

**itüdergisi/d****mühendislik**

Cilt:3, Sayı:6, 3-12

Aralık 2004

# İntegratörlü sistemler için Katsayı Diyagram Metodu ile kontrolör tasarımı

**Serdar Ethem HAMAMCI***İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, 44280, Malatya*

## Özet

*Bu çalışmanın amacı, transfer fonksiyonunda integratör bulunan zaman gecikmeli sistemlerin kontrolünde klasik PID kontrolörlerin sınırlılıklarını göstermektir. Bu nedenle, bu tür sistemler için daha iyi bir davranış elde etmek amacıyla Katsayı Diyagram Metodu (KDM) olarak adlandırılan bir polinomsal yaklaşımın kullanılması önerilmiştir. KDM ile kontrolör tasarımı eşdeğer zaman sabiti, kararlılık indeksi ve kararlılık sınır indeksi gibi uygun davranış kriterlerine karşı kapalı çevrim sisteminin karakteristik polinomunun katsayılarını seçmeye dayalıdır. Yapılan tasarım örneği KDM'in hem referans basamak girişin takibi ve hem de bozucu işaretin söndürülmesi için davranışta önemli bir iyileşme sağladığını göstermiştir. Ayrıca kontrol en kısa yerleşme süresini ve parametre değişimlerine karşı en dayanıklı davranışı sağlamıştır.*

**Anahtar Kelimeler:** *Katsayı Diyagram Metodu, zaman gecikmesi, integratörlü sistemler, dayanıklılık.*

## Controller design for integrating processes with Coefficient Diagram Method

### Abstract

*The objective of this paper is to illustrate the limitations of classical PID controllers in controlling time delay systems with integrating transfer functions. Generally, the control of integrating processes is more difficult than the classical stable open-loop processes. Especially, integrating processes existing time delay make difficult the control operation. Numerous PID strategies have been proposed for these systems recently. Therefore, using a polynomial approach, Coefficient Diagram Method (CDM) has been proposed in order to obtain a better performance for these systems. The controller design by CDM is based on the choice of the coefficients of the characteristic polynomial of the closed loop system according to the convenient performance criteria such as equivalent time constant, stability index, and stability limit index. The studies on this method illustrated that the CDM provides a significantly improved performance both for the reference step input tracking and for the disturbance rejection. Also the control system provides the smallest settling time and the most robust performance to the parameter changes. An example are presented for an integrating process with time delay to illustrate the effectiveness of the proposed method and compared it with existing ones. It is shown that CDM design is more stable and robust whilst giving the desired time domain performance.*

**Keywords:** *Coefficient Diagram Method, time delay, integrating processes, robustness.*

---

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Serdar Ethem HAMAMCI. [shamamci@inonu.edu.tr](mailto:shamamci@inonu.edu.tr); Tel: (422) 341 00 10 dahili:4500. Makale metni 25.06.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 23.07.2003 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Endüstriyel sistemlerin çoğunun yapısında ölü zaman olarak da adlandırılan zaman gecikmesi bulunmaktadır. Kontrol kuramında bu tür sistemlerin kontrolü için genellikle PID kontrolörler kullanılmaktadır. Bunun en önemli nedeni yapısının basit olması, uygulamalı gerçekleştirmedeki kolaylığı ve geniş bir çalışma bölgesi için dayanıklı davranışa sahip olmasıdır (Majhi ve Atherton, 1999). Bu üstünlüklerine rağmen klasik PID kontrol yöntemleri, transfer fonksiyonunda integratör bulunan sistemlerin kontrolünde yetersiz kalmaktadır (Tyreus ve Luyben, 1992). Bu nedenle integratörlü sistemlerin kontrolü için yeni çalışmaların yapılmasına ihtiyaç duyulmuştur. Bu tür sistemlerin kontrolü üzerine literatürde yapılmış değişik çalışmalar bulunmaktadır. Tyreus ve Luyben (1992) klasik frekans yanıt yöntemini kullanarak PID parametrelerinin hesabı için formüller türetmiş, Wang ve Cluett (1997) kazanç ve faz payı temelli bir yöntem kullanmış ve Tan ve diğerleri (1998) ise PID benzeri  $H_\infty$  kontrolör yapısını önermiştir.

