《論　文》

フロー木条件を考慮した容量制約をもつネットワーク設計問題のための木生成法

片　山　直　登

1　はじめに

ネットワーク設計問題は，ネットワーク上のアークやノードにかかる固定費用とものの移動にかかる変動費用を考慮して，アークやノードを適切に選択することによりネットワークを形成し，かつ異なる始点と終点をもつ多品種のものの流れを決める問題である．容量制約をもつネットワーク設計問題はアークまたはノードに容量をもつ問題であり，ネットワーク設計問題の中でも最適解や良い近似解を求めることが困難な問題である．容量制約をもつネットワーク設計問題は，容量制約のないネットワーク設計問題と同様に，NP－困難な問題であることが知られている（Magnanti and Wong 1984）.

ネットワーク設計問題は，輸送，ロジスティクス，通信や生産システムなどに幅広い応用分野をもつネットワークの構造を設計する問題である．輸送やロジスティクスにおける応用問題では，ノードは工場・配送センター・小売店などの施設，アークは施設間の輸送経路・輸送便，さらに多品種のフローは施設間の物資・商品の輸送に対応する．求めるのものは，施設や輸送便の配置と輸送経路である．

一方，輸送ネットワークでは，積替えターミナルや配送センターにおいて着ターミナル別に荷物がまとめられて輸送することが行われる．このため，同一の着ターミナルをもつ貨物は，途中の積替えターミナルで集約され，同一ターミナル宛の輸送便で輸送されることが一般的である．また，同一の工場や配送センターを発地とする貨物は，途中の積替えターミナルで荷分けされ，各着ターミナル宛の輸送便で輸送されることが一般的である．このような場合，貨物の流れであるフローは着ターミナルまたは発ターミナルを根とするネットワーク上の木の上で輸送されることになり，この木をフロー木とよぶ．フロー木条件と容量制約を考慮した問題をフロー木条件を考慮した容量制約をもつネットワーク設計問題（*TCND*: Capacitated Network Design Problem with Flow

Tree Constraints）とよぶ．

ネットワーク設計問題に関しては，多くのサーベイが示されており，代表的なものとして，Magnanti and Wong（1984），Wong（1984, 1985），Minoux（1989），Balakrishnan et al.（1997），Gendron et al.（1997），Crainic（2003），Costa（2005），片山直登（2008）および Yaghini and Rahbar（2012）がある．

フロー木条件は，従来から Less-than-Truckload（LTL）ネットワーク設計問題で考慮されてきた．LTL ネットワーク設計問題に対する研究としては，集合被覆問題を用いた定式化と解法（Crainic and Roy（1992）），LTL 問題のレビュー（Crainic and Roy（1993）），NETPLAN モデルと事例分析（Roy and Delorme（1989））や事例解説（Roy and Crainic（1992））がある．

フロー木条件を考慮した研究として，アド・ドロップ型のヒューリスティクス（Powell and Sheffi（1983, 1989），Powell（1986）），勾配を用いたローカルサーチ法と最低便数制約に対する Lagrange 緩和法（Powell and Koskosidis（1992）），アド・ドロップ法と劣勾配法（Farvolden and Powell（1994）），ラベリング・アド・ドロップ型ヒューリスティクス（Hoppe et al.（1999））や Lagrange 緩和法（片山直登（2002））がある．

近年では，Jarrah et al.（2009）が大規模な LTL ネットワークモデルに対して，スロープスケーリング法と積合せ計画に対する列挙法による木生成法を用いた解法を示し，Erera et al.（2012）は，整数計画法に基づく大規模近傍探索を用いた繰返し改善法を示している．また，片山直登（2013a）が LTL 問題，片山直登（2013b）がフロー木条件を考慮した問題に対して CPLEX を用いた直接解法を適用している．

フロー木を考慮したネットワーク設計問題では，アークのデザイン変数のみならず，フロー木やフローを表す変数が 0－1 離散変数である大規模な困難な組合せ最適化問題となる．本研究では，終点を根とするフロー木条件を考慮した容量制約をもつネットワーク設計問題に対するアークフローを用いた定式化およびフロー木変数を用いた定式化を示し，双対変数値に基づく木生成を用いた緩和問題の解法を示す．この解法は，劣勾配法と Lagrange ヒューリスティクスを組み合せた方法である．

2　*TCND* の定式化

はじめに，*TCND* の前提条件，使用する記号および *TCND* の定義を示す．続いて，アークフローによる定式化，およびフロー木による定式化を示す．

2．1　問題の定義，前提条件および記号

はじめに，*TCND* の定義を示す．

定義 2．1（*LTLD*）デザイン費用，フロー費用，アーク容量をもつ向きをもつアーク集

合が与えられ，ノード集合および需要をもつ品種集合が与えられている．このとき，フロー費用とデザイン費用の合計を最小にするアーク集合の部分集合，およびアーク容量を満足するフロー木およびフロー木上のフローを求めよ．

