

TITO sistemleri kararlı kılan sabit köşegen kontrolörler

İlker ÜSTOĞLU*, Mehmet Turan SÖYLEMEZ

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Proses kontrolünün ilk ve en önemli amacı sistemi kararlı kılmaktır, performans üzerine yapılacak her eylem bu temel koşul sağlandığı müddetçe bir anlam taşır. Kontrolör tasarımında kullanılan yöntemlerden biri sistemi kararlı kılacak tüm kontrolörleri bulmak ve ardından, tasarımdaki diğer beklentileri sağlamak üzere, bu sınıf içinden uygun bir kontrolörde karar kılmaktır. Bu hedef doğrultusunda yapılanlar şu özellikleri de barındırmalıdır ki, iyi bir kontrolör tasarım sürecinden söz edilebilsin. Kontrolör kırılğan olmamalıdır, yani kontrolör de parametre değişimlerine karşı sistemin kararlılığını ve mümkünse performansını zedelememelidir. Kontrolörün düşük mertebeden olması, parametre ayarlama sürecinde büyük kolaylıklar sağlar, zira ne kadar az parametre o kadar basit bir tasarım süreci demektir. Öte yandan pratik anlamı dolayısıyla da az parametre, ya da düşük mertebe endüstride görev alan uygulamacılar için problemlerin daha hızlı çözülmesi anlamına gelir. Bu çalışmada çok değişkenli kontrol yapıları arasında önemli bir yer tutan karakteristik değerler ve karakteristik değer eğrileri ele alınmış, rasyonel polinomlar cisminde indirgenebilir olan karakteristik denklemler için karakteristik değerlerin reel eksen kesim noktaları ve bu noktalar civarındaki davranışları üzerinde durulmuştur. Zira bu değerler çok girişli çok çıkışlı sistemleri kararlı kılan kontrolörlerin bulunmasında ya da verilen bir kazanç değeri için kararlılığın analiz edilmesinde hızlı hesaplanabilirlikleri yönünden önem arz etmektedirler. Bu çalışma kapsamında iki girişli iki çıkışlı (TITO) sistemleri kararlı kılan sabit köşegen kontrolörler üzerinde durulmuş, karakteristik değer eğrilerinin reel eksen kestikleri yerler ve eğrilerin bu noktalardaki geçiş yönlerinden hareket ederek hızlı bir algoritma geliştirilmiş ve bu tür sistemleri kararlı kılan kontrolörler örnek sistem üzerinde sınanarak hesaplanmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Bilgisayar cebri, blok diyagram indirgeme, PID kontrol, parametre uzayı yaklaşımı, karakteristik değer eğrileri.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: İlker ÜSTOĞLU. ustoglui@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 66 72.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Analysis and design of fixed order stabilizing controllers for SISO and TITO systems: A computer algebra point of view" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 18.06.2009 tarihinde dergiye ulaşmış, 15.07.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 15.08.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Stabilizing constant diagonal controllers for TITO systems

Extended abstract

A control system is an interconnection of components to perform certain tasks and to generate desired output signal, when it is driven by the input signal. In contrast to an open-loop system, a closed-loop control system uses sensors to measure the actual output to adjust the input in order to achieve desired output. Most industrial control systems are no longer single-input and single-output (SISO) but multi-input and multi-output (MIMO) systems with a high coupling between the channels. In the design of all dynamical systems stability is the most important property. When a dynamic system is described by its input-output relationship such as a transfer function, the system is stable if it generates bounded outputs for any bounded inputs; bounded-input bounded-output (BIBO) stability. For a linear, time-invariant system modeled by a transfer function matrix, the BIBO stability is guaranteed if and only if all the poles of the transfer function matrix are in the open-left-half complex plane. A reasonable approach to controller design is to find the set of all stabilizing compensators and then using a member of this set to satisfy further design criteria. A complete parameterization of all stabilizing controllers for a given system was suggested by Youla. An important disadvantage of this parameterization is that the order of the controller cannot be fixed. As a result, the order of the controller tends to be quite high most of the time. Therefore, in the last few years computation of all stabilizing controllers of a given order is examined by several researchers. It is a common fact that it is more difficult to design controllers for MIMO systems because there are usually interactions between different control loops. To overcome this difficulty decentralized controllers are considered which have fewer tuning parameters compared to general multivariable controllers. For example, decentralized PID (P: proportional, I: integral, D: derivative) controllers are widely used in process control due their simplicity and facility in working in case of actuator and/or sensor failure because it is relatively easy to tune manually as only one loop is directly affected by the failure. If a MIMO system described by a $n \times n$ transfer-function matrix $G(s)$ is diagonal dominant over the bandwidth of interest, or there exists an input compensator matrix $C(s)$ to achieve diagonal dominance, then the stability and time domain behavior of the system can be inferred from the diagonal elements of $G(s)C(s)$. The relative gain ar-

ray, the (inverse-) Nyquist array approach, the block Nyquist array method, the Perron-Frobenius scaling procedure and the characteristic locus method are among the analysis and design methods to reduce the interaction in a multivariable system. However, these approaches do not provide the set of all stabilizing controllers. Generalizing the Nyquist stability criterion for MIMO case is particularly important because plotting the characteristic values of the open-loop transfer function enables us to check the stability of the closed-loop system for a gain parameter.

