ley de similaridad. Estos exponentes son originados por la física misma del nuevo problema, el concepto fundamental es que debe considerarse la aparición de nuevas escalas, en este caso la escala característica de la recarga inicial.

El fenómeno de flujo se estudiará en el rango de asintotas intermedias, donde la solución no depende ni de los detalles de las condiciones iniciales, ni de las condiciones de borde, pero el sistema aun está lejos del estado último de equilibrio, es donde los fenómenos presentan mayor interés debido a que allí aparecen sus rasgos más notables. En ese rango las soluciones autosimilares describirán su comportamiento asintótico. El análisis dimensional plantea la autosimilaridad del problema que permite el escalamiento de sus variables, lo cual conlleva a que si la suposición de autosimilaridad planteada es válida, es posible entonces solucionar la ecuación diferencial ordinaria a la que ha dado lugar dicho escalamiento.

La solución a este problema tiene gran trascendencia, no solamente debido a que se esta dando posibilidad a la solución de problemas no ideales, sino además porque permite obtener comportamientos espacio-temporales más reales de masas de agua dentro de un suelo no saturado. Además este tipo de análisis permitirá solucionar también problemas de transporte de otros fluidos como pueden ser los contaminantes en el suelo, permitiendo cuantificar tiempos de desplazamientos y alcance de las plumas contaminantes más reales.

Los problemas con coeficientes discontinuos son problemas no lineales que deben resolverse considerando exponentes anómalos en la solución, ellos son problemas bastante comunes y muy poco tratados en la ingeniería.

FLUJO EN MEDIO POROSO

La masa de agua suministrada por una recarga puntual instantánea se propaga bajo la influencia de la gravedad y fluye a lo largo de un suelo impermeable. Dentro de la masa de agua los poros están parcialmente llenos y afuera los poros no contienen agua, solamente aire. El agua se propaga simétricamente y la altura del agua h(r, t) empieza a disminuir tan pronto se inicia el movimiento. Ver figura 1. Se trata ahora de describir el comportamiento de la masa de agua cuando se aproxima al estado de equilibrio, es decir, cuando la masa se encuentra totalmente difundida.

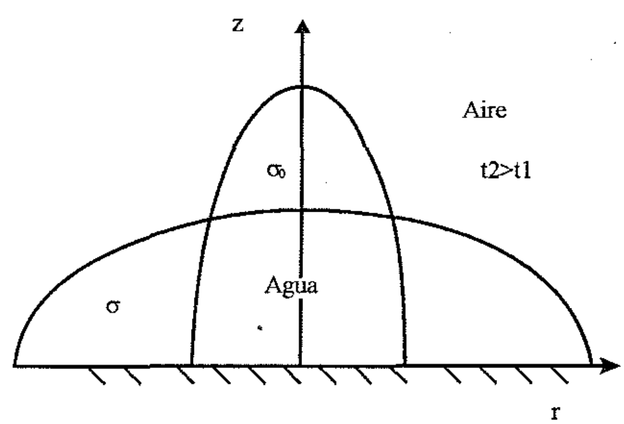

Figura 1. Diagrama esquemático del flujo de una montaña de agua subterránea.

La dinámica del flujo se describe con ecuaciones diferenciales parciales que describen el comportamiento temporal de la altura ***h*** del agua sobre la roca impermeable.

La altura es una función de la coordenada ***r*** en el plano *x-y*, en el tiempo *t*. decreciente con el radio. Se hacen dos aproximaciones considerando que el flujo es suficientemente lento: La presión en la masa de agua es hidrostática

(P = rgh) y se cumple la Ley de Darcy, el flujo es proporcional al gradiente de la cabeza de presión:

$$j = \frac{k}{\mu}\frac{\partial(\rho gh)}{\partial r}$$

donde **k/μ** es el coeficiente de proporcionalidad para la ley de Darcy, siendo **k** el coeficiente de permeabilidad del medio poroso (unidades de L^2) y m la viscosidad dinámica del agua.

Así, el flujo total alrededor de una superficie cilíndrica **$2\pi rh$** será:

$$j = -\frac{k}{\mu}\frac{\partial(\rho\, gh)2\pi\, rh}{\partial r} = -\frac{k}{\mu}\rho\, g\, 2\pi\, r\frac{\partial h^2}{\partial r} \quad (1)$$

La fracción del espacio de suelo ocupada por los poros es la porosidad m del medio, por lo tanto cuando el agua entra a un poro vacío ocupa una fracción s de su volumen, el aire en el suelo ocupa el volumen restante. Igualmente cuando el agua sale del poro, una parte de ella, so es mantenida allí por las fuerzas de capilaridad.

