

**İTÜ Dergisi/d****mühendislik**

Cilt:2, Sayı:1, 64-72

Şubat 2003

# Seramik kompozitlerde elastik ve sürtünmeli köprülenen çatlak problemi

**Hale ERGÜN\***, **Hasan BODUROĞLU***İTÜ İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul*

## Özet

*Bu çalışmada, tek eksenli gerilme altında, merkezi bir çatlak olan, çatlak eksenine dik lifler ile kuvvetlendirilmiş sonsuz kompozit levha gözönüne alınmıştır. Problemin formülasyonunda kullanılmak üzere, çatlak boyunca lifteki gerilme ve çatlak açılması ilişkisini ifade eden köprülenme bağıntıları olan Hsueh (1988)'in kullandığı elastik köprülenme bağıntısı ve Marshall ve diğerleri (1985)'nin kullandığı sürtünmeli köprülenme bağıntısı seçilmiştir. Problemin formülasyonunda elde edilen tekil integral denklem, Chebyshev polinomları yardımı ile lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemine indirgenmiştir. Gevrek lifler ile kuvvetlendirilmiş kompozitlere örnek malzeme olarak SiC/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> seçilmiş ve lif hacim oranının değişimine göre çözümler elde edilmiştir.*

**Anahtar Kelimeler:** *Chebyshev polinomları, köprülenme, lifle kuvvetlendirilmiş kompozit malzeme, merkezi çatlaklı kompozit levha.*

## Bridging in uniaxial reinforced ceramic composites

### Abstract

*In this study, a unidirectional fibre reinforced infinite composite plate under uniaxial stress which has a central through crack is considered. The bridging relations which express the relation between the stress in the fibre and the crack opening displacement along the crack axis as elastic bridging relation used by Hsueh (1988) and frictional bridging relation used by Marshall et al. (1985) which are consistent with infinite brittle fibre-reinforced composite behaviour are chosen to be utilised in the formulation of the problem. The differential equation which contains Airy stress functions of a centrally cracked orthotropic plate is solved through Fourier transform techniques and the stresses in plane are obtained in terms of the crack surface derivative. The singular integral equation system obtained for the formulation of the problem, is reduced to the solution of a non-linear system of algebraic equations by introducing Chebyshev polynomials which have closer roots near to crack tips. Stress intensity factor at crack tips, crack opening displacement and the point where the bridging type considered changes on the crack axis can be calculated. SiC/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> is chosen as an example of brittle fibre-reinforced composite material and the effect of the variations of the fibre volume ratio is presented.*

**Keywords:** *Bridging, fibre-reinforced composite, centrally cracked infinite plate, Chebyshev polynomials.*

---

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Hale ERGÜN. [unal@itu.edu.tr](mailto:unal@itu.edu.tr); Tel: (212) 285 65 51.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ İnşaat Fakültesi'nde tamamlanmış "Tek doğrultuda kuvvetlendirilmiş kompozitlerde çatlak etrafında yük aktarımı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 17.09.2002 tarihinde dergiye ulaşmış, 25.12.2002 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2003 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Seramik malzemeler, yüksek sıcaklığa ve zor çevre koşullarına karşı dayanıklı olduklarından birçok alanda tercih edilirler. Fakat bu malzemelerin yük taşıma kapasitesi, üretim sırasında oluşan çatlak türünde kusurlarla veya kullanımı gereği içerdiği süreksizliklerle önemli ölçüde azalır. Normal çalışma koşulları altında bu çatlaklar büyüyerek önemli hasarlara yol açarlar. Örneğin Alumina seramik malzemesi 1550°C'ye kadar servis verebildiği halde, bünyesinde bulunan bir çatlağın ilerlemesi için gerekli en büyük gerilme şiddeti çarpanı değeri  $K_{IC}=1-3 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ 'dir (Chawla, 1993). Metallere göre kusurlara çok hassas olan seramiklerin kırılma tokluğunu iyileştirmek üzere çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Bunun için seramik matris, tek doğrultulu sürekli lifler, kısa lifler veya parçacıklar ile kuvvetlendirilerek tokluk davranışı incelenmiştir. (Marshall v. diğ., 1985; Marshall ve Cox, 1987; Hutchinson ve Jensen, 1990; Budiansky v. diğ., 1986, 1995; Danchai vijit ve Shetty, 1993; Chiang, 2001; Thouless ve Evans, 1988; Evans ve McMeeking, 1986; Hsueh ve Becher, 1998; Lin ve Li, 1997; Fu v. diğ., 2000; Wang v. diğ., 1988). Yapılan birçok deneysel çalışmada (Becher ve Wei, 1984; Rühle v. diğ., 1987; Becher v. diğ., 1988; Krause v. diğ., 1990; Singh, 1990; Grimes v. diğ., 1990; Wu v. diğ., 1997; Sun ve Singh, 1998) başka bir malzeme ile güçlendirme işleminin matrisin kırılma tokluğunu iyileştirdiği ortaya konmuştur.

Seramik kompozitlerdeki liflerin varlığı çatlak açılması, lif-matris arayüzeyinin kayması, sıyrılma gibi enerji sarfedilmesini sağlayan olayları da birlikte getirmekte ve bileşenlerine göre kompozitin tokluğunu artırmaktadır.