Bu çalışmada, integratörlü sistemlerin kontrolünde karşılaşılan problemlere karşı daha iyi sonuçlar elde etmek için Katsayı Diyagram Metodu önerilmektedir. KDM, 1991'de Shunji Manabe tarafından doğrusal ve zamanla değişmeyen tek-girişli tek-çıkışlı sistemlerin kontrolü için geliştirilmiş bir yöntemdir (Manabe, 1998). Yöntemin en önemli özellikleri sistem ve kontrolör için polinomsal gösterimin kullanılması, iki serbestlik mertebeli (two-degree of freedom) kontrol sistem yapısının kullanılması, kapalı çevrim sistemine ait birim basamak yanıtının genellikle aşırımsız olması, arzu edilen yerleşme süresinin başlangıçta belirlenip ona göre tasarımın yapılması, sistem parametrelerinde meydana gelebilecek olan değişimlere karşı kontrol sisteminin dayanıklılığının (robustness) iyi olması, kontrolörün yeterli kazanç ve faz paylarına sahip olması şeklinde sayılabilir (Hamamcı, 2002). Yöntem ile ilgili daha ayrıntılı bilgi elde etmek için Manabe (1998) ve içindeki referanslara bakılabilir.

## Katsayı diyagram metodu

Kontrol sistemleri elde edilirken kontrolörün uygulamadan kaynaklanan bazı sınırlamalar

altında tasarlanması istenir. Kontrolör mümkün olduğunca düşük mertebeden, minimum fazlı ve kararlı olmalıdır. Ayrıca kontrolörün uygulama için yeterli band genişliği ve güç sınırlamasına sahip olması gerekir. Bu sınırlamalar göz önüne alınmadan tasarım yapılırsa, kararlılık ve zaman yanıtı gereksinimleri sağlanabilmesine rağmen dayanıklılık özelliği zayıf olacaktır. Tüm bu problemler göz önüne alınarak önerilen KDM ile tasarımı yapılan kontrolör en düşük mertebeden, en uygun band genişliğine sahip ve kapalı çevrimli sistemin zaman yanıtı aşırımsız özelliğe sahiptir. Bu özellikler ise dayanıklılık, bozucu etkinin yeterince söndürülmesi ve düşük maliyet özelliklerini garantilemektedir (Manabe ve Kim, 2000).

Bir doğrusal cebrik kontrol yöntemi olan KDM'in temel prensipleri oluşturulurken, diğer bazı klasik ve modern kontrol tekniklerinin üstünlükleri alınarak yöntemin temel prensiplerine uygun bir şekilde birleştirilmiş ve temel yapının oluşturulmasında daha önceki bir çok deneyim ve fikirden de yararlanılmıştır. Bu şekilde etkili ve verimli bir kontrol tekniği olarak ortaya çıkan yöntemin tasarım prosedürünün kolaylığı nedeniyle, oldukça iyi kontrol sistemleri fazla bir zorlukla karşılaşılmaksızın ve deneyim gerektirmeksizin tasarlanabilmektedir (Manabe, 1997).

KDM'nin gücü kontrol edilmesi istenen her sistem için, uygulamalı sınırlar içinde en dayanıklı ve en basit kontrolörlerin tasarlanabilmesinde yatar. Bu şekilde bir çok kontrol sisteminin tasarımı, KDM kullanılarak başarıyla gerçekleştirilmiştir (Manabe, 1997; Hamamcı vd., 2001; Hamamcı vd., 2002). Diğer yöntemlerle karşılaştırmalı olarak yapılan bu tasarımlar kararlılık, zaman yanıtı davranışı ve dayanıklılık açısından oldukça başarılı sonuçlar verir. Özellikle kontrol sisteminin gerek sistem parametrelerindeki değişim ve gerekse sistemin kendi içindeki sınırlı belirsizliklere karşı dayanıklılık özelliği göstermesi büyük bir üstünlük sağlar.

## KDM kontrol sistem yapısı

Tek-giriş tek-çıkışlı bir sistem için KDM standart blok diyagramı Şekil 1'de verilmiştir. Burada  $r$  kontrol sisteminin referans girişini,  $y$  çıkışını,  $u$  kontrol işaretini ve  $d$  ise sisteme

etkiyen bozucu işareti ifade etmektedir. Şekilde kontrol edilmesi istenen sistemin transfer fonksiyonu için  $N(s)$  pay polinomu ve  $D(s)$  ise payda polinomu olarak gösterilmiştir. Aynı şekilde kontrolör transfer fonksiyonu için  $A(s)$  payda polinomu,  $F(s)$  referans pay polinomu ve  $B(s)$  ise geri besleme pay polinomu olarak verilmiştir. Kontrolörün iki pay polinomuna sahip olması, durum uzayı gösteriminin gözlemlenebilir kanonik formuna benzemektedir. Aynı zamanda iki serbestlik mertebeli kontrol sistem yapısı olarak adlandırılan bu yapı ile hem arzu edilen referans işaret takip edilmekte ve hem de bozucu işaret rahatlıkla söndürülebilmektedir. Ayrıca bu şekilde kararsız kutup-sıfır silinmeleri ortadan kalkmakta ve uygulamalı gerçekleştirilmede daha az sayıda integratör elemanı kullanılmış olmaktadır (Hamamcı, 2002).