En ese problema se identifica la ocurrencia de dos procesos diferentes, separados por la distancia r0, la cual separa la zona donde el agua esta saliendo de los poros y la zona donde empieza a llenar los poros vacíos. La figura 2 corresponde a la posición de la masa de agua en dos tiempos consecutivos, t y t+dt, en los cuales se observa los dos procesos que se describirán a continuación.

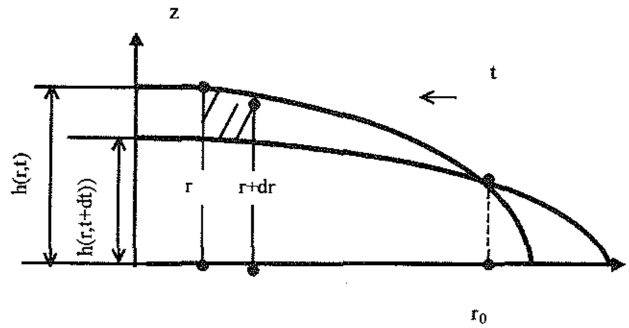

Figura 2. Derivación de la ecuación que describe el flujo de una montaña de agua subterránea.

A. Proceso de Drenaje:

El agua que se está drenando por gravedad sale de los poros ocupados y deja una película delgada retenida en las paredes equivalente una fracción de agua σ_0 que es llamada, retención residual; esto es debido a las fuerzas capilares existentes en el medio. El aire ocupa el espacio remanente de los poros. Esto ocurre en la región correspondiente a $r < r_0$. En este caso la altura de la masa de fluido decrece ($\partial h/\partial t$ es negativo) y la saturación disminuye desde σ hasta σ_0.

B. Proceso de Llenado:

A partir de la zona de recarga, el agua empieza a entrar a los poros y sólo ocupa una fracción σ del poro, el resto permanece con aire. Esto ocurre en la región donde $r > r_0$. En este caso la altura del agua aumenta con el tiempo ($\partial h/\partial t$ es positivo) y la saturación aumenta desde **0** hasta s. Ver figura 2.

Los dos procesos se caracterizan porque ocurren a velocidades diferentes, la velocidad con la cual se llenan los poros, es diferente a la velocidad con la cual se drenan, por lo tanto se introduce una asimetría en la dinámica del flujo.

En el punto $r = r_0$; la cantidad $\partial h/\partial t$ presenta una discontinuidad, r_0; depende del tiempo, y aumenta con la evolución o propagación de la masa. Esto genera ecuaciones con coeficiente discontinuo.

Para derivar las ecuaciones de flujo se considera que la rata de cambio en el volumen de agua entre elementos cilíndricos de radio r y $(r+\partial r)$, los cuales corresponden a un tiempo t y $(t+\Delta t)$ respectivamente, es igual a la rata de cambio en el volumen de agua debido a la ocurrencia de los procesos de llenado y de drenaje. Ver figura 2. Despejando y tomando los valores k_1 y k_2 de la siguiente manera:

$$k_2 = \frac{k\rho\, g}{2\, m\, \mu\, \sigma} \qquad k_1 = \frac{k\rho\, g}{2\, m\, \mu\, (\sigma - \sigma_0)}$$

se tiene la siguiente ecuación para la altura del agua:

$$\partial_t h = \left(\frac{k_1}{r}\right)\partial_r(r\partial_r h^2) \qquad para \quad \partial_t h \le 0$$

$$\partial_t h = \left(\frac{k_2}{r}\right)\partial_r(r\partial_r h^2) \qquad para \quad \partial_t h \le 0 \qquad (2)$$

La solución h a esta ecuación debe ser continua, el flujo es proporcional a la derivada ($\partial_r h^2 = 2h\partial_r h$) y también debe ser continuo. Para h diferente de cero el requisito es que la derivada ∂_r h sea continua y en h=0 la derivada debe tener una discontinuidad. La existencia y unicidad de la solución fue comprobada por Kamin (1991).