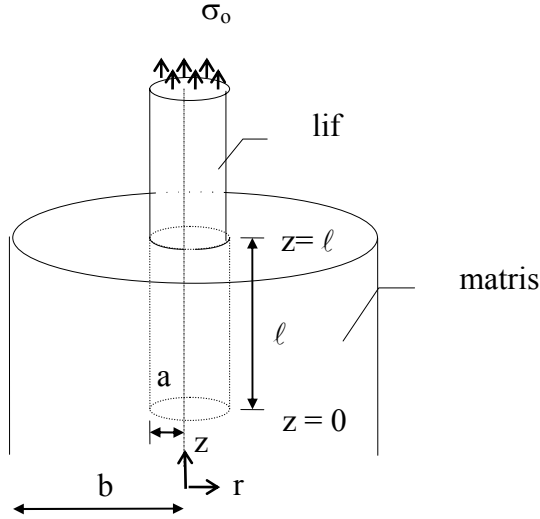
Bu çalışmada, tek eksenli gerilme altında, tek doğrultuda lifler ile kuvvetlendirilmiş, merkezi çatlağı olan sonsuz kompozit levha gözönüne alınmıştır. Ayrıca, ortotrop kompozit bileşenleri olan lif ve matrisin ayrı ayrı elastik davranış gösterdiği, lif-matrisin arayüzeyinde gerilmenin  $\tau_i$  kayma gerilmesi ile aktarıldığı, kırık yüzeyinin lif eksenine dik olduğu varsayımı yapılmıştır.

## Matrise gömülü eksenel yüklü lif modeli ve köprülenme ilişkileri

Liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit malzemelerde, çatlak uzunluğu boyunca tamamen göçmeyen lifler yük aktarmaya devam ederler. Karşılıklı çatlak yüzeyleri arasında bağlı kalan lifler, yükün aktarılmasında köprü vazifesi gördüğünden bu olaya lif köprülenmesi denir. Liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit bir levhanın merkezinde bulunan çatlakta en azından üç tip lif köprülenmesinin varlığından bahsedilebilir (Hsueh ve Becher, 1996). Gevrek bir malzeme olan matrisin çatlamasıyla lifler zarar görmez ve lif-matris arayüzeyi bağlı kalırsa, yük elastik gerilen lifler tarafından taşınır. Bu durumda lifler matrise yük aktararak elastik köprülenmeyi sağlarlar (Hsueh, 1988).

Eğer lif-matris arayüzeyi boyunca kayma gerilmesi kayma dayanımını geçerse sürtünmeli kayma başlar. Lif-matris arayüzeyi boyunca lifin matrise göre yerdeğiştirmesi sözkonusu olur. Bu durumda sürtünmeli köprülenmeden bahsedilir (Marshall v. diğ., 1985; Evans v. McMeeking, 1986; Marshall ve Cox, 1987; Kumaria v. diğ., 1997; Xu v. diğ., 1998; Wang v. diğ., 1988; Lin ve Li, 1997; Marshall v. diğ., 1985; Budiansky v. diğ., 1986; Danchai vijit ve Shetty, 1993). Eğer gerilme altındaki lifler matris içinde kırılırsa kırık yüzeyi matristen sıyrılan lifler tarafından köprülenir ve sıyrılma köprülenmesi oluşur (Thouless ve Evans, 1988; Hsueh ve Becher, 1996; Lin ve Li, 1997).

Literatürde verilen çalışmaların hemen hepsinde gerilme analizini basitleştirmek için Şekil 1'deki, etrafından izole edilmiş kompozit silindir model kullanılmıştır. Köprülenme tiplerinin belirlenebilmesi için matrise gömülü tek lifli bu model üzerinde deneyler yapılmış ve deney sonuçlarına uygun sonuçlar veren köprülenme bağıntıları ortaya konmuştur. Bu modelde lifin matrise göre yer değiştirmesi, kompozit levhada v yarım çatlak açılmasına karşı gelmektedir. Hsueh (1988), çalışmasında, bu modelin, lifin matrise gömülü uzunluğunun lif yarıçapına oranı olan  $l/a$ 'nın 5'ten büyük değerleri için sonsuz uzun lifli model gibi davrandığını göstermiştir.



Şekil 1. Matrise kısmen gömülü, eksenel yüklü lif modeli

### Elastik köprülenme

Hsueh (1988), liften matrise yük aktarımı analizini yaparken Şekil 1'deki modelde lif ve matrisin radyal doğrultudaki yer değiştirmelerinin lif eksenine boyunca sabit kaldığını, lifin matris içindeki ucunda lif ve matrisin eksenel şekil değiştirmelerinin eşit olduğunu ve elastik köprülenmenin tanımı gereği lif-matris arayüzeyi boyunca eksenel yer değiştirmelerin eşit olduğunu kabul ederek aşağıdaki bağıntıyı elde etmiştir:

$$\sigma_o = \frac{E_c v}{a E_m V_m} \sqrt{-\frac{2 E_c E_f}{(1 + v_m)(\ln(V_f) + V_m)}} \quad (1)$$

Burada  $E_c = V_f E_f + V_m E_m$  kompozit malzemenin lif eksenine doğrultusundaki,  $E_f$  ve  $E_m$  lif ve matrisin elastisite modülleridir.  $v_f$  ve  $v_m$  lif ve matrisin poisson oranlarıdır.  $V_f$  ve  $V_m$  lif ve matrisin hacim oranlarıdır. Tek doğrultulu liflerle kuvvetlendirilmiş kompozit malzemelerde, lif hacim oranı, lif eksenine dik düzlem içindeki liflerin alanının tüm kesit alanına oranı olarak alınmıştır ( $V_f = a^2/b^2$ ).