Kapalı çevrimli sistemin çıkış ifadesi:

$$y = \frac{N(s)F(s)}{P(s)}r + \frac{A(s)N(s)}{P(s)}d \quad (1)$$

şeklinde olup,  $P(s)$  karakteristik polinomu ise

$$P(s) = D(s)A(s) + N(s)B(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (2)$$

ile ifade edilmektedir.

KDM'de tasarım parametreleri eşdeğer zaman sabiti  $\tau$ , kararlılık indeksi  $\gamma_i$  ve kararlılık sınır indeksi  $\gamma_i^*$  olup, karakteristik polinomun katsayıları cinsinden:

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1}a_{i-1}} \quad i=1 \sim (n-1), \quad \gamma_0 = \gamma_n = \infty \quad (3a)$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad (3b)$$

$$\gamma_i^* = \frac{1}{\gamma_{i-1}} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \quad (3c)$$

tanımlanmaktadır (Manabe, 1994). Eşdeğer zaman sabiti kontrol sisteminin zaman yanıtının hızını belirlerken, kararlılık indeksi ve kararlılık sınır indeksi ise zaman yanıtının şeklini, kontrol sisteminin kararlılık ve dayanıklılığını belirler. Denklem 3a-c'den yola çıkılarak  $a_i$  katsayıları

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{\gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \dots \gamma_1^{i-1}} \quad (4)$$

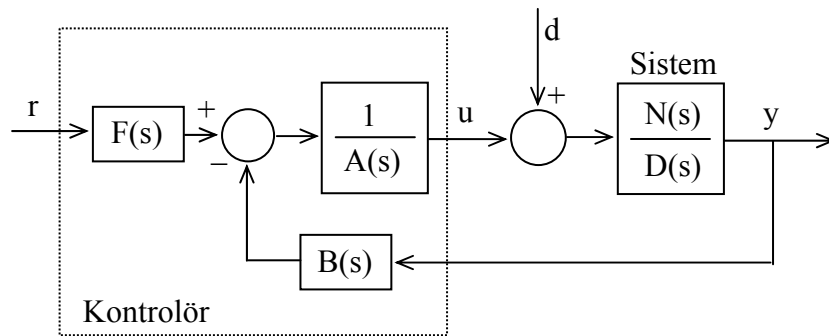
şeklinde ifade edilebilir. Son olarak Denklem 2'deki karakteristik polinom, Denklem 3a-c ve 4'ün yardımıyla tasarım parametreleri cinsinden

$$P(s) = a_0 \left[ \sum_{i=2}^n \left( \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}^j} \right) (\tau s)^i \right] + \tau s + 1 \quad (5)$$

şeklinde verilir. Denklem 5, tasarıma başlarken belirlenen tasarım parametreleri göz önüne alınarak oluşturulan hedef transfer fonksiyonu olarak kullanılacaktır.

### Kararlılık, davranış ve dayanıklılık

Doğrusal-zamanla değişmeyen sistemlerin kararlılığı için temel olarak Routh kriteri kullanılır.



Şekil 1. KDM kontrol sistemine ait blok diyagram

maktadır. Bu amaçla Routh'un ortaya koyduğu kriter, Hurwitz kararlılık için gerekli olan gereklilik koşullarını ifade etmektedir. Ancak Routh kriteri, kontrol sistem tasarımı için aşağıda verilen nedenlerden dolayı yetersiz kalmaktadır:

1. Routh'un kriteri, bir polinomun tam olarak kararlı ya da kararsız olduğunu ifade eder. Ancak uygulamalı tasarımda oldukça önemli olan kararlılık mertebesini ifade etmede yetersizdir.

2. Routh kriteri özellikle sistemin mertebesi arttıkça tasarım parametrelerine göre doğrusal olmayan bir fonksiyon ürettiği için, kontrol sisteminin kararlılığını analiz etmede bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle sistem parametrelerinin değişiminin kararlılık üzerine etkisi açıkça görülememektedir.

3. Tasarım için genellikle sistemin matematiksel modeli kullanıldığı için, uygulamada ortaya çıkabilecek bazı hatalar göz ardı edilmek zorundadır.

Bu nedenle kesin eşitlik içermeyen bir kararlılık kriterinin ortaya konulması ihtiyacı vardır (Bose vd., 1988). Bundan dolayı, kontrol sisteminin kararlılık kriterleri için KDM'in yapısına Routh-Hurwitz kriterinin yanında Lipatov-Sokolov kriteri de (Lipatov ve Sokolov, 1979) dahil edilmiştir (Manabe, 1998). Lipatov'un koşulları, karakteristik polinomun Hurwitz kararlı yada kararsız olduğunun analizi için yalnızca yeterlilik koşullarını verir. Bu anlamda Lipatov-Sokolov kriteri, Routh kriterine göre bir yaklaşıklık kriteri olarak göz önüne alınabilir. Bu kriter, ayrıntılı bir inceleme yapmadan sistemin kararlılığı hakkında yaklaşık bilgiler verir. Ayrıca Lipatov-Sokolov kriterindeki koşullar, KDM'in tasarım parametreleri ile yakından ilişkilidir ve bu parametreler cinsinden kolayca şu şekilde ifade edilmektedir:

- Kararsızlık için gereklilik koşulu:

$$\gamma_i \gamma_{i-1} \leq 1 \quad \exists i \text{ için, } i=2 \sim (n-1). \quad (6a)$$

- Kararlılık için yeterlilik koşulu:

$$\gamma_i \gamma_{i-1} > \sqrt{1.4665} \quad \forall i \text{ için, } i=2 \sim (n-1). \quad (6b)$$

Denklem 6b'den, eğer kararlılık indekslerinin tümü 1.5'den büyük seçilirse kontrol sisteminin kararlılığının garanti altına alındığı açıkça görülmektedir.

KDM'de karakteristik polinomun seçilmesi işlemi için Lipatov-Sokolov kriteri göz önünde bulundurulurak elde edilen Standart Manabe yapısı (Manabe, 1998) kullanılır. Bu yapıda kararlılık indeksleri

$$\gamma_1=2.5, \quad \gamma_i=2 \quad i=2 \sim (n-1), \quad \gamma_0=\gamma_n=\infty \quad (7)$$

olarak seçilir. Yapının en önemli özellikleri şu şekilde özetlenebilir:

1. Standart yapı kullanılarak tasarlanan kontrol sistemine ait basamak fonksiyonu yanıtının aşısız olması,
2. Kapalı çevrimli sistemin birim basamak fonksiyonuna olan yanıtı için yerleşme süresi  $2.5\tau$  civarında olup (Manabe, 1997), diğer yöntemlere göre bu sürenin daha küçük olması,
3. Aynı  $\tau$  ve sıfırıncı mertebeden pay polinomu için standart yapının birim basamak yanıtı, karakteristik polinomun mertebesi ne olursa olsun yaklaşık olarak aynı kalması,
4. Tasarlanan kontrolörün kazanç ve faz sınır payları arzu edilen optimum değerlerde elde edilmesi

Kararlılık indeksleri standart yapıdaki gibi seçildiğinde, kontrol sisteminin dayanıklılığı oldukça iyi olmaktadır. Denklem 7'de verilen standart değerler tasarımcının arzu ettiği davranışın özelliğine göre  $\gamma_i > 1.5\gamma_i^*$  için değiştirilebilir. Bu sayede tasarımcı, karakteristik polinom ile birlikte kontrolör tasarımında bir serbestliğe kavuşmuş olur.

## Tasarım prosedürü

Kontrol sistem tasarımında, genellikle kontrol edilmesi istenen sistemin matematiksel modeli göz önüne alınır. Endüstride kullanılan entegratörlü sistemler genellikle:

$$G(s) = \frac{K}{s} e^{-\theta s} \quad (8a)$$

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} e^{-\theta s} \quad (8b)$$

şeklinde birinci mertebeden yada ikinci mertebeden integratörlü sistem şeklinde modellenirler. Sistemin yapısından da görülebileceği gibi sıfırda bulunan kutup nedeniyle sistemin açık çevrim birim basamak fonksiyonu yanıtı sınırsızdır.

Denklem 8a,b'de verilen matematiksel modeller kullanılarak integratörlü sistemlerin KDM ile kontrolü için genel ve sistematik bir tasarım prosedürü şu şekilde verilebilir:

### 1. Tasarıma başlamadan önce belirlenen bilgiler

**1a.** Zaman gecikmesi için yaklaşık eşdeğerinin kullanılması:

Zaman gecikmesini ifade eden  $e^{-\theta s}$  için:

$$e^{-\theta s} \approx \frac{-\frac{\theta}{2}s + 1}{\frac{\theta}{2}s + 1} \quad (9)$$

şeklinde Padé yaklaşımı kullanılır. Böylece Denklem 8a,b'deki transfer fonksiyonları için

$$G_{es}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-\frac{K\theta}{2}s + K}{\frac{\theta}{2}s^2 + s} \quad (10a)$$

$$G_{es}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-\frac{K\theta}{2}s + K}{\frac{T\theta}{2}s^3 + (T + \frac{\theta}{2})s^2 + s} \quad (10b)$$

şeklinde doğrusal-zamanla değişmeyen bir yaklaşığı elde edilir.