A stable characteristic polynomial, becomes unstable if and only if at least one root crosses the imaginary axis. The parameter values of the root crossing form the stability boundaries in the parameter space, which can be classified into three cases: the real root boundary, where a root crosses the imaginary axis at the origin, the infinite root boundary, where a root leaves the left half plane at infinity and the complex root boundary, where a pair of conjugate complex roots crosses the imaginary axes. These stability boundaries separate regions in which the number of closed loop system unstable poles does not change in parameter space.

The main objective of this work is to develop an efficient and fast algorithm that can be used in finding all stabilizing constant controllers of $\text{diag}(k,k)$ -type for TITO processes. Recall that a TITO system has two characteristic values that are in the field of rational functions, if the characteristic equation is reducible in this field. Hence Nyquist stability criterion can be applied to both of the characteristic values in order to determine the conditions for stability. Recall that the generalized Nyquist theorem requires that the net sum of encirclements of the point -1 by the characteristic values equal to the number of open-loop unstable poles of the system. Hence, it is of special importance to determine where the characteristic locus intersects with the real axis, i.e. where the imaginary part of $\lambda_i(j\omega)$, $i=1,2$ is zero. The direction of these crossings is also important, because the net count of crossings at an intersection point will indicate whether there are closed-loop poles to cross the imaginary axis.

Keywords: Computer Algebra, block diagram reduction, PID control, parameter space approach, characteristic value plots.

Giriş ve matematiksel ön bilgiler

Dinamik sistemler için kararlılık, sağlanması gereken en önemli özelliktir. Kontrolör tasarımı için kabul edilen yöntemlerden biri sistemi kararlı kılan tüm kontrolörlerin bulunması ve ardından diğer amaç ölçütlerini sağlayacak şekilde birinin bu kontrolörler ailesi içinden seçilmesidir. Verilen bir sistem için tüm kararlı kılan kontrolörlerin belirlenmesinde Youla (1974, 1976) tarafından önerilen yöntem her ne kadar yukarıda belirtilen amaca yönelik ise de yöntemin dezavantajı kontrolör mertebesinin kısıtlanmaması ve genellikle de yüksek mertebeden bir kontrolör ile karşı karşıya kalınmasıdır. Bu amaçla son yıllarda bir sistemi kararlı kılan tüm düşük mertebeden kontrolörlerin belirlenmesi konusu üzerinde yoğun çalışmalar yapılmaktadır. Shafiei ve Shenton (1994, 1997) kararlılık bölgelerini parametre uzayında verdikleri bir grafik yöntem geliştirmişlerdir. Bu alanda bu çalışmayı Ho ve diğerlerinin (1996, 1997) genelleştirilmiş Hermite-Biehler teoremine dayanan yönetimi izler. Öte yandan Munro ve diğerleri (1999) ve Söylemez ve diğerleri (2003) düşük mertebeli kontrolörlerin bulunması için nümerik bir frekans tanım bölgesi yöntemi geliştirmişlerdir. Bu yöntem Nyquist eğrisinin reel ekseni kesim noktalarına ve bu noktalar civarında davranışına, yani reel ekseni geçiş yönünün de belirlenmesine dayanır. Ackermann ve Kaesbauer (2003) bu sonuçları daha geniş problem sınıflarına genişletmişlerdir. Gryazina ve Polyak D-ayırımı yöntemini ve geometrisini polinomlar için ele aldılar ve yöntemi çok girişli çok çıkışlı sistemlere genişlettiler, ayrıca kararlı ve kararsız kutupların sayısının değişmez kaldığı bölgeleri incelerken, bu bölgelerin sayısının ne kadar olabileceği problemi üzerine de eğildiler. Farklı kontrol çevrimleri arasındaki etkileşimin kaçınılmaz olacağı çok girişli ve çok çıkışlı sistemler için kontrolör tasarımının ne denli zor olduğu bilinen bir gerçektir. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için parametre ayarının daha az olabilmesi amacıyla merkez yapılı kontrolörler önerilir. Örneğin n -girişli n -çıkışlı bir sistem için PID (oransal, integral, türev) tipinde kontrolörler tasarlanacaksa $3n^2$ tane parametre ayarlanmalıdır. Ancak merkez yapılı PID kontrolörler öngörebilirse bu sayının $3n$ kadar olacağı açıkça görülür, bu da problemin pratik an-