### Sürtünmeli köprülenme

Marshall ve diğerleri (1985), Şekil 1'deki model üzerinde lif-matris arayüzey kayma gerilmesinin kayma uzunluğu boyunca sabit olduğunu, lif ve

matristeki eksenel normal gerilmelerin sadece z'nin fonksiyonu olduğunu kabul ederek (2) ile verilen sürtünmeli köprülenme ilişkisini elde etmişlerdir:

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{4 \tau_s E_f E_c}{a E_m V_m} v} \quad (2)$$

Burada,  $\tau_s$  lif-matris arayüzeyinde kayma uzunluğu boyunca oluşan sabit kayma gerilmesidir ve bir malzeme özelliği olan kayma dayanımına eşittir.

### Köprülenme geçişi

Hsueh (1988), liften matrise yük aktarılmasını sağlayan  $\tau_i$  arayüzey kayma gerilmesi ifadesini aşağıdaki gibi hesaplamıştır:

$$\tau_i(z) = -\frac{na E_m V_m \cosh(nz)}{2 E_c \sinh(n\ell)} \sigma_o \quad (3)$$

Burada:

$$n^2 = -\frac{2 E_c}{E_f (1 + v_m) a^2 (\ln(V_f) + V_m)} \quad (4)$$

olarak alınmıştır. Lifin matrise göre arayüzeyleri boyunca yer değiştirmeye başlaması için (3) ile verilen kayma gerilmesinin ilgili kayma dayanımına ulaşması gerekir. Ayrıca bu ifadede (1) ile verilen lifteki  $\sigma_o$  ifadesi yerine yerleştirilirse elastik köprülenmeden sürtünmeli köprülenmeye geçiş için gerekli yarım çatlak açılması ifadesi aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$v = \frac{a \tau_s}{E_c} (1 + v_m) (-\ln V_f - V_m) \quad (5)$$

Lif-matris yüzeyi ayrılmış lifteki en büyük  $\sigma_o$  gerilmesi lifin kopma dayanımı olan  $\sigma_s$ 'ye ulaştığında lif matris içinde kırılır. Sürtünmeli köprülenme esnasında (2) ile verilen lifteki normal gerilmenin lifin kopma dayanımı olan  $\sigma_s$  değerine ulaşması ile sürtünmeli köprülenmeden sıyrılmaya köprülenmesine geçiş için gerekli yarım çatlak açıklığı aşağıdaki şekilde bulunur:

$$v = \frac{aV_m E_m \sigma_s^2}{4E_f E_c \tau_s} \quad (6) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial v}{\partial x} = f(x)$$

Çatlak boyunca köprülenme olayının tamamen sona ermesi için çatlak açılmasının sıyrılma uzunluğuna ulaşması gerekir. (5) ve (6) ile verilen koşullar birer malzeme sabitleridir.

### Problemin formülasyonu

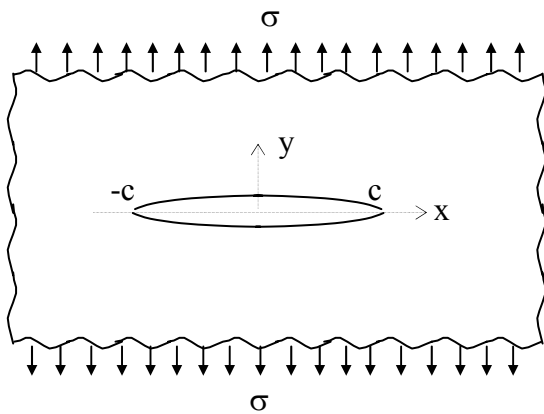
Delale (1985), Şekil 2'de tek eksenli gerilme altındaki sonsuz kompozit bir levhada  $2c$  çatlak eksenini boyunca  $\sigma_y$  normal gerilme ifadesini aşağıdaki gibi elde etmiştir:

$$\sigma_y(x) = \frac{1}{\pi} \frac{E_y w_1 w_2}{(w_1^2 - w_2^2)} \int_{-c}^c \frac{f(t) dt}{(t-x)} \quad (7)$$

Burada,  $w_1$  ve  $w_2$ :

$$\beta_1 = \frac{E_y}{E_x}, \quad \beta_2 = E_y \left( \frac{1}{G_{xy}} - \frac{2\nu_{xy}}{E_x} \right)$$

olacak şekilde  $\beta_1 w^4 - \beta_2 w^2 + 1 = 0$  denkleminin reel iki köküdür.  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $G_{xy}$  ve  $\nu_{xy}$ , lif eksenleri  $y$  doğrultusunda olmak üzere ortotrop levhanın mekanik sabitleridir.



Şekil 2. Lif eksenine dik merkezi çatlaklı olan, sonsuzda  $\sigma$  gerilmesi altında sonsuz levha.