**1b.**  $A(s)$ ,  $B(s)$  ve  $F(s)$  kontrolör polinomlarının seçimi:

KDM polinomsal gösterime sahip bir yöntem olduğundan, sistemin transfer fonksiyonu birbirinden bağımsız iki ayrı polinom olarak düşünülür. Bu polinomlar, mertebesi  $m$  olan  $N(s)$  pay polinomu ve mertebesi  $r$  olan  $D(s)$  payda polinomudur ( $m \leq r$ ). Buna göre sırası ile mertebeleri  $p$  ve  $q$  olan  $A(s)$  ve  $B(s)$  kontrolör polinomları ise:

$$A(s) = \sum_{i=0}^p l_i s^i \quad \text{ve} \quad B(s) = \sum_{i=0}^q k_i s^i \quad (11)$$

biçiminde olmalıdır. Bu noktada, seçilecek olan polinomların mertebesi önem kazanmaktadır. Bunu belirleyen en önemli etmen ise sisteme etkileyen bir bozucu işaretin varlığı ve varsa türüdür. Tablo 1'de kontrolör polinomlarının seçimine ait bilgiler verilmiştir. Denklem 1'den faydalanarak oluşturulan bu bilgiler, bozucu işareti tamamen söndürerek istenilen zaman yanıtını elde edecek şekilde düzenlenmiştir. Tabloda sisteme etkileyen bozucu işaretin türüne göre, kullanılacak olan en düşük mertebeden kontrolör polinomlarının seçimi önerilir. Bozucu işareti tamamen etkisiz kılmak için kontrolör polinomunun yapısına ilişkin gerekli koşullar tabloda üçüncü satırda verilmiştir. En alt satırda ise, sonuçta elde edilecek olan kontrol sistemine ait karakteristik polinomun mertebesi verilmiştir.

Tablo 1. Değişik bozucu türleri göz önüne alınarak  $A(s)$  ve  $B(s)$  kontrolörlerinin seçimi

	Bozucu yok	Basamak Tipi	Rampa tipi	Darbe / Sinüs tipi
mer {A}	$r-1$	$r$	$r+1$	$r-1$
mer {B}	$r-1$	$r$	$r+1$	$r-1$
koşul	-	$l_0=0$	$l_0=l_1=0$	-
mer {P}	$2r-1$	$2r$	$2r+1$	$2r-1$

Endüstride bir sisteme etkileyen bozucu işareti tek bir türden olmayabilir. Örneğin sisteme çalışma anında, bazı zamanlarda basamak türünde ve bazı zamanlarda ise rampa türünde bozucu işaretler etkiyebilir. Bu durumda bu sistemin kontrolü ve bozucu işaretin tam olarak söndürülebilmesi için tasarımcının, tablodan en yüksek mertebeden polinom gerektiren rampa tipine göre kontrolör polinomlarını seçmesi gerekmektedir.

$F(s)$  polinomu ise aslında bir sabit değer olup:

$$F(s) = (P(s)/N(s))\Big|_{s=0}, \quad (12)$$

şeklinde seçilir. Böylece kapalı çevrimli sistemin kalıcı hal yanıtında meydana gelebilecek olan kalıcı hal hatası giderilmiş olur.

**1c. Tasarım için anahtar parametrelerin seçilmesi:**

- Eşdeğer zaman sabitinin seçilmesi: KDM tekniği ile kontrol sisteminin tasarımına başlamadan önce, istenilen birim basamak fonksiyonu yanıtı için yerleşme süresinin değeri ( $t_s$ ) saptanmalıdır. Tasarımda temel olarak standart Manabe formu kullanıldığından yerleşme süresi ile eşdeğer zaman sabiti arasındaki ilişki göz önüne alınır. Buna göre eşdeğer zaman sabiti  $\tau = t_s/2.5$  olarak belirlenir.

- Kararlılık indeksi ve kararlılık sınır indeksinin seçilmesi: Tasarımda Manabe formu kullanıldığından, kararlılık indeksi Denklem 7'de verilen standart değerlere göre seçilir. Kısım 2.2'de belirtildiği gibi istenilen davranış özelliğine göre  $\gamma_i > 1.5\gamma_i^*$  için bu değerler değiştirilebilir. Kararlılık sınır indeksi ise Denklem 3c ile belirlenir.

## 2. Tasarım sırasında kontrolör katsayılarının hesaplanması

KDM'de kontrolör polinomlarının hesaplanması için temel olarak kutup-yerleştirme yönteminden faydalanılmaktadır. Buna göre önce 1b maddesinde anlatıldığı gibi Denklem 11 ve Tablo 1'deki bilgiler ile belirlenen kontrolör polinomları, Denklem 2'de yerine konularak  $k_i$  ve  $l_i$  parametrelerine bağlı bir polinom elde edilir. Daha sonra 1c maddesinde belirlenen tasarım parametreleri Denklem 5'te yerine konularak bir hedef polinom ( $P_{hedef}(s)$ ) belirlenir. Bu iki polinom birbirleri ile eşitlenerek

$$A(s)D(s) + B(s)N(s) = P_{hedef}(s) \quad (13)$$

şeklinde Diophantine eşitliği elde edilmiş olur. Daha sonra bu denklem:

$$[C]_{sxs} \begin{bmatrix} l_i \\ k_i \end{bmatrix}_{sx1} = [a_i]_{sx1} \quad (14)$$