lamda önemini oldukça arttırır, ayrıca basitliği, algılayıcı ya/yada eyleyici hataları söz konusu olduğunda etkinin sadece bir kanal üzerinde olması dolayısıyla, problemin yerinin belirlenmesi açısından sağladığı kolaylıklar, ve elle ayara olanak vermesi yönünden getirdiği rahatlık bu tür kontrol yapılarının proses kontrol endüstrisinde çokça kullanılmasının nedenlerini açıklar. Söylemez ve Üstoğlu (2006) sembolik cebir yardımıyla iki-girişli iki-çıkışlı (TITO) sistemler için statik çıkış geribeslemeli kontrolör tasarımına yönelik bir çalışma yaptılar, öte yandan sembolik cebirin daha birçok tasarım probleminin çözümünde ne tür esneklikler getirdiği üzerinde durdular. n -girişli n -çıkışlı bir sistem olan $G(s)$ köşegen baskın ise, ya da bu sistemi köşegen baskın kılan bir $C(s)$ önkompansatörü bulunabiliyorsa, sistemin kararlılığı $G(s)$ 'nin ya da $G(s)C(s)$ 'nin köşegen elemanları tarafından belirlenir. Bu fikir Rosenbrock'un (1969, 1970) çalışmalarına dayanır ki Rosenbrock çok girişli çok çıkışlı sistem tasarımını bu yaklaşımı ile tek girişli tek çıkışlı tasarımın esneklik ve kolaylığına indirgemıştır. Bağlı kazanç dizisi, (ters-) Nyquist dizisi, blok Nyquist dizisi, Peron-Frobenius ölçekleme yaklaşımı ve karakteristik değer eğrileri yaklaşımı yöntemleri her ne kadar çok girişli çok çıkışlı sistemlerin analiz ve tasarımında kullanılsalar da sistemi kararlı kılan tüm kontrolörlerin belirlenmesine doğrudan katkıları olmamıştır. Cebirsel fonksiyonlar teorisindeki kavramlar yardımıyla Barman ve Katzenelson (1974) çok değişkenli sistemlerin kararlılığını incelediler. MacFarlane and Postlethwaite (1977) aynı amaç doğrultusunda Riemann yüzeylerini kullandılar. Desoer ve Wang ise analitik fonksiyonlar teorisindeki temel özellikler yardımıyla özdeğer eğrileri eklenli bir kararlılık testi yöntemini bu tür sistemler için geliştirdiler. Karakteristik değer adını alan $\lambda(s)$, bir karmaşık değişken ve I iki boyutlu birim matris olmak üzere 2×2 boyutlu $G(s)$ transfer matrisinin karakteristik denklemi

$$p(\lambda, s) = |\lambda(s)I - G(s)| = 0 \quad (1)$$

ifadesiyle verilir. Karakteristik değerler hesaplanır ve s karmaşık düzlemde Nyquist kontörü-

nü dolanırken bir iki tane eğri elde edilir, bu iki eğri genelleştirilmiş Nyquist diyagramları ya da karakteristik değer eğrileri adını alırlar. Bu diyagramlar polinom kontrol sistemleri araç kutusunun bir fonksiyonu olan *CharacteristicValuePlot[]* komutu ile rahatlıkla çizdirilebilir (Söylemez ve Üstoğlu, 2007). Bu diyagramlar yardımıyla bir girişli bir çıkışlı sistemlerin kararlılığı için kullanılan Nyquist kararlılık kriteri çok girişli çok çıkışlı sistemlere genişletilebilir.

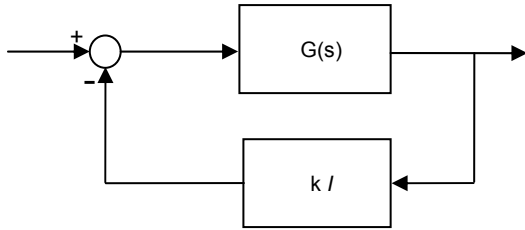
Teorem 1

D_N standart Nyquist kontörü u_0 açık çevrimli sistemin kararsız kutuplarının sayısı olmak üzere Şekil 1’deki sistem ancak ve ancak

$$i) |I + k G(s)| \neq 0, \forall s \in D_N, \quad (2)$$

$$ii) N[|I + k G(s)|, 0] + u_0 = 0 \quad (3)$$

koşullarını sağlıyorsa asimptotik kararlıdır. (3) ifadesinde yer alan $N[h(s), s_0]$, $h(s)$ karmaşık fonksiyonunun s_0 noktası etrafındaki çevreleme sayısını ifade etmektedir.