(7) ifadesindeki  $f(t)$  fonksiyonu  $-c < x < c$ ,  $y=0$  aralığında yarım çatlak açılmasının türevi:

olacak şekilde çatlak yüzeyinin eğimini ifade etmektedir. O halde yarım çatlak açılması aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$v(x) = -\int_x^c f(t) dt \quad (8)$$

Çatlak uçlarında sonsuz değer alan (7) ifadesi ile verilen  $\sigma_y$  normal gerilmesinin davranışını karakterize eden gerilme şiddeti çarpanı aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Sneddon ve Lowengrub, 1969):

$$K_1(c) = \lim_{x \rightarrow c} \sqrt{2(x-c)} \sigma_y(x,0) \quad (9)$$

Çatlak boyunca  $P(x)$  köprülenme gerilmeleri,  $V_f$  lif hacim oranı ile life uygulanan  $\sigma_0$  gerilmelerinin çarpılmasıyla elde edilir. Sonsuzdaki  $\sigma$  gerilmesini de çatlak sınırına taşınırsa, levhada  $y=0$  boyunca herhangi bir noktadaki denge denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_y(x,0) = P(x) - \sigma \quad (10)$$

Çatlağın elastik köprülenen uzunluğu boyunca (10) denklemi ile birlikte (1), (7) ve (8) ifadeleri yazıldığında aşağıdaki tekil integral denklem elde edilir:

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c}^c \frac{f(t)}{(t-x)} dt \quad (11)$$

$$+ \frac{V_f E_c}{a V_m E_m} \sqrt{\frac{-2E_f E_c}{(1+\nu_m)(\ln V_f + V_m)}} \int_x^c f(t) dt = -\sigma$$

Çatlağın sürtünmeli köprülenen uzunluğu boyunca (10) denklemi ile birlikte (2), (7) ve (8) ifadeleri yazıldığında aşağıdaki tekil integral denklem elde edilir:

$$\frac{1}{\pi} \frac{E_c w_1 w_2}{(w_1 + w_2)} \int_{-c}^c \frac{f(t)}{(t-x)} dt$$

$$- \sqrt{-\frac{4V_f^2 E_f E_c \tau_o}{a V_m E_m} \int_x^c f(t) dt} = -\sigma \quad (12)$$

### Problemın sayısal çözümü

(11), (12) tekil integral denklemlerine sınırları önce  $x = c\bar{x}$ ,  $t = c\bar{t}$  değişken dönüşümleri uygulanır ve bilinmeyen çatlak yüzeyi eğimi  $f(t)$  fonksiyonu için uç noktalarda tekil olan:

$$f(t) = f^*(\bar{t}) = \frac{F(\bar{t})}{\sqrt{1-\bar{t}^2}} \quad (13)$$

yazılmıştır. Problemın sayısal çözümü için Chebychev polinomlarından faydalanılmıştır.

$$\omega_j = \frac{\pi}{N-1} \quad j=2, \dots, N-1$$

$$\omega_1 = \omega_N = \frac{\pi}{2(N-1)} \quad (14)$$

$$t_j = \cos\left(\pi \frac{j-1}{N-1}\right) \quad j=1, \dots, N$$

$$x_i = \cos\left(\pi \frac{2i-1}{2(N-1)}\right) \quad i=1, \dots, N-1$$

(14) ifadelerinde verilen  $\omega_j$ , 1.tip Chebyshev polinomlarının ağırlık fonksiyonu;  $x_i$ , 2.tip Chebyshev polinomlarının kökleri;  $t_j$ , ise 1.tip Chebyshev polinomlarının kökleridir. (14) ifadeleri kullanılarak (11), (12) tekil integral denklemleri ve (5), (6) koşulları, çatlak uzunluğu boyunca ayrıklaştırılmıştır. Yarım düzlemde incelenen problemi çeyrek düzleme indirgemek için polinom özelliklerinden ve problemın formülasyonunu tamamlayan aşağıdaki süreklilik koşulundan faydalanılmıştır:

$$\int_{-c}^c f(t) dt = 0 \quad (15)$$

Tekil integral denklemde bulunan katsayılar aşağıda verilen oranlar ile boyutsuzlaştırılmıştır.

$$k_1 = \frac{\sigma}{\sigma_s}, \quad k_2 = \frac{\sigma_s}{\tau_s}, \quad k_3 = \frac{E_f}{E_m}, \quad k_4 = \frac{E_f}{\sigma_s} \quad (16)$$

$$k_5 = \frac{c}{a}, \quad k_6 = \frac{K}{K_o} = \frac{K}{\sigma\sqrt{c}}, \quad V_f, v_f, v_m$$

Yukarıda anlatılan tüm işlemler (11) denkleminde uygulandıktan sonra aşağıdaki (17) denklemi elde edilmiştir:

$$E1 \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} + E2 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j + 1 = 0 \quad (17)$$

$$i=1, \dots, n_e$$

Burada:

$$E1 = \frac{2k_4}{\pi k_1 k_3} [V_f (k_3 - 1) + 1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)}$$

$$E2 = \frac{k_4 k_5 V_f [(k_3 - 1) V_f + 1]}{k_1 (1 - V_f)} \sqrt{\frac{-2[V_f (k_3 - 1) + 1]}{k_3 (1 + v_m) (1 - V_f + \ln V_f)}}$$

olarak alınmıştır. Sürtünmeli köprülenmenin yer aldığı (12) denklemini düzenleyelim.