şeklinde Sylvester matris formuna dönüştürülür ( $s=p+r$ ). Burada  $l_i$  ve  $k_i$ 'lerden oluşan vektör bilinmeyen kontrolör parametrelerini, C matrisi kontrolör parametrelerinin katsayılarını ve  $a_i$ 'lerden oluşan vektör ise arzu edilen hedef polinomun katsayılarını ifade eder. Bu şekilde s bilinmeyenli denklem sistemi, basit bir matris işlemi ile kolayca çözümlenerek kontrolör parametreleri elde edilmiş olur. Denklem 1 ile verilen kapalı çevrimli sistemin transfer fonksiyonunu tamamen elde etmek için pay kısmındaki  $F(s)$  polinomu ise Denklem 12 yardımı ile belirlenir. Bu şekilde kontrol sistemi son şeklini almış olur.

## 3. Tasarım sonrası yapılan işlemler

Bu kısımda Şekil 1'de verilen ve uygulamada gerçekleştirme işleminde kullanılacak olan kontrol sistemi simüle edilerek kontrol işareti için doyum seviyesinin kontrolü test edilir. KDM'de eşdeğer zaman sabiti  $\tau$  ile kontrol işareti arasında kapalı bir ilişki vardır. Eğer  $\tau$  büyürse zaman yanıtı yavaşlamakta ve buna bağlı olarak kontrol işaretinin genliği küçülmektedir. Tam tersine  $\tau$  küçülürse zaman yanıtı hızlanmakta ve kontrol işaretinin genliği büyümektedir. Buna göre, eğer kontrol işareti doyuma gidiyorsa 1c maddesine dönülüp  $\tau$  yeterince artırılır ve işlemler tekrar edilir. Aynı şekilde  $|u(t)|$  çok küçükse  $\tau$  arzu edilen miktarda küçültülerek sistem yanıtı hızlandırılabilir.

Verilen tasarım prosedürünün verimliliğini göstermek için bundan sonraki kısımda bir tasarım uygulaması gerçekleştirilecektir.

## Tasarım uygulaması

Birinci mertebeden zaman gecikmeli bir sistemin transfer fonksiyonu:

$$G(s) = \frac{0.0506}{s} e^{-6s} \quad (15)$$

şeklinde verilsin. Sisteme  $t=150$  s'de ve genliği 0.5 olan basamak fonksiyonu şeklinde bir bozucu işaret uygulanmaktadır. Buna göre sistemin zaman yanıtı özellikleri göz önünde bulundularak mümkün olan en iyi şekilde kontrol edilmesi amaçlanmaktadır.

Bu sistem daha önce Tyreus ve Luyben (1992) ile Tan ve diğerleri (1998) tarafından değişik prosedürlere sahip PI kontrolör, Wang ve Cluett (1997) tarafından ise PID kontrolör yardımı ile kontrol edilmiştir. Burada bu üç yöntem ile elde edilen kontrol sistem davranışı göz önüne alınarak bir KDM kontrolörü tasarlanacak ve elde edilecek olan KDM kontrol sisteminin davranışı adı geçen üç kontrol sisteminin davranışı ile karşılaştırılacaktır.

Transfer fonksiyonu:

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \quad (16)$$

şeklinde tanımlanan PI ( $T_d=0$ ) ve PID kontrolör için kontrolör parametrelerini Tan ve diğerleri  $K_p=1.674$ ,  $T_i=24.86$  olarak hesaplamış, Tyreus ve Luyben  $K_p=1.604$ ,  $T_i=52.5$  şeklinde belirlemiştir. Wang ve Cluett ise  $K_p=1.803$ ,  $T_i=24.07$  ve  $T_d=1.323$  değerlerini kullanmıştır.

Yukarıda verilen üç kontrolörün zaman yanıtı özellikleri (özellikle yerleşme süresi ve kontrol işaretinin genliği) göz önünde bulundurularak KDM tasarım prosedürü aşağıdaki gibi uygulanmıştır:

### 1. Tasarıma başlamadan önce belirlenen bilgiler

**1a.** Zaman gecikmesini ifade eden  $e^{-6s}$  için:

$$e^{-6s} \approx \frac{-3s+1}{3s+1} \quad (17)$$

şeklinde Pade dönüşümü kullanılarak:

$$G_{es}(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{-0.1518s+0.0506}{3s^2+s} \quad (18)$$

şeklinde doğrusal-zamanla değişmeyen sistem eşdeğeri elde edilir.