次に，*TCND* の前提条件を示す．

・ノード集合が与えられている．

・向きをもつアーク集合が与えられている．

・アークには，非負のデザイン費用が与えられている．

・複数の同一終点をもつ品種からなる品種集合が与えられている．

・アークには，品種ごとの非負の単位当たりのフロー費用が与えられている．

・アークには，単位期間当たりの処理量の上限であるアーク容量が与えられている．

・品種・始点ごとの需要が与えられている．

・各品種の需要は，その終点を根とするフロー木上を移動する．

一般的なネットワーク設計問題では始点と終点が同一であるものを同一品種として定義するが，本研究では終点が同一であるものを同一品種として定義し，便宜上，品種を終点に終点させて表現する．

TCND の定式化で使用する記号の定義を示す．

・N：ノード集合

・A：アーク集合

・K：品種集合または品種の終点集合

・O^k：終点を k とする品種 k の始点集合

・T^k：品種 k のフローが流れうるアークで構成されるフロー木集合

・N_n^+：ノード n を終点とするアークの終点であるノード集合

・N_n^-：ノード n を始点とするアークの始点であるノード集合

・c_{ij}^k：アーク（i, j）上における品種 k の単位当たり非負のフロー費用

・f_{ij}：アーク（i, j）の非負のデザイン費用

・C_{ij}：アーク（i, j）のアーク容量

・d^{ok}：始点が o である品種 k の需要

・Δ_{ij}^t：フロー木 t にアーク（i, j）が含まれるとき 1，そうでないとき 0 を表す定数

・δ_{ij}^{ot}：フロー木 t 上において，始点 o からフロー木 t の根である終点へのパスにアーク（i, j）が含まれるとき 1，そうでないとき 0 を表す定数

・x_{ij}^{ok}：始点を o とする品種 k のフローがアーク（i, j）上を流れるとき 1，そうでないとき 0 であるアークフロー変数；0−1 変数

• z_t^k：品種 k のフローがフロー木 t 上を移動するとき 1，そうでないとき 0 であるフロー木変数；0−1 変数

• y_{ij}^k：品種 k のフロー木がアーク（i, j）上を含むとき 1，そうでないとき 0 である木

変数；0−1 変数

- y_{ij}：アーク（i, j）を選択するとき 1，そうでないとき 0 であるデザイン変数；0−1 変数

2．2　アークフローによる定式化

TCND のアークフローによる定式化 *TCNDA* を示す．

（*TCNDA*）

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{k\in K}\sum_{o\in O^k} d^{ok}c_{ij}^{k}x_{ij}^{ok} + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}y_{ij} \tag{1}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+} x_{in}^{ok} - \sum_{j\in N_n^-} x_{nj}^{ok} = \begin{cases} -1 & if\ n=o \\ 1 & if\ n=k \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall n\in N,\ o\in O^k, k\in K \tag{2}$$

$$\sum_{k\in K}\sum_{o\in O^k} d^{ok}x_{ij}^{ok} \le C_{ij}y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A \tag{3}$$

$$x_{ij}^{ok} \le y_{ij}^{k} \quad \forall (i,j)\in A, o\in O^k, k\in K \tag{4}$$

$$y_{ij}^{k} \le y_{ij} \quad \forall (i,j)\in A, k\in K \tag{5}$$

$$\sum_{j\in N_i^+} y_{ij}^{k} \le 1 \quad \forall i\in N, k\in K \tag{6}$$

$$x_{ij}^{ok} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A, o\in O^k, k\in K \tag{7}$$

$$y_{ij}^{k} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A, k\in K \tag{8}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j)\in A \tag{9}$$

⑴式は目的関数であり，フロー費用とデザイン費用の総和を最小化する．⑵式はフロー保存式であり，ノードに流入するフローと流出するフロー変数値の差が，品種 k の始点 o であれば−1，終点 k であれば 1，その他のノードであれば 0 であることを表す．この式は，需要が必ず始点から終点まで移動することを保証する．⑶式は，容量制約式である．アーク（i, j）のデザイン変数値が 1 のとき，左辺はアーク上を移動するフロー