$$F1 \sum_{j=1}^{N/2} \frac{F(\bar{t}_j) \omega_j \bar{t}_j}{(\bar{t}_j)^2 - (\bar{x}_i)^2} - \sqrt{F2 \sum_{j=1}^i F(\bar{t}_j) \omega_j} + 1 = 0 \quad (18)$$

$$i=n_e+1, \dots, n_e+n_f$$

Burada:

$$F1 = \frac{2k_4}{\pi k_1 k_3} [V_f (k_3 - 1) + 1] \frac{w_1 w_2}{(w_1 + w_2)}$$

$$F2 = -\frac{4k_4 k_5 V_f^2 [V_f (k_3 - 1) + 1]}{k_1^2 k_2 (1 - V_f)}$$

olarak alınmıştır. N, birim yarım çatlak eksenini uzunluğu boyunca alınan toplam nokta sayısı;

$n_e$ , çatlak ucundan itibaren elastik köprülenme ile yük aktaran nokta sayısı;  $n_f$  ise çatlak ortasından itibaren sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran nokta sayısıdır ( $N=n_e+n_f$ ).  $n_e$  'nin belirlenmesi ve çözümün sona erdirilmesi için gerekli olan (5) ve (6) koşullarını da sayısal çözüm için hazırlayalım. (5) koşulu aşağıdaki hale gelir.

$$\sum_{j=1}^{n_e} F(t_j) \omega_j = \frac{k_3}{k_2 k_4 k_5} \frac{(1+v_m)(1-V_f + \ln(V_f))}{[V_f(k_3-1)+1]} \quad (19)$$

(6) sınır koşulu aşağıdaki hali alır:

$$\sum_{j=1}^{n_e+n_f} F(t_j) \omega_j = -\frac{k_2}{4k_4 k_5} \frac{(1-V_f)}{[(k_3-1)V_f+1]} \quad (20)$$

## Sonuçlar

Bu problemde, levhaya sonsuzda uygulanan gerilme  $\sigma$  ve çatlak uzunluğu  $c$  dışındaki tüm değişkenler malzeme özellikleridir. Lif içermeyen levha için gerilme şiddeti çarpanı olan  $K_0=\sigma\sqrt{c}$  değerleri ile grafiklerin düşey eksenleri olan  $K$  değerleri normalize edildiğinde,  $K/K_0$  oranı bize liflerin varlığının etkisi hakkında bilgi verir. Çözümlerin doğruluğunu kontrol etmek için, bu bölümdeki bütün grafiklerde bu işlem yapıldığında, bu oranın her zaman 1'den küçük olduğu hesaplanarak grafiklerde gösterilmiştir. Yani liflerin varlığı levhadaki çatlak uç noktalarındaki gerilme şiddeti çarpanı değerlerini düşürmekte ve malzemeyi iyileştirmektedir. Bu çalışmada, sonsuz uzunluklu gevrek SiC lifleri ile kuvvetlendirilmiş  $Al_2O_3$  seramik kompozit malzeme örnek alınıp lif hacim oranı  $V_f$ 'nin çözümlere etkisi incelenmiştir.

SiC /  $Al_2O_3$  seramik kompozit malzeme (Becher ve Wei, 1984; Jenkins v. diğ., 1987; Rühle v. diğ., 1987; Hsueh, 1988, 1990; Hsueh ve Becher, 1996; Krause v. diğ., 1990; Rödel v. diğ., 1991; Xu v. diğ., 1998; Brandt, 1995; Chawla, 1993) daha önce yapılan birçok çalışmaya örnek oluşturmuştur. Bu çalışmada kullanılan seramik kompozit bileşenlerine ait

malzeme sabitleri şöyledir.  $E_f=500\text{GPa}$ ,  $E_m=400\text{GPa}$ ,  $\nu_f=0.3$ ,  $\nu_m=0.25$ ,  $a=0.5\mu\text{m}$ ,  $\sigma_s=5\text{GPa}$ ,  $\tau_s=50\text{MPa}$ .

Rödel ve diğ. (1991) bu malzemede oluşan köprülenme olayını elektron mikroskobu ile incelemiştir. Yarıçapı  $0.5\mu\text{m}$  olan SiC liflerinin kullanıldığı bu incelemede numune zorlandıkça çatlak ucundan daima  $100\mu\text{m}$  mesafede elastik köprülenmenin gözlemediği ortaya konmuştur. Yine bu çalışmada yarım çatlak boyu  $1\text{mm}$ 'ye ulaşmaya kadar köprülenme olayının gözlemlendiği belirtilmiştir. Bu deneysel gözlemlere dayanarak  $c/a$  oranı 200 olacak şekilde çatlakla sahip kompozit malzemede gerilme şiddeti çarpanı, ilgili köprülenmenin oluşmasını sağlayan gerilme aralıkları ve köprülenme geçiş noktaları  $V_f = 0.1, 0.3$  ve  $0.5$  lif hacim oranları için incelenmiştir.

Tablo 1'de çatlakın tamamının elastik köprülendiği durum gösterilmiştir. Bu çözümlere ait  $K/K_0$  oranı, her lif hacim oranı ve çatlak açıklığı için levhaya sonsuzda uygulanan gerilmeden bağımsız olarak sabit kalmaktadır.

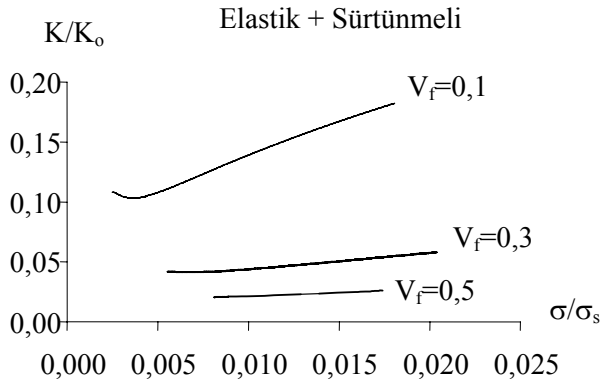
Tablo 1. Tamamı elastik köprülenen çatlakın  $c=200a$  için çözümleri.