Şekil 1. Kapalı çevrim kontrol sistemi

Karakteristik değerleri daha iyi anlayabilmek için aşağıdaki sistemi göz önüne alalım:

$$G: \begin{bmatrix} \frac{2s^2+12s-2}{(s^2+3s+2)(s+3)} & \frac{15s-15}{(s^2+3s+2)(s+3)} \\ \frac{-2s+2}{(s^2+3s+2)(s+3)} & \frac{2s^2+s+9}{(s^2+3s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

(4) ifadesinde verilen sistemin karakteristik değerleri

$$\lambda_1(s) = \frac{2}{s+3} \quad (5)$$

$$\lambda_2(s) = \frac{2s+1}{s^2+3s+2} \quad (6)$$

biçimindedir. Bir diğer örnek olarak

$$G: \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} & \frac{2}{s+1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

sistemi göz önüne alırsak bu durumda

$$p(\lambda, s) = \lambda^2 + \lambda \frac{-3}{s+1} + \frac{5s+7}{(s+1)^2(s+2)^2} \quad (8)$$

karakteristik polinomunun rasyonel fonksiyonlar cisminde daha fazla indirgenemez olduğunu görürüz.

Genel olarak 2×2 boyutlu $G(s)$ transfer matrisini

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (9)$$

biçiminde düşünelim. Bu durumda karakteristik denklem $\delta(s) = g_{11}(s)g_{22}(s) - g_{12}(s)g_{21}(s)$ ve $\tau(s) = g_{11}(s) + g_{22}(s)$ tanımlamaları altında

$$\lambda^2(s) - \tau(s)\lambda(s) + \delta(s) = 0 \quad (10)$$

yapısında olur. (10) denkleminin çözümleri olan $\lambda_1(s)$ ve $\lambda_2(s)$ ’nin Nyquist diyagramlarının elde edilmesi için $s = jw$ değişken dönüşümü yapılması ve w parametresine bağlı olarak $\lambda_1(jw)$ ve $\lambda_2(jw)$ reel ve sanal kısımlarının karşılıklı çizdirilmesi yeterlidir. $\lambda_1(jw)$ ve $\lambda_2(jw)$ ’nın herhangi bir reel x_i noktasından geçtiği frekanslar sırası ile $\{w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,\mu}\}$ ve $\{w_{i,\mu+1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,\mu+\eta}\}$ biçiminde listelenmiş ol-

sun. Ayrıca her bir frekans için reel eksenin keşildiği o noktada eğrinin geçiş yönü de biliniyor olsun, eğri negatif bölgeden pozitif olana geçiyorsa geçiş yönü pozitif, aksi halde negatif kabul edilecektir. m 'inci ($m = \{1, 2\}$) karakteristik değer eğrisinin adı geçen x_i noktasından geçtiği j 'inci frekans için geçiş yönünü ${}_m d_{i,j}$ temsil etmek üzere,

$${}_1 c_i = \sum_{j=1}^{\mu} {}_1 d_{i,j} \quad (11)$$

ifadesi birinci karakteristik değer için o noktadaki net geçiş yönünü verirken,

$${}_2 c_i = \sum_{j=\mu+1}^{\mu+\eta} {}_2 d_{i,j} \quad (12)$$

ifadesi aynı bilgiyi ikinci karakteristik değer için sağlar. Net geçiş ise

$$c_i = {}_1 c_i + {}_2 c_i \quad (13)$$

formülü ile elde edilir.

Teorem 2

Verilen bir TITO sistem ve $\mathbb{C} = f(w)$ kapalı kontörü için öyle bir w^* frekansı vardır ki karakteristik değerlerden birinin ya da her ikisinin birden sanal kısmı ancak ve ancak $k^* = -\frac{1}{x_i}$ sa-bit kazancı ile sıfırlanır, ayrıca kazanç bu k^* değeri civarında değiştirildiğinde (13) formülünde verilen c_i kadar kutup kararlılık sınırının bir tarafından diğer tarafına geçiş yapar. Varsayalım ki karakteristik değer eğrileri reel eksenlerini $\{x_1, x_2, \dots, x_q\}$ listesiyle verilen q adet ayrık noktada kesiyor olsun bu durumda $x_0 = -\infty$ ve $x_{q+1} = \infty$ tanımlayarak $\{I_1, I_2, \dots, I_{q+1}\}$ biçiminde $q+1$ adet aralık ile karşı karşıyayız demektir. Her bir aralık $I_i = [x_{i-1}, x_i)$ yapısındadır. Öte yandan kazançlar içinde benzer biçimde aralıklar tanımlayabiliriz. Sözü edilen aralıklar