量の合計であり，これが右辺のアーク容量以下であることを表す．また，デザイン変数値が0のときはフロー量の合計が0であることを表す．⑷式は，木変数とアークフロー変数に関する強制制約式である．この式は，アーク（i, j）の木変数値が1のときには始点を o とする品種 k のアークフロー変数値は高々1であり，木変数値が0のときには0となることを表す．⑸式は，デザイン変数と木変数に関する強制制約式である．この式は，アーク（i, j）のデザイン変数値が1のときには品種 k の木変数値は高々1となり，デザイン変数値が0のときには0となることを表す．⑹式は品種 k ごとの木変数により品種 k の木が構成されることを表すものであり，ノードから出る品種 k の木変数値の和は高々1であることを表す．⑺式はアークフロー変数の0−1条件，⑻式は木変数の0−1条件，⑼式はデザイン変数の0−1条件である．

2．3　フロー木による定式化

TCND のフロー木による定式化 *TCNDT* を示す．*TCNDT* では，品種ごとに1つのフロー木を選択する問題として *TCND* を捉えている．

（*TCNDT*）

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k\in K} \sum_{o\in O^k} \sum_{t\in T^k} \delta_{ij}^{ot} d^{ok} c_{ij}^k z_t^k + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{10}$$

subject to

$$\sum_{t\in T^k} z_t^k = 1 \quad \forall k \in K \tag{11}$$

$$\sum_{k\in K} \sum_{o\in O^k} \sum_{t\in T^k} \delta_{ij}^{ot} d^{ok} z_t^k \le C_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{12}$$

$$z_t^k \in \{0,1\} \quad \forall t \in T^k, k \in K \tag{13}$$

$$y_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \tag{14}$$

⑽式は目的関数であり，フロー費用とデザイン費用の総和を最小化する．⑾式は，品種 k のフロー木変数値の合計が1, すなわちノード k を終点とするフローは単一のフロー木上のみで流れることを表す．⑿式は, アーク（i, j）のデザイン変数値が1のときはアーク上を移動するフロー量の合計がアーク容量以下であり，デザイン変数値が0のときは0であることを表す容量制約式である．左辺は，アーク（i, j）上を流れるフローの合計である．⒀式はフロー木変数の0−1条件，⒁式はデザイン変数の0−1条件である．

この定式化は容量制約のみを含むため，弱い定式化とよばれる定式化となる．フロー木 t にアーク（i, j）が含まれるか否かを表す Δ_{ij}^{t} を用いると，デザイン変数と品種のフロー木変数に関する次のような強制制約式を構成することができる．

$$\sum_{t \in T^k} \Delta_{ij}^{t} z_t^k \leq y_{ij} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A \tag{15}$$

この強制制約式は必ずしも必要ではないが，この式を含めた定式化は強い定式化となり，この強制制約を含まない弱い定式化から得られる下界値よりも得られる下界値はより最適値に近いものとなる．また，緩和解から導出される近似解も一般的に良いものが得られる．ここで，(15)式を含む強い定式化を $TCNDTS$ とする．

$TCNDTS$ は，$\sum_{k \in K} |T^k|$ 個である指数個のフロー木変数，$|A|$ 個のデザイン変数と $|K|+|A|+|K||A|$ 本の制約式をもつ問題となる．0−1 変数が指数個と膨大なものとなるので，小規模な問題であってもこの定式化を直接解くことは困難である．実際には，逐次，必要なフロー木変数を生成して問題を解く列生成法を用いる．この列生成法をうまく適用すれば，アークフローによる定式化の場合よりも，陽的に使用する変数の数を抑えることができる．

3　線形緩和問題と限定主問題

3．1　線形緩和問題

フロー木変数を用いた定式化である $TCNDT$ において，デザイン変数およびフロー木変数の 0−1 条件を 0 から 1 の連続数に緩和した線形緩和問題 LR を考える．

（LR）

$$\min \quad \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} \sum_{o \in O^k} \sum_{t \in T^k} \delta_{ij}^{ot} d^{ok} c_{ij}^k z_t^k + \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} y_{ij} \tag{16}$$

subject to

$$\sum_{t \in T^k} z_t^k = 1 \quad \forall k \in K \tag{17}$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{o \in O^k} \sum_{t \in T^k} \delta_{ij}^{ot} d^{ok} z_t^k \leq C_{ij} y_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \tag{18}$$

$$0 \leq z_t^k \leq 1 \quad \forall t \in T^k, k \in K \tag{19}$$

$$0 \le y_{ij} \le 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{20}$$

LR には非常に多くのフロー木変数が含まれるため，直接解くことは困難である．そこで，あらかじめすべてのフロー木変数を含む問題を対象とするのではなく，逐次，必要なフロー木変数を生成し，問題に追加していく．生成するフロー木変数が単体法の列に相当することから，このような方法を列生成法とよぶ．また，フロー木変数を生成する列生成法をフロー木生成法とよぶ．