$V_f$	$\max(\sigma/\sigma_s)$	$K/K_0$
0.1	0.0024	0.108
0.3	0.0056	0.042
0.5	0.0082	0.021

Lif hacim oranı arttıkça elastik köprülenmenin gerçekleştiği gerilme aralığı da artmaktadır. Başka bir deyişle, çatlak elastik köprülendiğinde, lif hacim oranı arttıkça, lif-matris arayüzeylerinin bağlı kalması ve sürtünmeli kaymanın başlangıcı daha büyük gerilme değerlerine ötelenerek, sürtünmeli köprülenmeye geçiş gecikmektedir.

Elastik köprülenen bir çatlak, geçiş şartını sağladığında, çatlak ortasında zorlamanın artması ile sürtünmeli köprülenme oluşmaya başlar. Şekil 3'te çatlak uçlarında elastik ve ortasında sürtünmeli köprülenme olduğu kabul

edilerek çözümler elde edilmiştir. Bu anlamda, Şekil 3'teki grafik, Tablo 1 ile verilen çözümlerin devamıdır.



Şekil 3. Uçlarında elastik köprülenme, ortasında sürtülmeli köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya, sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değerinin değişimi,  $c/a=200$ .

Tablo 2'de görüldüğü gibi, bir çatlakta elastik+sürtülmeli köprülenme aynı anda oluştuğunda, sıyrılmalı köprülenmeye geçme şartını sağlayan en büyük gerilme, lif hacim oranı  $V_f = 0.3$  için bulunmuştur. Diğer lif hacim oranlarında, daha küçük gerilme aralıklarında elastik+sürtülmeli köprülenme ile yük aktarabildikleri hesaplanmıştır.

Tablo 2. Elastik+sürtülmeli köprülenen çatlakın  $c=200a$  için çözümleri.

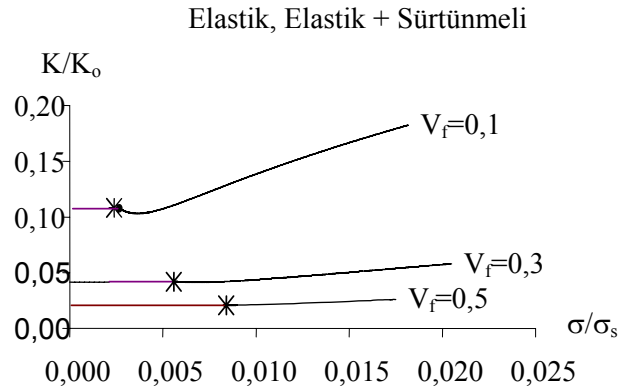
$V_f$	$\min(\sigma/\sigma_s)$	$\max(\sigma/\sigma_s)$
0.1	0.0024	0.018
0.3	0.0056	0.020
0.5	0.0082	0.017

Elastik köprülenme durumuna ait Tablo 1'deki  $\max(\sigma/\sigma_s)$  değeri, elastik+sürtülmeli köprülenme durumuna ait Tablo 2'deki  $\min(\sigma/\sigma_s)$  değeri ve bunlara karşı gelen gerilme şiddeti çarpanı değerleri üstüste düşmektedir.

Tablo 1 ve Şekil 3'teki grafik, Şekil 4'te birlikte çizilmiştir. İki tip eğrilerin buluşma noktaları Şekil 4'te x işareti ile gösterilmiştir. Buluşma noktalarının hemen sol tarafında çatlak

tamamı elastik köprülenirken, hemen sağ tarafında çatlak ucunda elastik ve orta kısımda sürtülmeli köprülenme oluşmaya başlamaktadır ve gerilme arttıkça sürtülmeli köprülenmenin olduğu bölge çatlak ucuna kadar büyüyerek ulaşmaktadır.

Bu grafikte, farklı lif hacim oranlarına ait eğrilerde, sürtülmeli köprülenmenin olduğu bölge uzunluğunun, elastik+sürtülmeli köprülenme için çözümün bulunduğu  $\min(\sigma/\sigma_s)$ - $\max(\sigma/\sigma_s)$  aralığında gerilme arttırıldıkça, herbiri için belirli  $x_{ef}$  değerlerinin sıfırdan başlayarak  $c = 200a$ 'ya kadar ilerlediği görülmüştür. Grafikte görüldüğü gibi, bu gerilme değerlerinde, çatlakın tamamının elastik köprülendiği ve  $x_{ef}$  kadar uzunluğun sürtülmeli ve geri kalan kısmın ise elastik köprülenmesi durumlarına ait gerilme şiddeti çarpanları eşit bulunmuştur.