$K_i = \{k : \frac{-1}{x_{i-1}} < k < \frac{-1}{x_i}\}$ biçimindedir. Ayrıca

her aralık için sistemin kararsız kutup sayısı u_i ile temsil ediliyor olsun. Bu durumda aşağıdaki teorem geçerlidir:

Yardımcı Teorem 1

Verilen bir TITO sistem için geribesleme kazancı k bir K_i kazanç aralığından seçildiğinde sistemin kararsız kutup sayısı

$$u_i = u_0 + \sum_{n=0}^{i-1} c_n \quad (14)$$

formülü ile hesaplanır, burada u_0 açık çevrim sistemin kararsız kutup sayısını göstermektedir.

Sabit köşegen kontrolörler ile TITO sistemlerin kararlı kılınması

Şekil 1'de verilen $G(s)$ sisteminin iki girişli iki çıkışlı geribesleme düzeninin de $diag(k, k)$ biçiminde olduğunu göz önüne alalım. Bu durumda kapalı çevrim karakteristik denklemi

$$p_c(s, k) = 1 + k \tau(s) + k^2 \delta(s) = 0 \quad (15)$$

biçiminde olacaktır. $p_c(jw, k) = 0$ denkleminin reel ve sanal kısımları ise sırasıyla

$$1 + k T_R(w) + k^2 \Delta_R(w) = 0 \quad (16)$$

$$k T_I(w) + k^2 \Delta_I(w) = 0 \quad (17)$$

biçiminde ayrıştırılabilir. Burada $\Delta_R(w) = \text{Re}[\delta(jw)]$, $\Delta_I(w) = \text{Im}[\delta(jw)]$, $T_R(w) = \text{Re}\{\tau(jw)\}$, $T_I(w) = \text{Im}\{\tau(jw)\}$ tanımlamaları yapılmıştır. (17) denkleminde ya $k = 0$ ya da

$$k = -\frac{T_I(w)}{\Delta_I(w)} \quad (18)$$

olması gerektiği bulunur. (18) ifadesi (16)'da yerine yazılacak olursa

$$q(w) = \Delta_I^2 - \Delta_I T_I T_R + T_I^2 \Delta_R = 0 \quad (19)$$

ifadesi elde edilir ki bu ifade çözülecek olursa kararlılık sınırının bir tarafından diğer tarafına geçişe ilişkin kritik frekanslar elde edilmiş olur. Ardından bu frekanslar (18) de yerlerine yazılacak olursa kritik kazanç değerlerine ulaşılır.

İndirgenabilir karakteristik denklem hali

Varsayalım ki karakteristik denkleminiz indirgenebilir olsun yani

$$\lambda_1(s) = \frac{N_1(s)}{D_1(s)} \quad (20)$$

$$\lambda_2(s) = \frac{N_2(s)}{D_2(s)} \quad (21)$$

ifadeleri tanımlansın. Bu tanımlamaları biraz daha ileri götüreceğiz olursak

$$\lambda_1(jw) = \frac{N_{1,re} + jN_{1,im}}{D_{1,re} + jD_{1,im}} = \frac{X_1(w^2)}{Z_1(w^2)} + jw \frac{Y_1(w^2)}{Z_1(w^2)} \quad (22)$$

$$\lambda_2(jw) = \frac{N_{2,re} + jN_{2,im}}{D_{2,re} + jD_{2,im}} = \frac{X_2(w^2)}{Z_2(w^2)} + jw \frac{Y_2(w^2)}{Z_2(w^2)} \quad (23)$$

sonuçlarına ulaşırız, burada $i = \{1, 2\}$ için

$$X_i(w^2) = D_{i,e}N_{i,e} + w^2 D_{i,o}N_{i,o} \quad (24)$$

$$Y_i(w^2) = D_{i,e}N_{i,o} - D_{i,o}N_{i,e} \quad (25)$$

$$Z_i(w^2) = D_{i,e}^2 + w^2 D_{i,o}^2 \quad (26)$$

ifadelerinde ise $D_{i,e}$, $D_{i,o}$, $N_{i,e}$ ve $N_{i,o}$ gösterimleri $D_{i,e}(-w^2)$, $D_{i,o}(-w^2)$, $N_{i,e}(-w^2)$ ve $N_{i,o}(-w^2)$ yerine kullanılmış olup; $D_i(s)$ ve $N_i(s)$ polinomlarının çift ve tek kısımlarından oluşmaktadır. Öte yandan $v \hat{=} w^2$ olarak tanımlayalım. $Y_i(v)$ 'nin pozitif reel köklerinin v_1, v_2, \dots, v_μ olduğu ve $Y_2(v)$ 'nin pozitif reel köklerinin $v_{\mu+1}, v_{\mu+2}, \dots, v_{\mu+\eta}$ olduğu kabul edilirse; yukarıda sözü edilen karakteristik değer eğrileri, $w = 0$, $w = \infty$ veya $m = 1, 2, \dots, \mu + \eta$ için $w = \pm\sqrt{v_m}$ da reel eksenden geçer. Ayrıca