一方，⒂式を含めた線形緩和問題の定式化を LRS とする．

3．2　限定主問題

フロー木集合の適当な部分集合 $\bar{T} = (\bar{T}^k)$ が求められているものとする．このとき，フロー木集合が $\bar{T}$ に限定されている次のような限定主問題 $LRR(\bar{T})$ を考える．

（$LRR(\bar{T})$）

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} \sum_{k\in K} \sum_{o\in O^k} \sum_{t\in \bar{T}^k} \delta_{ij}^{ot} d^{ok} c_{ij}^k z_t^k + \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij} \tag{21}$$

subject to

$$\sum_{t\in \bar{T}^k} z_t^k = 1 \quad \forall k \in K \tag{22}$$

$$\sum_{k\in K} \sum_{o\in O^k} \sum_{t\in \bar{T}^k} \delta_{ij}^{ot} d^{ok} z_t^k \le C_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j) \in A \tag{23}$$

$$0 \le z_t^k \le 1 \quad \forall t \in \bar{T}^k, k \in K \tag{24}$$

$$0 \le y_{ij} \le 1 \quad \forall (i,j) \in A \tag{25}$$

この問題は線形計画問題であるため，$\bar{T}$ の要素数が少なければ，汎用の最適化ソルバーを用いて比較的容易に解くことができる．

一方，⒂式に対応する制約式は次のようになる．

$$\sum_{t\in \bar{T}^k} \Delta_{ij}^t z_t^k \le y_{ij} \quad \forall k \in K, (i,j) \in A \tag{26}$$

ここで，$LRR(\bar{T})$ に㉖式を含めた定式化を $LRRS(\bar{T})$ とおく．

4　フロー木生成法

4．1　$LRR(\bar{T})$に対するフロー木生成法

$LRR(\bar{T})$はフロー木変数が限定された問題であるため，最適解を求めるためには，逐次，基底に入るであろう新たなフロー木変数を生成しなければならない．そのために，価格付け問題とよばれる問題を解き，被約費用が負であるフロー木変数を求める．フロー木変数とそれに対応するフロー木を $\bar{T}$ に加え，再度 $LRR(\bar{T})$を解き直す．この操作を被約費用が負である変数がなくなるまで繰り返す．被約費用が負である変数がなければ，LR の最適解が得られたことになる．

(22)式に対する双対変数を u，(23)に対する非負の双対変数を v とする．これらの値は，$LRR(\bar{T})$を最適化ソルバーにより最適に解くことにより求めることができる．このとき，フロー木変数 z_t^k に関する被約費用は，

$$\sum_{(i,j)\in A}\Big\{\sum_{o\in O^k}\delta_{ij}^{ot}d^{ok}(c_{ij}^k+v_{ij})\Big\}-u^k \qquad \forall t\in T^k, k\in K \tag{27}$$

となる．

始点を o とする品種 k に対する $d^{ok}(c_{ij}^k+v_{ij})$ をアーク（i, j）のアーク費用とみなす．このとき，(27)式の第一項はフロー木 t に含まれる o，k 間のアーク費用の合計となり，この合計をフロー木 t の重みとする．u^k は品種 k の現在のフロー木集合 $\bar{T}^k$ に含まれるフロー木の中の最小の重みに対応している．したがって，(27)式の被約費用は「フロー木 t の重み－現在の品種 k のフロー木の最小重み」となる．このため，被約費用が負であるフロー木変数を見つけることは，$\bar{T}^k$ に含まれるフロー木の中の最小の重みよりも重みの小さなフロー木を見つけることになる．

u^k は定数項として扱えるので，品種 k に対して(27)式の第一項である重みが最小であるフロー木 t を見つけ，「フロー木 t の重み－現在の品種 k のフロー木の最小重み」が負となれば，被約費用が負であるフロー木変数が見つかったことになる．したがって，$LRR(\bar{T})$における品種 k に関する被約費用が負であるフロー木変数を探索する価格付け問題は，次のような重みが最小のフロー木を求める問題 $PR^k(v)$に帰着される．

（$PR^k(v)$）

$$\min \sum_{t\in T^k}\sum_{(i,j)\in A}\sum_{o\in O^k}\delta_{ij}^{ot}d^{ok}(c_{ij}^k+v_{ij})z_t^k \tag{28}$$

subject to

$$\sum_{t \in T^k} z_t^k = 1 \tag{29}$$

$$0 \leq z_t^k \leq 1 \quad \forall t \in T^k \tag{30}$$

$PR^k(v)$は重みが最小となるフロー木を求める問題の連続緩和問題であるが，z_t^kを 0 または 1 の離散変数に置き換えても最適解は変化しない．

アークフロー変数 ν と木変数 ξ を用いると，$PR^k(v)$は次のようなフローと木を求める問題 $TR^k(v)$に帰着できる．

（$TR^k(v)$）

$$\min \quad \sum_{(i,j) \in A} \sum_{o \in O^k} d^{ok}(c_{ij}^k + v_{ij})\nu_{ij}^{ok} \tag{31}$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} \nu_{in}^{ok} - \sum_{j \in N_n^-} \nu_{nj}^{ok} = \begin{cases} -1 & if\ n = o \\ 1 & if\ n = k \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall n \in N,\ o \in O^k \tag{32}$$