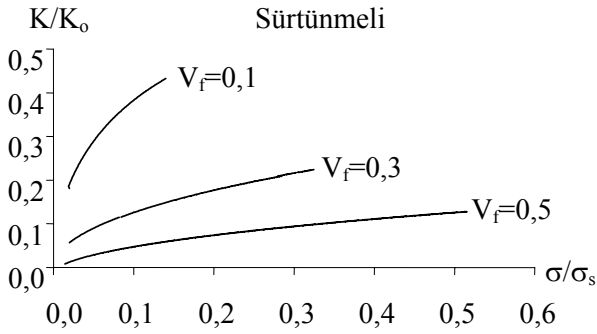


Şekil 4. Tablo 1 ve Şekil 3 grafiğinin birlikte gösterimi. x işaretinin hemen sağında çatlak ortasında sürtülmeli köprülenme, çatlak uçlarında elastik köprülenmeye eşlik etmeye başlamaktadır,  $c/a=200$ .

Bütün çatlak açıklığı boyunca sürtülmeli köprülenme ile yük aktarıldığı durumlarda, lif hacim oranı arttıkça, sıyrılmalı köprülenmeye geçiş gecikmektedir (Şekil 5 ve Tablo 3).

Sürtülmeli köprülenmenin olduğu gerilme aralığı, elastik köprülenmenin olduğu gerilme aralığının  $V_f=0.1$  için 50.6 katı;  $V_f=0.3$  için 55.0 katı;  $V_f=0.5$  için 60.8 katı kadardır. Sürtülmeli köprülenmenin olduğu gerilme aralığı, elastik+sürtülmeli köprülenmenin

oluşturduğu gerilme aralığının  $V_f=0.1$  için 6.5 katı;  $V_f=0.3$  için 2.5 katı;  $V_f=0.5$  için 1.1 katı kadardır.



Şekil 5. Tamamı sürtünmeli köprülenme ile yük aktaran çatlaklı olan levhaya sonsuzda uygulanan gerilme artışına göre, farklı lif hacim oranları için gerilme şiddeti çarpanı değişimi,  $c/a=200$ .

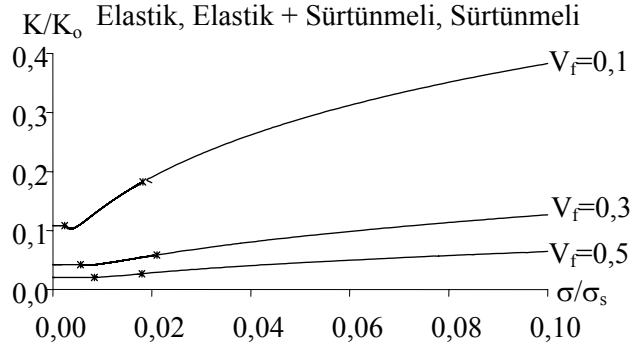
Elastik köprülenmenin teorik olarak çatlakın uç kısmında hep var olacağını fakat, lif hacim oranı arttıkça artan bu mertebe farkına dayanarak, diğer köprülenme tiplerine göre çatlakın çok küçük bir uzunluğu boyunca gerçekleştiği ve sistem üzerindeki etkisini kaybettiği söylenebilir.

Tablo 3. Tamamı sürtünmeli köprülenen çatlakın  $c=200a$  için çözümleri.

$V_f$	$\max(\sigma/\sigma_s)$	$K/K_0$
0.1	0.018	0.140
0.3	0.020	0.327
0.5	0.017	0.518

Şekil 6'da elastik, elastik+sürtünmeli, sürtünmeli köprülenme durumlarına ait çözümler birlikte görülmektedir. Fakat sürtünmeli köprülenme, diğer iki duruma göre daha büyük aralıkta olduğundan grafikte görülebilmesi için, sürtünmeli köprülenmenin sadece alt kısmı alınarak çizilmiştir.

Şekil 5'te görüldüğü gibi elastik köprülenmenin varlığı belirli gerilme değerinden sonra hesaplarda sistemi etkilememektedir. Lif hacim oranı arttıkça ikili köprülenmelerin oluşmasının zorlaştığı söylenebilir.



Şekil 6. Şekil 4 ve Şekil 5 grafiklerinin birlikte gösterimi.

Tüm grafiklerde, kompozitin lif hacim oranı arttırıldığında, çatlak ucundaki gerilmenin şiddetini karakterize eden gerilme şiddeti çarpanı değerinin azaldığı görülmektedir.

### Semboller

- $\sigma$  : Levhaya sonsuzda lif doğrultusunda uygulanan normal gerilme
- $\nu$  : Poisson oranı
- $\tau_0$  : Lif-matris arayüzey kayma gerilmesi
- $\sigma_0$  : Lifteki normal gerilme
- $\sigma_s$  : Lifin normal gerilme dayanımı
- $\tau_s$  : Lif-matris arayüzeyindeki kayma gerilmesi dayanımı
- $a$  : Lif yarıçapı
- $b$  : İzole edilmiş modelde matris yarıçapı
- $c$  : Yarım çatlak uzunluğu
- $E$  : Elastisite modülü
- $f, m, c$  : Lif, matris ve kompozite ait büyüklüklerle kullanılan indisler
- $G$  : Kayma modülü
- $K_t$  : Gerilme şiddeti çarpanı
- $P$  : Köprülenme gerilmesi
- $V$  : Hacim oranı
- $V$  : Çatlak yarı açılması

### Kaynaklar

- Becher, P. F. ve Wei, G. C., (1984). Toughening behavior in SiC-whisker-reinforced Alumina, *Communications of the American*, **C**, 267-269.
- Becher, P. F., Hsueh, C. H., Angelini, P. ve Tieg, T. N., (1988). Toughening behavior in whisker-reinforced ceramic matrix composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, **71**, 1050-1061.
- Brandt, A. M., (1995). *Cement based composites*, E & FN Span., London.