Para la solución de la ecuación *(2)* se debe tener una condición inicial: Se asume que en $t = 0$, el agua se concentra solamente dentro de una cierta región pequeña, donde el valor de saturación es σ. Para hallar la altura inicial ***h (r, 0)*** se relaciona con el volumen de agua *V*, en una área de concentración correspondiente a una longitud inicial r_* y se afecta por una función monotónica no creciente, $h_0(s)$ donde $s = r/r_*$ que es cero para $s \geq 1$. La integral es la unidad.

$$h(r,0) = \frac{V}{2\pi\ mr_*^2} h_0\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad \int_0^1 s h_0(s) ds = 1 \quad (3)$$

lo anterior se hace para tener una forma general para la recarga, ella podría tomar cualquier otra forma por ejemplo un perfil gausiano.

Ahora se tiene una formulación matemática al problema y se debe buscar una solución a la ecuación *(2)* que es continua; tiene una derivada continua $(\partial\ h^2/\partial\ r$ y satisface la condición inicial *(3)*. La existencia de solución y unicidad se comprueba en [5].

Autosimilaridad y Análisis Dimensional

Definir la autosimilaridad de un fenómeno es muy útil. Un fenómeno es autosimilar si la distribución espacial de sus propiedades en instantes de tiempo diferentes se pueden obtener mediante una transformación de similaridad de otra distribución, de esta manera la solución que se obtiene es invariante bajo alguna transformación. El análisis dimensional permite comprobar la autosimilaridad de un problema con formulación matemática, ya que permite el escalamiento de las variables y así el fenómeno mantiene sus propiedades en otras escalas. Sin embargo veremos que en algunos casos el análisis dimensional no resulta ser suficiente para obtener una solución completa al problema.

En general, el planteamiento de la forma de la solución autosimilar permite reducir las ecuaciones diferenciales parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias mas fácilmente solucionables.

En el caso del flujo de agua, la solución ***h*** depende de los siguientes parámetros independientes: $h = f(r, r_*, t, k_1, k_2, Q)$ siendo:

$$Q = \frac{V}{2\pi m\sigma}$$

Con dimensiones:

$[h] = H$ $[Q] = HL^2$ $[t] = T$ $[r] = [r_*]$ $[k_1] = [k_2] = L^2/HT$

La clase de dimensiones utilizada es H,L,T, siendo ***h*** el parámetro dependiente y los demás parámetros independientes. A partir del análisis dimensional se tiene la siguiente forma funcional:

$$\pi_1 = \phi_1(\pi_1, \pi_2, \pi_3)$$

Con los productos adimensionales:

$$\pi = \frac{hk_1^{1/2}t^{1/2}}{Q^{1/2}} \qquad \pi_1 = \frac{r}{Q^{1/4}K_1^{1/4}t^{1/4}}$$
$$\pi_2 = \frac{r_*}{Q^{1/4}k_1^{1/4}t^{1/4}} \qquad \pi_3 = \frac{k_2}{k_1} \qquad (4)$$

Como se dijo en el numeral 1, se está interesado en las escalas a largo tiempo donde han desaparecido la influencia de los detalles de las condiciones iniciales (la forma inicial de la masa de agua), por lo tanto se debe analizar las leyes de similaridad respecto a los productos π_1, π_2, que contienen el tiempo en el denominador. Debe analizarse su comportamiento asintótico como $t \to \infty$ y $\pi \to 0$, de manera que se pueda identificar si esos productos hacen que la función vaya en el limite a un valor finito diferente de cero o no, en el primer caso se tendría similaridad completa respecto a dicho parámetro y en el segundo caso se tendría la llamada por Barenblatt similaridad incompleta [2].

Si la suposición de similaridad completa respecto al producto π_2 es válida, la solución es análoga a la que se obtiene en el caso de propagación de calor a partir de una fuente instantánea concentrada de calor donde se aplica la ley de Fourier y la forma funcional será:

$\pi = \phi_1(\pi_1, 0, \pi_3) = \phi_1(\pi_1, \pi_3)$ con la siguiente solución :

$$h = \frac{Q^{1/2}}{k^{1/2}t^{1/2}} \phi_1(\varepsilon, k_2/k_1) \qquad \varepsilon = \pi_1 \quad (5)$$

ϕ_1 será la función de escalamiento a determinar.