reel eksenin kesim noktaları $i = 1, 2, \dots, q$ ve $m = \mu + 1, \mu + 2, \dots, \mu + \eta$ için

$${}_1x_i = \frac{X_1(v_m)}{Z_1(v_m)} \quad (27)$$

$${}_2x_i = \frac{X_2(v_m)}{Z_2(v_m)} \quad (28)$$

olarak hesaplanır. Bu bilgiler ışığında TITO sistemler için tüm kararlı kılan sabit köşegen kontrolör kazançlarını parametrize eden aşağıdaki teoreme ulaşırız:

Teorem 3

İki girişli iki çıkışlı $G(s)$ sisteminin karakteristik değerlerinin sanal eksen üzerinde köklerinin olmadığını varsayalım. $Y_1(v)$ 'nin baş katsayısı $y_{1,1}$ ile gösterilirken; $Y_1(v)$ 'nin en son sıfır olmayan katsayısı $y_{1,0}$ ile gösterilsin. Benzer şekilde $Y_2(v)$ 'nin baş katsayısı $y_{2,1}$ ile gösterilirken; $Y_2(v)$ 'nin en son sıfır olmayan katsayısı $y_{2,0}$ ile gösterilsin. Verilen bir $k \in K_i = \left(\frac{-1}{x_{i-1}}, \frac{-1}{x_i} \right)$ için kapalı çevrim sistemin kararsız kutuplarının sayısı (14)'de verildiği gibidir. Ayrıca geçiş yönleri

$${}_m d_{i,j} = \begin{cases} (1 - (-1)^j) \text{sgn}(Y_m^{(j)}(v_j)) & 0 < v_j < \infty \\ \text{sgn}(y_{m,0}) & v_j = 0 \\ -\text{sgn}(y_{m,1}) & v_j = \infty \end{cases} \quad (29)$$

formülü ile verilir, Burada Burada $Y_m^{(l)}(v)$, $Y_m(v)$ 'nin v_j noktasındaki sıfır olmayan birinci türevidir. (29)'daki "sgn" sembolü, işaret fonksiyonunu göstermektedir. (14)'den $u_i = 0$ olan kazanç aralıkları, kararlı kılan kazançları verir. Şimdi karakteristik değerleri

$$\lambda_1(s) = \frac{4(s^3 - 3s^2 + 2s - 15)}{(s^2 + 2s + 2)^2} \quad (30)$$

$$\lambda_2(s) = \frac{s^3 + 15s^2 - 62s + 266}{s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 18s + 10} \quad (31)$$

olan bir TITO sistemi ele alalım. Bu durumda Teorem 3'ü uygulayabilmek için çeşitli tanımlama ve hesaplamalara gerek duyulur, bunlar sırasıyla;

$$N_1(s) = 4s^3 - 12s^2 + 8s - 60 \quad (32)$$

$$D_1(s) = s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 8s + 4 \quad (33)$$