$$\nu_{ij}^{ok} \leq \xi_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in A, o \in O^k \tag{33}$$

$$\sum_{j \in N_i^+} \xi_{ij}^k \leq 1 \quad \forall i \in N \tag{34}$$

$$\nu_{ij}^{ok} \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A, o \in O^k \tag{35}$$

$$\xi_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A \tag{36}$$

木条件である(34)式を緩和した問題は，次のような始点ごとに異なるアーク費用をもつ多始点・1終点間の最短経路問題$SP^k(v)$となる．

（$SP^k(v)$）

$$\min \quad \sum_{o \in O^k} \sum_{(i,j) \in A} d^{ok}(c_{ij}^k + v_{ij})\nu_{ij}^{ok} \tag{37}$$

subject to

$$\sum_{i \in N_n^+} \nu_{in}^{ok} - \sum_{j \in N_n^-} \nu_{nj}^{ok} = \begin{cases} -1 & if\ n = o \\ 1 & if\ n = k \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall n \in N,\ o \in O^k \tag{38}$$

$$\nu_{ij}^{ok} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j) \in A,\ o \in O^k \tag{39}$$

$SR^k(v)$ は始点 o ごとの問題に分割することができる．始点 o ごとの問題において，$d^{ok}(c_{ij}^k + v_{ij})$ をアーク費用とみなす．このとき，アーク費用は，始点 o ごとの問題に共通である $c_{ij}^k + v_{ij}$ と始点ごとに異なる需要量 d^{ok} の積となる．始点が異なっていても，すべてのアーク費用が定数倍となることから，アーク費用を d^{ok} で割り，$c_{ij}^k + v_{ij}$ としても $SP^k(v)$ の最適解は変わらない．このことから，$SP^k(v)$ の目的関数を，次の式に置き換えても最適解は変わらない．

$$\min \sum_{o \in O^k} \sum_{(i,j) \in A} (c_{ij}^k + v_{ij}) \nu_{ij}^{ok} \tag{40}$$

このように目的関数を置き換えた問題は，複数始点と終点 k 間の最短経路問題となる．最短経路問題の最適解における経路は木となることから，$SR^k(v)$ の最適解は木となる．木条件である(34)式を緩和した問題の最適解が木条件を満足することから，最短経路問題 $SP^k(v)$ を解くことにより，$TR^k(v)$ および $PR^k(v)$ の最適解を得ることができる．なお，アーク費用は非負であるので，Dijkstra 法を用いて，最短経路を求めることができる．

$LRR(\bar{T})$ に対するフロー木生成法のアルゴリズムを Algorithm1 に示す．

4．2　$LRRS(\bar{T})$ に対するフロー木生成法

続いて，$LRRS(\bar{T})$ を考える．(26)式に対する非負の双対変数を w とすると，$LRRS(\bar{T})$ のフロー木変数 z_t^k に関する被約費用は，次のようなる．

$$\sum_{(i,j) \in A} \sum_{o \in O^k} \delta_{ij}^{ot} d^{ok} (c_{ij}^k + v_{ij}) + \sum_{(i,j) \in A} \Delta_{ij}^t w_{ij}^k - u^k \qquad \forall t \in T^k, k \in K \tag{41}$$

始点を o とする品種 k に対するアーク費用を $d^{ok}(c_{ij}^k + v_{ij})$，品種 k に対するアーク (i, j) の重みを w_{ij}^k としたとき，(41)式の第一項は o，k 間のアーク費用の合計，第二項はフロー木 t におけるアークの重みの合計となり，第一項と第二項の和をフロー木の重みとする．

$LRRS(\bar{T})$ における終点 k に関する被約費用が負であるフロー木変数を探索する価格付け問題は，次のような問題 $PRS^k(v, w)$ に帰着される．