Se deduce una expresión para hallar la distancia desde el origen hasta el punto donde se pasa del proceso de drenaje al del llenado $(\partial h/\partial t = 0)$.

$$r_0 = \varepsilon_0 \left(\frac{k_2}{k_1}\right) Q^{1/4}\ k_1^{1/4}\ t^{1/4} \quad (6)$$

Donde ε_0 es una cantidad adimensional que depende de k_2/k_1. Ahora, reemplazando *(5)* y *(6)* en *(2)* se obtienen las ecuaciones diferencial ordinaria con coeficiente discontinuo.

$$\frac{d^2\phi_1^{\ 2}}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\phi_1^{\ 2}}{d\varepsilon} + \frac{1}{4}\frac{d\phi_1}{d\varepsilon} + \frac{1}{2}\phi \;=\; 0 \qquad para \quad \varepsilon \leq \varepsilon_0 \qquad (7)$$

$$\frac{k_2}{k_1}\left(\frac{d^2\phi_1^{\ 2}}{d\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{d\phi_1^{\ 2}}{d\varepsilon}\right) + \frac{1}{4}\varepsilon\frac{d\phi_1}{d\varepsilon} + \frac{1}{2}\phi_1 \;=\; 0 \qquad para \quad \varepsilon \geq \varepsilon_0$$

Esta ecuación se puede solucionar multiplicando ambos lados por e y obteniendo ecuaciones diferenciales totales. Al integrar se tiene a partir de las condiciones físicas del problema que las constantes de integración son iguales a cero:

$$\varepsilon\frac{d\phi_1^{\ 2}}{d\varepsilon} + \frac{1}{4}\varepsilon^2\phi_1 \;=\; 0 \qquad para \quad \varepsilon < \varepsilon_0$$

$$\varepsilon\frac{d\phi_1^{\ 2}}{d\varepsilon} + \frac{k_1}{4k_2}\varepsilon^2\phi_1 \;=\; 0 \qquad para \quad \varepsilon > \varepsilon_0 \qquad (8)$$

Bajo la suposición de autosimilaridad completa respecto al parámetro p2 utilizando el análisis dimensional se obtiene:

$$r_1 \;=\; \varepsilon_1\left(\frac{k_2}{k_1}\right)Q^{1/4}\,k_1^{\ 1/4}\,t^{1/4} \qquad (9)$$

Observemos que en el caso de que k_1=k_2, es decir cuando el fluido residual en los poros es cero, las ecuaciones (8) son idénticas y corresponden a la ecuación clásica de difusión, que se ha obtenido tradicionalmente considerando la forma funcional: $\pi = \phi_1(\pi_1)$, es decir eliminando las demás variables involucradas en este problema. En este caso se supone válida la suposición de autosimilaridad completa con respecto al parámetro p2, es decir dicho parámetro hace que en el limite la función tienda a un valor finito diferente de cero.

Esto solo es posible si la fuente de recarga inicial puede ser considerada como una fuente concentrada instantánea, por ejemplo un pozo ideal de radio infinitamente pequeño, lo cual significa que el valor de la escala de longitud que presenta la recarga inicial no tiene influencia. La solución entonces sería la siguiente:

$$h = \frac{Q^{1/2}}{16k^{1/2}t^{1/2}}\left(8 - \frac{r^2}{(kQt)^{1/2}}\right) \qquad r \leq r_1 = \sqrt{8}(kQt)^{1/4} \qquad (10)$$

Como se observa el problema puede ser solucionado completamente utilizando el análisis dimensional, el cual permite establecer la autosimilaridad del problema y se dice entonces que la solución es autosimilar de primer orden.

En el caso que nos compete $k_1 \neq k_2$ es decir la saturación residual σ_0 es diferente de cero, se aplica el anterior procedimiento, es decir considerar autosimilaridad completa respecto al parámetro π_2, y se llega a una contradicción: Se conoce que $\partial h/\partial t$ cambia de signo dentro de la masa en un radio donde la altura de flujo es diferente de cero; esto ocurre en el dominio $r_0 < r_1$ y $\varepsilon_0 <$ ε_1. Si en la ecuación *(8)* se hace $\varepsilon = \varepsilon_0$ y se substraen las dos ecuaciones, se tiene que $\phi_1(\varepsilon_0) =_0$, lo cual no puede ser. De aquí se deduce que la suposición de autosimilaridad completa con respecto al parámetro π_2 es incorrecta en el caso de $k_1 \neq k_2$. Significa que en el limite la función $\phi_1(\pi_2)$, tiende a un valor no finito, por lo tanto no existe solución.

Para solucionar el problema propuesto aquí debe considerarse una suposición más complicada que la anterior y que veremos a continuación.