$$N_2(s) = s^3 + 15s^2 - 62s + 266 \quad (34)$$

$$D_2(s) = s^4 + 6s^3 + 15s^2 + 18s + 10 \quad (35)$$

tanımlamaları ve

$$D_{1,e}(-w^2) = w^4 - 8w^2 + 4 \quad (36)$$

$$D_{1,o}(-w^2) = -4w^2 + 8 \quad (37)$$

$$N_{1,e}(-w^2) = 12w^2 - 60 \quad (38)$$

$$N_{1,o}(-w^2) = -4w^2 + 8 \quad (39)$$

$$D_{2,e}(-w^2) = w^4 - 15w^2 + 10 \quad (40)$$

$$D_{2,o}(-w^2) = -6w^2 + 18 \quad (41)$$

$$N_{2,e}(-w^2) = -15w^2 + 266 \quad (42)$$

$$N_{1,o}(-w^2) = -w^2 - 62 \quad (43)$$

tanımlamaları biçimindedir bunların ardından

$$X_1(w^2) = 28w^6 - 220w^4 + 592w^2 - 240 \quad (44)$$

$$Y_1(w^2) = -4w^6 + 88w^4 - 416w^2 + 512 \quad (45)$$

$$Z_1(w^2) = w^8 + 8w^4 + 16 \quad (46)$$

hesaplamaları ve

$$X_2(w^2) = -9w^6 + 845w^4 - 5256w^2 + 2660 \quad (47)$$

$$Y_2(w^2) = -w^6 - 137w^4 + 2786w^2 - 5408 \quad (48)$$

$$Z_2(w^2) = w^8 + 6w^6 + 29w^4 + 24w^2 + 100 \quad (49)$$

hesaplamaları yapılır. $w = \sqrt{v}$ olduğu hatırlanacak olursa

$$X_1(v) = 28v^3 - 220v^2 + 592v - 240 \quad (50)$$

$$Y_1(v) = -4v^3 + 88v^2 - 416v + 512 \quad (51)$$

$$Z_1(v) = v^4 + 8v^2 + 16 \quad (52)$$

$$X_2(v) = -9v^3 + 845v^2 - 5256v + 2660 \quad (53)$$

$$Y_2(v) = -v^3 - 137v^2 + 2786v - 5408 \quad (54)$$

$$Z_2(v) = v^4 + 6v^3 + 29v^2 + 24v + 100 \quad (55)$$

ifadeleri elde edilir. $Y_1(v)$ 'nin pozitif kökleri $v_1 = 2$, $v_2 = 4$ ve $v_3 = 16$ 'dir. Bu frekanslar için geçiş noktaları $x_1 = 4.5$, $x_2 = 1$ ve $x_3 = 1$ olarak elde edilir. $Y_1(v)$ 'nin ilk ve son katsayısı $y_{1,1} = -4$ ve $y_{1,0} = 512$ 'dir. Bu arada $Y_1'(2) = -112$, $Y_1'(4) = 96$ ve $Y_1'(16) = -672$ sonuçları elde edilir. Öte yandan $Y_2(v)$ 'nin pozitif kökleri $v_4 = 2.1781$ ve $v_5 = 16$ 'dir. Bu frekanslar için geçiş noktaları $x_4 = -13.01$ ve $x_5 = 1$ olarak elde edilir. $Y_2(v)$ 'nin ilk ve son katsayısı $y_{2,1} = -1$ ve $y_{2,0} = -5408$ 'dir. Bu arada $Y_2'(2.1781) = 2174.96$ ve $Y_2'(16) = -2366$ sonuçları hesaplanırsa kararlılığı kolayca belirlemek amacıyla bir tablo hazırlanabilir (Tablo 1).

Tablo 1. Kritik frekanslar, yerleri, geçiş yönleri

i	v_i	${}_1x_i$	${}_2x_i$	${}_1d_{i,j}$	${}_2d_{i,j}$	c_i
1	0	-15	26.6	1	-1	0
2	2	4.5	-	-2	-	-2
3	2.1781	-	-13.01	-	2	2
4	4	1	-	2	-	2
5	16	1	1	-2	-2	-4
6	∞	0	0	1	1	2

Tablo 1'den hareketle kararlılığın belirlendiği karar tablosu oluşturulabilir (Tablo 2):

Tablo 2. Karar tablosu

i	I_i		K_i		u_i	Stabil
	x_{i-1}	x_i	$\frac{-1}{x_{i-1}}$	$\frac{-1}{x_i}$		
1	$-\infty$	-15	0^+	0.067	0	Evet
2	-15	-13.01	0.067	0.077	1	Hayır
3	-13.01	0^-	0.077	∞	3	Hayır
4	0^+	1	$-\infty$	-1	5	Hayır
5	1	4.5	-1	-0.222	3	Hayır
6	4.5	26.6	-0.222	-0.038	1	Hayır
7	26.6	∞	-0.038	0^-	0	Evet

Tablo 2 dikkatlice incelendiğinde sistemin ancak $k \in (-0.038, 0.067)$ değerleri için kararlı olduğu anlaşılır. Yani bu sistemi tüm kararlı kılan $diag(k, k)$ tipindeki kontrolör kazançları bulunan bu aralık ile parametrize edilebilir. Elde edilen sonuçlar sonunda aşağıdaki algoritma TITO sistemlerin kararlılığı üzerine oldukça hızlı bir yöntem önermektedir.