- Budiansky, B., Evans, A. G. ve Hutchinson, J. W., (1995). Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites, *Int. J. Solids Structures*, **32**, 3/4, 315-328.
- Budiansky, B., Hutchinson, J. W. ve Evans, A. G., (1986). Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics, *J. Mech. Phys. Solids*, **34**, 2, 167-189.
- Chawla, K. K., (1993). *Ceramic matrix composites*, Chapman&Hall.
- Chiang, Y-C, (2001). On fiber debonding and matrix cracking in fiber-reinforced ceramics, *Composites Science and Technology*, **61**, 1743-1756.
- Danchaivijit, S. ve Shetty, D. S., (1993). Matrix cracking in ceramic-matrix composites, *Journal of the American Ceramic Society*, **76**, 2497-2504.
- Delale, F., (1985). Fracture analysis of notched composites, *ASME Journal of Engineering Materials and Technology*, **109**, 22-35.
- Evans, A. G. ve Mcmeeking, R. M., (1986). On the toughening of ceramics by strong reinforcements, *Acta Metall.*, **34**, 2435-2441.
- Fu, S. Y., Yue, C-Y., Hu, X. ve Mai, Y-W., (2000). Analyses of the micromechanics of stress transfer in single- and multi-fiber pull-out tests, *Comp. Sci. and Tech.*, **60**, 569-579.
- Grimes, R. E., Kelkar, G. P., Guazzone, L. ve White, K. W., (1990). Elevated-temperature R-curve behavior of a Polycrystalline Alumina, *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**, 1399-1404.
- Hsueh, C. H., (1988). Elastic load transfer from partially embedded axially loaded fibre to matrix, *Journal of Materials Science Letters*, **7**, 497-500.
- Hsueh, C. H., (1990). Interfacial debonding and fiber pull-out stresses of fiber-reinforced composites, *Materials and Engineering*, **A123**, 1-11.
- Hsueh, C. H. ve Becher, P. F., (1996). Some considerations of bridging stresses for fiber-reinforced ceramics, Metals and Ceramics Division, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, Tennessee 37831.
- Hsueh, C. H. ve Becher, P. F., (1998). Interfacial shear debonding problems in fiber-reinforced ceramic composites, *Acta Mater.*, **46**, 3237-3245.
- Hutchinson, J. W. ve Jensen, H. M., (1990). Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction, *Mechanics of Materials*, **9**, 139-163.
- Jenkins, M. G., Kobayashi, A. S., White, K. W. ve Bradt, R. C., (1987). Crack initiation and arrest in a SiC whisker/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> matrix composite, *J. Am. Ceram. Soc.*, **70**, 393-395.
- Krause, R. F., Fuller, E. R. ve Rhodes, J. F., (1990). Fracture resistance behavior of Silicon Carbide whisker-reinforced Alumina composites with different porosities, *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**, 559-566.
- Kumaria, S., Kumar, S. ve Singh, R. N., (1997). The first matrix cracking behavior of fiber-reinforced ceramic matrix composites, *Acta mater.*, **45**, 5177-5185.
- Lin, Z. ve Li, V. C., (1997). Crack bridging in fiber reinforced cementitious composites with slip-hardening interfaces, *J. Mech. Phys. Solids.*, **45**, 763-787.
- Marshall, D. B., Cox, B. N. ve Evans, A. G., (1985). The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites, *Acta metall.*, **33**, 2013-2021.
- Marshall, D. B. ve Cox, B. N., (1987). Tensile fracture of brittle matrix composites: influence of fiber strength, *Acta Metall.*, **35**, 2607-2619.
- Rödel, J., Fuller, Jr. E. R. ve Lawn, B. R., (1991). In-situ observations of toughening processes in Alumina reinforced with Silicon Carbide whiskers, *J. Am. Ceram. Soc.*, **74**, 3154-57.
- Rühle, M., Dalgleish, B. J. ve Evans, A. G., (1987). On the toughening of ceramics by whiskers, *Scripta Metallurgica*, **21**, 681-686
- Singh, R. N., (1990). Influence of interfacial shear stress on first-matrix cracking stress in ceramic-matrix composites, *J. Am. Ceram. Soc.*, **73**, 2930-2937.
- Sneddon, I. N. ve Lowengrub, M., (1969). *Crack problems in the classical theory of elasticity*, John Wiley & Sons Inc., New York.
- Sun, Y. ve Singh, R. N., (1998). The generation of multiple matrix cracking and fiber-matrix interfacial debonding in a glass composite, *Acta Mater.*, **46**, 1657-1667.
- Thouless, M. D. ve Evans, A. G., (1988). Effects of pull-out on the mechanical properties of ceramic-matrix composites, *Acta Metall.*, **36**, 517-522.
- Wang, Y., Li, V. C. ve Backer, S., (1988). Modelling of fibre pull-out from a cement matrix, *The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete.*, **10**, 3, 143-149.
- Wu, J., Jones, F. R. ve James, P. F., (1997). Continuous fibre reinforced mullite matrix composites by sol-gel processing (part II properties and fracture behavior), *Journal of Materials Science*, **32**, 3629-3635.
- Xu, G., Bower, A. F. ve Ortiz, M., (1998). The influence of crack trapping on the toughness of fiber reinforced composites, *J. Mech. Phys. Solids*, **46**, 1815-1833.