（$PRS^k(v, w)$）

$$\min \ \{\sum_{(i,j)\in A}\sum_{o\in O^k}\delta_{ij}^{ot}d^{ok}(c_{ij}^k+v_{ij})+\sum_{(i,j)\in A}\Delta_{ij}^t w_{ij}^k\}z_t^k \tag{42}$$

subject to

$$\sum_{t\in T^k} z_t^k = 1 \tag{43}$$

$$0 \le z_t^k \le 1 \quad \forall t\in T^k, \tag{44}$$

$PRS^k(v, w)$は，次のようなフローと木を求める問題 $TRS^k(v, w)$として表すことができる．

（$TRS^k(v, w)$）

$$\min \ \sum_{(i,j)\in A}\sum_{o\in O^k} d^{ok}(c_{ij}^k+v_{ij})\nu_{ij}^{ok}+\sum_{(i,j)\in A} w_{ij}^k\xi_{ij}^k \tag{45}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+}\nu_{in}^{ok}-\sum_{j\in N_n^-}\nu_{nj}^{ok}=\begin{cases}-1 & if\ n=o\\ 1 & if\ n=k\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad \forall n\in N,\ o\in O^k \tag{46}$$

$$\nu_{ij}^{ok}\le\xi_{ij}^k \quad \forall(i,j)\in A, o\in O^k \tag{47}$$

$$\sum_{j\in N_i^+}\xi_{ij}^k\le 1 \quad \forall i\in N \tag{48}$$

$$\nu_{ij}^{ok}\in\{0,1\} \quad \forall(i,j)\in A, o\in O^k \tag{49}$$

$$\xi_{ij}^k\in\{0,1\} \quad \forall(i,j)\in A \tag{50}$$

この問題はある種の容量制約のないネットワーク設計問題となるため，最適に解くことは困難である．そこで，非負の Lagrange 乗数 r を用いて，(47)式を Lagrange 緩和した問題 $LAGS^k(v, w, r)$を考える．

$(LAGS^k(v, w, r))$

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{o\in O^k}\{d^{ok}(c_{ij}^k + v_{ij} + r_{ij}^o\}\nu_{ij}^{ok} + \sum_{(i,j)\in A}(w_{ij}^k - \sum_{o\in O^k} r_{ij}^o)\xi_{ij}^k \tag{51}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+}\nu_{in}^{ok} - \sum_{j\in N_n^-}\nu_{nj}^{ok} = \begin{cases} -1 & if\ n=o \\ 1 & if\ n=k \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall n\in N,\ o\in O^k \tag{52}$$

$$\sum_{j\in N_i^+}\xi_{ij}^k \leq 1 \qquad \forall i\in N \tag{53}$$

$$\nu_{ij}^{ok}\in\{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in A, o\in O^k \tag{54}$$

$$\xi_{ij}^k\in\{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in A \tag{55}$$

この問題は ν に関する問題 $LAGS_1^k(v, w, r)$ と ξ に関する問題 $LAGS_2^k(v, w, r)$ に分離することができる.

$(LAGS_1^k(v, w, r))$

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A}\sum_{o\in O^k} d^{ok}(c_{ij}^k + v_{ij} + r_{ij}^o)\nu_{ij}^{ok} \tag{56}$$

subject to

$$\sum_{i\in N_n^+}\nu_{in}^{ok} - \sum_{j\in N_n^-}\nu_{nj}^{ok} = \begin{cases} -1 & if\ n=o \\ 1 & if\ n=k \\ 0 & otherwise \end{cases} \qquad \forall n\in N,\ o\in O^k \tag{57}$$

$$\nu_{ij}^{ok}\in\{0,1\} \qquad \forall (i,j)\in A, o\in O^k \tag{58}$$

$LAGS_1^k(v, w, r)$ は始点ごとの最短経路問題に分解できる．しかし，始点ごとにアーク費用が異なる最短経路問題となるため，複数始点と終点間の最短経路は木を構成するとは限らない．

（$LAGS_2^k(v, w, r)$）

$$\min \sum_{i\in N}\sum_{j\in N_i^+}(w_{ij}^k - \sum_{o\in O^k} r_{ij}^o)\xi_{ij}^k \tag{59}$$

subject to

$$\sum_{j\in N_i^+}\xi_{ij}^k \le 1 \quad \forall i\in N \tag{60}$$

$$\xi_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall j\in N_i^+, i\in N\in A \tag{61}$$

ここで，アーク集合 A をノード集合 N と N_i^+ で表現している．

$LAGS_2^k(v, w, r)$ はノードごとの問題に分離することができる．この分離された問題は，ノード i から出るアークの中で，重み $w_{ij}^k - \sum_{o\in O^k} r_{ij}^o$ が負で最小のアーク（i, j）についてのみ $\xi_{ij}^k=1$，それ以外は 0 が最適となる．また，負の重みであるアークがなければすべてについて $\xi_{ij}^k=0$ が最適となる．

$LAGS^k(v, w, r)$ は緩和問題であるので，適当な r が与えられたときにこの最適値は元の問題である $TRS^k(v, w)$ の下界値となる．そのため，「$TRS^k(v, w)$ の下界値－現在の品種 k のフロー木の最小重み」が正であれば，解を改善する新たなフロー木が存在しないことになる．