Algoritma

- Adım1: (19) denklemini çözerek kritik frekansları bul.
- Adım 2: (27) ve (28) denklemlerinden kesim noktalarının yerlerini bul (x_i).
- Adım 3: $x_{i-1} < x_i$ olacak şekilde bu noktaları sırala.
- Adım 4: Aynı x_i noktasına karşı düşen frekansları her iki karakteristik değer için sırala ve yeniden adlandır. Birinci karakteristik değer için $\{w_{i,1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,\mu}\}$ ikinci karakteristik değer için $\{w_{i,\mu+1}, w_{i,2}, \dots, w_{i,\mu+\eta}\}$.
- Adım 5: Birinci karakteristik değer için x_i noktasının geçiş yönü olan ${}_1d_{i,j}$ 'leri hesapla. ${}_1c_i$ 'yi belirle.
- Adım 6: İkinci karakteristik değer için x_i noktasının geçiş yönü olan ${}_2d_{i,j}$ 'leri hesapla. ${}_2c_i$ 'yi belirle.

Adım 7: $c_i = {}_1c_i + {}_2c_i$ eşitliğinden yola çıkarak net geçiş sayısını belirle.

Adım 8: I_i ve K_i aralıklarını oluştur, her biri için kararsız kutup sayısı olan u_i 'yi (14) ifadesini kullanarak hesapla.

Adım 9: $u_i = 0$ koşulunu sağlayan aralıkları kararlı kulan aralıklar olarak belirle.

Sonuçlar

Bu çalışmada TITO sistemler için sistemi kararlı kılan tüm $diag(k, k)$ tipinde kontrolörlerin hızlı olarak nasıl bulunabileceği üzerinde durulmuştur. Problemin çözünü bir teorem yardımıyla bir algoritma içine gömülmüştür. Açıklayıcı bir örnek ile yöntemin ne denli basit olduğu gösterilmiştir. Problemin sadece indirgenbilir durum için çözümünün olmadığı kolaylıkla söylenebilir. Şu an dayanıklı kararlılık üzerine yapılan çalışmalar devam etmektedir.

Kaynaklar

- Ackermann, J. ve Kaesbauer, D., (2003). Stable polyhedra in parameter space, *Automatica*, **39**, 937–943.
- Barman, J.F. ve Katzenelson, J., (1974). A generalized Nyquist-type stability criterion for multi-variable feedback systems, *International Journal of Control*, **20**, 4, 593–622.
- Gryazina, E.N. ve Polyak, B.T., (2006). Stability regions in the parameter space: D-decomposition revisited, *Automatica*, **42**, 1, 13–26.
- Ho, M.-T., Datta, A. ve Bhattacharyya, S.P., (1996). A new approach to feedback stabilization, *The 35th IEEE Conference on Decision and Control.*, Kobe, Japan, December 11-13.
- Ho, M.-T., Datta, A. ve Bhattacharyya, S.P., (1997). A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers, *IEEE Proc. American Control Conference*, Albuquerque, NM, USA, June 4-6.
- MacFarlane, A.G.J. ve Postlethwaite, I., (1977): Generalized Nyquist stability criterion and multi-variable root loci, *International Journal of Control*, **25**, 1, 81–127.
- Munro, N., Söylemez, M.T. ve Baki, H., (1999). Computation of D-Stabilizing low-order compensators, *Control System Centre Report*, 882, UMIST, Manchester, UK.

- Rosenbrock, H.H., (1969). Design of multivariable control systems using the inverse Nyquist array, *Proceeding of IEEE*, **116**, 1929–1936.
- Rosenbrock, H.H., (1970). State-Space and Multivariable Theory, London, Nelson, UK.
- Shafiei, Z. ve Shenton, A.T., (1994). Tuning of PID-type controllers for stable and unstable systems with time delay, *Automatica*, **30**, 1609–1615.
- Shafiei, Z. ve Shenton, A.T., (1997). Frequency-domain design of PID controllers for stable and unstable systems with time delay, *Automatica*, **33**, 12, 2223–2232.
- Skogestad, S. ve Morari, M., (1989). Robust performance of decentralized control systems by independent designs, *Automatica*, **25**, 1, 119–125.
- Söylemez, M.T., Munro, N. ve Baki, H., (2003). Fast calculation of stabilizing PID controllers, *Automatica*, **39**, 121–126.
- Söylemez, M.T. ve Üstoğlu, İ., (2006). Designing control systems using exact and symbolic manipulations of formulae, *International Journal of Control*, **79**, 11, 1418–1430.
- Söylemez, M.T. ve Üstoğlu, İ., (2007). Polynomial control systems, *IEEE Control System Magazine*, **27**, 4, 124–137.
- Youla, D.C., Bongiorno, J.J. ve Lu, C.N., (1974). Single-loop feedback stabilization of linear multivariable plants, *Automatica*, **10**, 2, 159–173.
- Youla, D.C., Jabr, H.A. ve Bongiorno, J.J., (1976). Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers – Part II: multivariable case, *IEEE Transactions on Automatic Control Theory*, **21**, 3, 319–338.