SOLUCIÓN AUTOSIMILAR DE SEGUNDO ORDEN

Debido a que los parámetros p2 y p1 tienden a cero cuando el tiempo t aumenta, se asume que dichos parámetros son pequeños. Bajo la suposición de autosimilaridad incompleta se busca entonces una representación de ley de potencia para la función f1 de la siguiente forma:

$$\pi_1 = \pi_2^{\gamma}\phi_1(\pi_1, \pi_2^{\delta}, \pi_3) \qquad (11)$$

donde γ y δ son constantes.

Relacionando en esta forma funcional los productos adimensionales de *(4)* se obtiene la siguiente forma para la solución

$$h = \frac{Q^{(2-\gamma)/4}r_*^{\gamma}}{(k_1t)^{(2+\gamma)/4}}\phi_1\left\{\frac{r}{r_*^{\delta}(k_1Qt)^{(1-\delta)/4}}\frac{k_2}{k_1}\right\} \qquad (12)$$

$$r_1 = \zeta_1\frac{k_2}{k_1}r_*^{\delta}(k_1Qt)^{(1-\delta)/4} \qquad r_0 = \zeta_0\frac{k_2}{k_1}r_*^{\delta}(k_1Qt)^{(1-\delta)/4}$$

En la ecuación anterior podemos simplificar y hacer las siguientes notaciones:

$$\beta = \frac{(1-\delta)}{4} \qquad \zeta = \frac{r}{Bt^{\beta}}$$

$$A = Q^{(2-\gamma)/4}r_*^{\gamma}k_1^{-\alpha}$$

$$B = (k_1Q)^{\beta}\,r_*^{(1-4\beta)} \qquad \alpha = \frac{(2-\gamma)}{4} \qquad (13)$$

Y la expresión se convierte en:

$$h = At^{\alpha}\phi_1(\zeta, \frac{k_2}{k_1}) \quad r_0 = \zeta_0 B t^{\beta} \quad r_1 = \zeta_1 B t^{\beta}$$

Que al ser reemplazada en (2) toma la siguiente forma:

$$\frac{d^2\phi_1{}^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{d\phi_1{}^2}{d\zeta} + \frac{B^2}{Ak_1}t^{(\alpha+2\beta-1)}\left(\alpha\phi_1 + \beta\zeta\frac{d\phi_1}{d\zeta}\right) = 0$$
$$\zeta < \zeta_0 \quad (14)$$

Debido a que la función f1 no puede depender del tiempo t, el exponente *(a+2β-1)* debe ser igual a cero, por lo tanto ***a*= *(1-2β)***. De aquí y de la expresión *(13)* se encuentra que $A=B^2/k_1$. Reemplazando en (14) se tiene:

$$\frac{d^2\phi_1^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{d\phi_1^2}{d\zeta} + \left[\alpha\,\phi_1 + \beta\,\zeta\,\frac{d\phi_1}{d\zeta}\right] = 0$$
$$para \quad (\alpha\,\phi_1 + \beta\zeta d\phi_1 / d\zeta) > 0, \quad \zeta < \zeta_0 \quad (15.1)$$

$$\frac{d^2\phi_1^2}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{d\phi_1^2}{d\zeta} + \frac{k_2}{k_1}\left[\alpha\,\phi_1 + \beta\,\zeta\,\frac{d\phi_1}{d\zeta}\right] = 0$$
$$para \quad (\alpha\,\phi_1 + \beta\zeta d\phi_1 / d\zeta) < 0, \quad \zeta > \zeta_0 \quad (15.2)$$

Y conociendo que el flujo debe ser cero en el eje de la montaña de fluido, se debe tener en cuenta la siguiente condición de frontera sobre la función ϕ_1.

$$\frac{d\phi_1}{d\zeta} = 0 \qquad para\,\zeta = 0 \quad (16)$$

Así, la solución ϕ_1 debe ser continua y tener una derivada continua $d\phi_1{}^2/d\zeta$.

Al escoger apropiadamente el exponente β, se puede asegurar que el radio de la montaña de fluido propagándose corresponde a $\zeta = \zeta_1 = 1$. Las cantidades ϕ_1 y $(d\phi_1{}^2/d\zeta)$. deben ser cero en $\zeta=1$, puesto que la altura del fluido y el flujo, deben ser continuos en el borde de la montaña y la función ϕ_1 debe ser igual a cero para $\zeta > 1$. Por lo tanto aproximando el punto $\zeta = 1$ desde $\zeta < 1$, encontramos desde la expresión *(15.1)* y *(15.2)* que en $\zeta = 1$.

$$2\left(\frac{d\Phi_1}{d\zeta}\right) + \frac{k_1}{k_2}\beta\frac{d\Phi_1}{d\zeta} = 0 \quad (17)$$