一方，$LAGS^k(v, w)$ の解がすべての(47)式を満足すれば，$TRS^k(v, w)$ の実行可能解が求められたことになり，さらに「目的関数値－現在の品種 k のフロー木の最小重み」が負となればフロー木が求められたことになる．実際には，すべての(47)式を満足することは稀である．そこで，簡単な 2 つの Lagrange ヒューリスティクスを用いて実行可能解を探索する．第一のヒューリスティックスでは，$LAGS_1^k(v, w, r)$ に $v_{ij}^{ok} = v_{ij}^k \ \forall(i, j)\in A$, $o\in O^k$ の条件を加えた問題を解き，得られた最短経路である最小木上でフローを求め，対応するフロー木を求める．第二のヒューリスティクスでは，(59)式の係数をアークの重みとしたネットワーク上で最小木を求め，この最小木上のフローと対応するフロー木を求める．これらのフロー木，$TRS^k(v, w)$ の実行可能解となる．そこでこれらのフロー木の被約費用を計算し，「フロー木 t の重み－現在の品種 k のフロー木の最小重み」が負となれば，被約費用が負であるフロー木が見つかったことになる．

$PR^k(v, w)$ の近似解法のアルゴリズムを Algorithm2 に示す．

一方，Lagrange 乗数 r については，劣勾配法（片山直登 et al. 1993）を用いて設定することができる．Lagrange 乗数に対する劣勾配を用いて，次のように Lagrange 乗数 r を設定・更新する．

$$r_{ij}^o := r_{ij}^o + \alpha(\xi_{ij}^k - \nu_{ij}^{ok}) \quad \forall (i,j) \in A, o \in O^k \tag{62}$$

$$\alpha := \frac{\rho(UB - LB)}{\sum_{(i,j)\in A}\sum_{o\in O^k}(r_{ij}^o)^2}, \quad 0 < \rho < 2 \tag{63}$$

$$\rho := \beta\rho, \quad 0 < \beta < 1 \tag{64}$$

ここで，UB は $LAGS^k(v, w, r)$ の最良の上界値，LB は現在の $LAGS^k(v, w, r)$ の最適値である．

劣勾配法は繰り返し法であるため，繰り返しごとにフロー木を求め，被約費用が負であるフロー木が見つかる，フロー木が存在しないことが分かった，または一定回数の繰り返し回数を超えたときに，劣勾配法を終了する．なお，このフロー木の探索法は近似解法であるで，被約費用が負であるフロー木をすべて探索できる訳ではないことに注意する．

5　おわりに

本研究では，終点を根とするフロー木条件を考慮した容量制約をもつネットワーク設計問題に対するアークフローを用いた定式化およびフロー木変数を用いた定式化を示した．フロー木変数を用いた定式化に対して，木生成を用いた線形緩和解の解法を示した．これらの解法は，強制制約式を含まない弱い定式化に対しては最適解法であり，強い定式化に対しては近似解法となる．後者の解法は，劣勾配法と Lagrange ヒューリスティクスを組み合せた方法である．

今後の課題として，解析システムの開発，数値実験，容量スケーリング法や分枝限定法などを用いた実行可能解を算出する近似解法の開発や，ベンチマーク問題を用いた従来の解法との比較や現実問題への適用が挙げられる．なお，本研究は科学研究費基盤研究 C（課題番号 25350454）による成果の一部である．

参考文献

Balakrishnan, A., T. L. Magnanti, P. Mirchandani. 1997. Network design. M. Dell'Amico, F. Maffioli, S. Martello, eds., *Annotated Bibliographies in Combinatorial Optimization*. John Wiley & Sons, New York, 311-334.

Costa, A. M. 2005. A survey on benders decomposition applied to fixed-charge network design problems. *Computers and Operations Research* **32** 1429-1450.

Crainic, T. G. 2003. Long-haul freight transportation. R. W. Hall, ed., *Handbook of Transporta-*

Algorithm 1: Flow Tree Generation and Row Generation for $TCNDT$

Set $\bar{T}$;
repeat
  Solve $LR(\bar{T})$ by an MIP solver;
  Get the optimal dual solution (u, v) of $LR(\bar{T})$;
  for $k \in K$ **do**
    Solve $PR^k(v)$ by Dijkstra Algorithm;
    Get the tree $\hat{t}$ and the weight $m^{\hat{t}}$;
    if $m^{\hat{t}} < u^k$ **then**
      $\hat{t}$ is added to $\bar{T}^k$ and generate flow tree variable $z^k_{\hat{t}}$;
  end
until *No tree is generated*

tion Science. Kluwer Academic Publishers, 451-516.