Resolviéndose se obtienen dos condiciones sobre la función ϕ_1 en $\zeta = 1$:

$$\phi_1(1) = 0 \qquad \frac{d\phi_1}{d\zeta} = \frac{-k_1\beta}{2k_2} \qquad (18)$$

Para $\zeta > 1$, la función debe ser $\phi_1 = 0$, de manera que la derivada $d\phi_1/d\zeta$ va a una discontinuidad en el punto $\zeta = 1$, mientras $d\phi_1{}^2/d\zeta$ es continua; sinembargo la función ϕ_1 también debe cumplir la condición *(16)*. Por tanto las tres condiciones obtenidas en el problema para solucionar la ecuación diferencial ordinaria son: $\phi'_1(0)=0$, $\phi_1(1)=0$, $\phi'(1) = -k_1\beta/2k_2$.

Se conoce que la solución a una ecuación diferencial de segundo orden no puede satisfacer las tres condiciones de borde anteriores para valores de β arbitrarios, sin embargo existen valores llamados excepcionales o autovalores para los cuales si se satisfacen dichas condiciones. Ver [5]

.

Así el exponente b que describe la propagación de la masa de fluido no se puede hallar solamente considerando el análisis dimensional, se debe acudir a otras técnicas Para este problema se han obtenido soluciones resolviendo una expansión de perturbación y utilizando las propiedades de grupos de renormalización como se muestra en [3], o solucionando un problema de autovalor como se presenta en la segunda parte de este trabajo.

Conclusiones

La propagación de una masa de fluido a través de un medio poroso no saturado sigue una ley de escalamiento simple para el caso en el que no se considera retención residual, obteniéndose su solución analítica a partir del análisis dimensional. En ese caso la solución es autosimilar de primer orden y la solución pierde memoria de las condiciones iniciales de recarga. La masa de fluido permanece constante durante toda la evolución del flujo, generando lo que se llama un problema ideal.

Cuando se considera retención residual en el medio poroso o suelo, se obtiene la solución a la ecuación diferencial con conductividad hidráulica discontinua, en este caso debe considerarse otra ley de autosimilaridad llamada de segundo orden. Significa que debe acudirse a una ley de escalamiento en forma de potencia, la cual involucra los exponentes anómalos, para este problema el exponente b, el cual permiten obtener una forma más real de la propagación de la masa de agua. La diferencia en la ley de escalamiento se debe a que en este caso la masa de fluido disponible para fluir es variable y no cumple una ley de conservación, por tanto la solución no pierde memoria de las condiciones iniciales, observándose en la solución la presencia de una nueva escala de longitud, el radio del pozo de recarga o inyección, r_*.

Las fuerzas de retención por capilaridad no se pueden ignorar en la búsqueda de la solución al problema de propagación de fluidos en el suelo.

El valor de los exponentes anómalos se obtiene acudiendo a una herramienta diferente al análisis dimensional, en este caso , se planteó el problema de autovalor a partir de tres condiciones que debe cumplir la ecuación diferencial de flujo. En el siguiente trabajo se presenta el valor del exponente a partir de la conductividad hidráulica y del valor de la función. Por lo tanto se obtiene la solución completa al problema de propagación de un volumen de fluido en un medio poroso no saturado, cuando es considerado el fenómeno de retención residual en los poros.

La propagación o evolución de la masa de fluido en estas condiciones se puede determinar a partir de los valores de conductividad hidráulica (incluye valor de porosidad y retención residual), y valores de recarga inicial, como se mostrará en el siguiente trabajo.

Referencias

[1] Barenblatt, G.I. 1952. On some unsteady motions of fluids and gases in a porous medium. Prikl. Mat. Mekh. 17(3), 261-274.
[2] Barenblatt, G.I. 1987. Dimensional analysis. Gordon and Breach sci. publ.
[3] Gómez, S, Mesa O,J. Flujo en rocas usando grupos de renormalizacion. Revista Nacional de Física. Vol 30 No.1. 1998.
[4] Kamin, S. Peletier, L.A. Vá zquez, J.L. On the Barenblatt equation of elasto-plastic filtration. Indiana Univ. Math. Journal. Vol.40. No.4. 1991.
[5] Kochina, I.N. Mikhailov, N.N, Filinov, M.V. 1983. Groundwater Mound Damping. Int. J. Engng. Sci. Vol 21. No.4. pp 413-421.