Crainic, T. G., J. Roy. 1992. Design of regular intercity driver routes for the LTL motor carrier industry. *Transportation Science* 26 280-295.

Crainic, T. G., J. Roy. 1993. OR tools for tactical freight transportation planning. *European journal of Operational Research* 33 290-297.

Erera, A., M. Hewitt, M. Savelsbergh, Y. Zhang. 2012. Improved load plan design through integer programming based local search. *Transportation Science* 1-16.

Farvolden, J. M., W. B. Powell. 1994. Subgradient methods for the service network design problem. *Transportation Science* 28 256-272.

Gendron, B., T. G. Crainic, A. Frangioni. 1997. Multicommodity capacitated network design. Tech. Rep. CIRRELT-98-14, Centre de recherche sur les transports, Université de Montréal.

Hoppe, B., E. Z. Klamp, C. McZeal, J. Rich. 1999. Strategic load-planning for less-than-truckload trucking. Tech. Rep. CRPC-TR99812-S, Center for Research on Parallel Computation, Rice University.

Jarrah, A. I., E. Johnson, L. C. Neubert. 2009. Large-scale, less-than-truckload service network design. *Operations Research* 57 609-625.

Magnanti, T. L., R. T. Wong. 1984. Network design and transportation planning : Models and algorithms. *Transportation Science* 18 1-55.

Minoux, M. 1989. Network synthesis and optimum network design problems: Models, solution methods and applications. *Networks* 19 313-360.

Powell, W. B. 1986. A local improvement heuristic for the design of less-than-truckload motor carrier networks. *Transportation Science* 20 246-257.

Powell, W. B., I. A. Koskosidis. 1992. Shipment routing algorithms with tree constraints.

Algorithm 2: Flow Tree Generation and Row Generation for $TCNDTS$

Set $\bar{T}$,r,$iteMax$;
repeat
  Solve $LRS(\bar{T})$ by an MIP solver;
  Get the optimal dual solution (u, v, w) of $LRS(\bar{T})$;
  for $k \in K$ **do**
    ite:=0;
    repeat
      Solve $LAGS^k(v, w, r)$;
      Get the lower bound $m^{\hat{t}}_{low}$ of weight ;
      if $m^{\hat{t}}_{low} < u^k$ **then**
        Solve $LAGS^k(v, w, r)$ by Lagrange Heuristic;
        Get the tree $\hat{t}$ and the weight $m^{\hat{t}}$;
        if $m^{\hat{t}} < u^k$ **then**
          $\hat{t}$ is added to $\bar{T}^k$ and generate flow tree variable $z^k_{\hat{t}}$;
      else
        EXIT;
      Update r by Subgradient Method;
      ite++;
    until $iteMax > ite$
  end
until *No tree is generated*

Transportation Science **26** 230-245.

Powell, W. B., Y. Sheffi. 1983. The load planning problem of motor carriers: Problem description and a proposed solution approach. *Transportation Research A* **17** 471-480.

Powell, W. B., Y. Sheffi. 1989. Design and implementation of an interactive optimization system for network design in the motor carrier industry. *Operations Research* **37** 12-29.

Roy, J., T. G. Crainic. 1992. Improving intercity freight routing with a tactical planning model. *Interfaces* **22** 31-44.

Roy, J., L. Delorme. 1989. NETPLAN: A network optimization model for tactical planning in the less-than-truckload motor-carrier industry. *INFOR* **27** 22-35.

Wong, R. T. 1984. Introduction and recent advances in network design: Models and algorithms. M. Florian, ed., *Transportation Planning Models*. Elsevier Science, North Holland, Ams-terdam, 187-225.

Wong, R. T. 1985. Location and network design. M. O'heEigeartaigh, J. Lenstra, A. RinnooyKan, eds., *Combinatorial Optimization Annotated Bibliographies*. John Wiley & Sons, New York, 129-147.

Yaghini, M., M. Rahbar. 2012. Multicommodity network design problem in rail freight transportation planning. *Procedia - Social and Behavioral Sciences* 43 728-739.

片山直登. 2002. 共同輸送ネットワーク設計問題に対するLagrange 緩和法. 流通情報学部紀要 6 81-91.

片山直登. 2008. ネットワーク設計問題. 朝倉書店.

片山直登. 2013a. LTL ネットワーク設計問題. 流通情報学部紀要 17 35-58.

片山直登. 2013b. フロー木条件を考慮した容量制約をもつネットワーク設計問題. 流通情報学部紀要 17 21-34.

片山直登, 岩田実, 柳下和夫, 三原一郎, 今澤明男. 1993. ラグランジュ緩和法を用いた容量制約のないネットワーク計画問題の解法. 土木計画学研究・論文集 11 105-112.