**1b.** Kontrol edilmesi istenen sisteme ait transfer fonksiyonu polinomsal formda

$$N(s) = -0.1518s + 0.0506 \quad (19a)$$

$$D(s) = 3s^2 + s \quad (19b)$$

olarak göz önüne alınır. Sistemin mertebesi 2 ve sisteme etkiyen bozucu işareti basamak fonksiyonu şeklinde olduğundan, Tablo 1'de verilen bilgiler göz önüne alınarak kontrolör polinomlarının mertebesi ve tipi belirlenir. Buna göre  $A(s)$  ve  $B(s)$  polinomlarının mertebesi 2 olarak seçilmelidir. Ayrıca bozucu işareti söndürebilmek için  $l_0=0$  kabul edilerek  $A(s)$  polinomu integrator içeren bir forma dönüştürülür. Buna göre  $A(s)$  ve  $B(s)$  kontrolör polinomları

$$A(s) = l_2 s^2 + l_1 s \quad (20a)$$

$$B(s) = k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \quad (20b)$$

şeklinde belirlenmiş olur.

**1c.** Ele alınan üç PID tabanlı kontrol sistemine ait yerleşme süreleri ve kontrol işaretinin genlikleri göz önünde bulundurularak, KDM kontrol sistemi için hedef yerleşme süresi yaklaşık 40 s olarak belirlenmiştir. Yerleşme süresi ile eşdeğer zaman sabiti arasındaki ilişki yaklaşık olarak  $t_s \approx 2.5\tau$  olarak verildiğinden  $\tau$ ,  $40/2.5 = 16$  olarak seçilmiştir. Yapılan çalışma sonucu daha uygun zaman yanıtı elde etmek için kararlılık indeksi ise standart Manabe formundan biraz farklı seçilerek  $\gamma_i = \{2.6, 2.7, 4\}$  şeklinde belirlenmiştir

### 2. Tasarım sırasında polinom katsayılarının hesaplanması

Denklem 20a ve b'de kısmen belirlenen kontrolör polinomları Denklem 2'de yerine konularak:

$$P(s) = 3l_2 s^4 + (l_2 + 3l_1 - 0.1518k_2) s^3 + (l_1 - 0.1518k_1 + 0.05k_2) s^2 + (-0.1518k_0 + 0.05k_1) s + 0.05k_0 \quad (21)$$

elde edilir. Daha sonra 1c maddesinde belirlenen tasarım parametreleri Denklem 5'te yerine konularak

$$P_{hedef}(s) = 29054s^4 + 33862s^3 + 10617s^2 + 16s + 1 \quad (22)$$

şeklinde bir hedef polinom belirlenir.  $l_i$  ve  $k_i$  parametrelerini hesaplayabilmek için Denklem 21 ve 22 birbirine eşitlenerek dört bilinmeyenli bir denklem sistemi elde edilir. Buradan bilinmeyen katsayılar hesaplanarak kontrolör polinomları:

$$A(s) = 96.847s^2 + 122.13s \quad (23a)$$

$$B(s) = 820.9s^2 + 375.5s + 19.763 \quad (23b)$$

şeklinde hesaplanır.  $F(s)$  referans pay polinomu ise Denklem 12'den

$$F(s) = P(s)/N(s)|_{s=0} = 19.763 \quad (24c)$$

olarak hesaplanır.

### 3. Tasarım sonrası yapılan işlemler

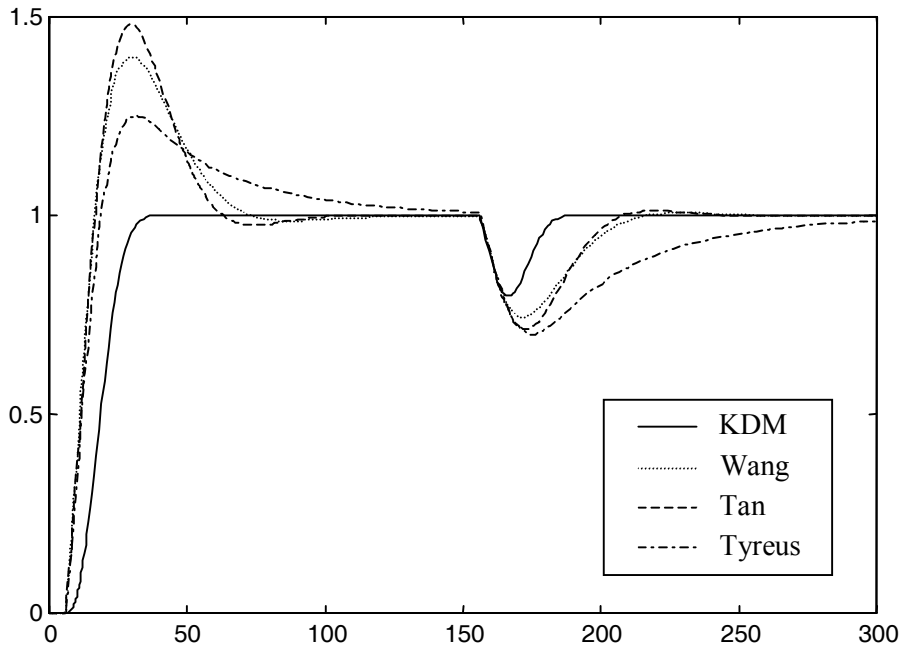
Bu kısımda tasarlanan kontrol sisteminin arzu edilen davranışı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Aşağıda, KDM ile tasarlanan kontrol sisteminin davranışı diğer üç kontrol sistemi ile karşılaştırmalı olarak verilerek bir kıyaslama yapılacaktır:

Dört farklı yöntem göz önüne alınarak tasarlanan kontrol sistemine ait birim basamak fonk-

siyonu yanıtları Şekil 2'de verilmiştir. Şekilden aşım, yerleşme süresi ve bozucu işaretli söndürme özellikleri bakımından KDM kontrolörün daha başarılı olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 2'de her bir kontrol yöntemi için zaman yanıtı davranış değerleri verilmiştir.

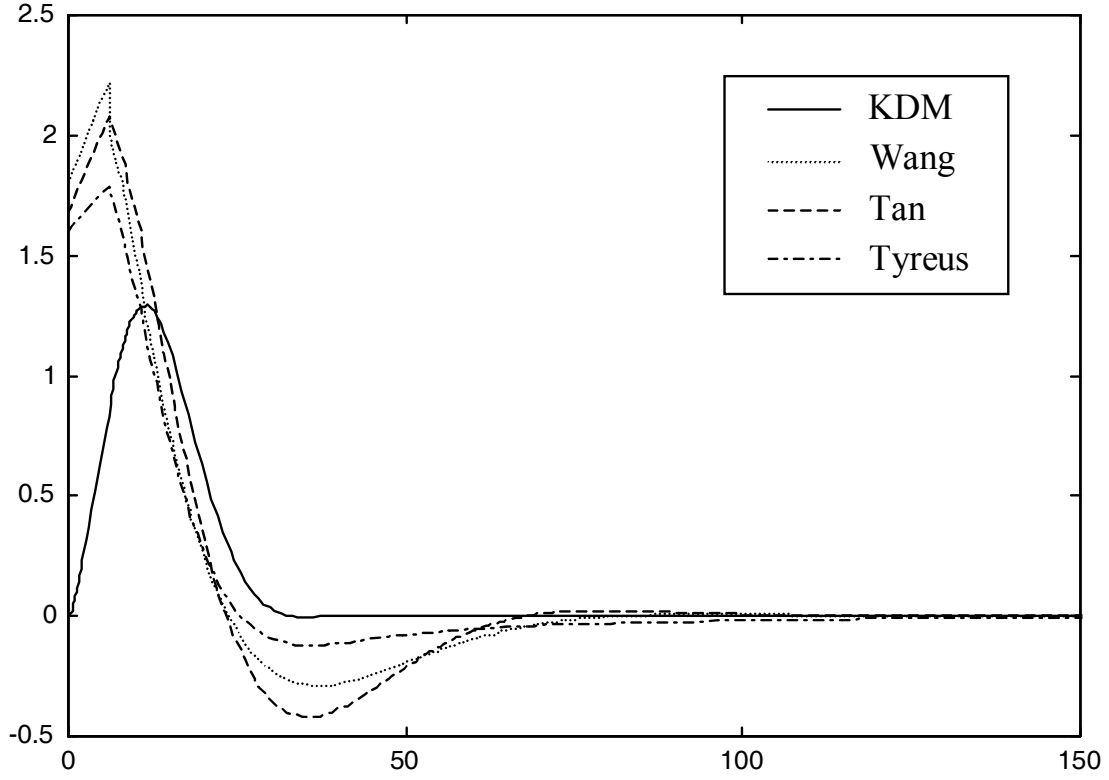
Kontrol sisteminin ürettiği kontrol işareti eğrileri Şekil 3'te verilmiştir. Şekilde PI ve PID kontrolörlerin daha büyük genlikli kontrol işaretine sahip oldukları görülmektedir. KDM kontrolör ile elde edilen kontrol işaretinin genliği ise daha küçüktür ve daha kısa bir zamanda kararlı hale dönmektedir. Şekil 4'te ise Denklem 15'de verilen sistemin kazanç değerinde çalışma sırasında meydana gelebilecek  $\pm 10\%$ luk parametre değişimlerine karşı elde edilen birim basamak fonksiyonu yanıtları verilmiştir. Şekilden KDM kontrol sisteminin, parametre değişimlerine karşı daha dayanıklı olduğu görülmektedir. Çünkü KDM'e ait eğriler genel olarak yerleşme süresi için izin verilen bölge içinde kalmıştır.

Sonuç olarak dört ayrı yöntem için elde edilen kontrolör ve kapalı çevrimli sisteminin zaman yanıtları göz önüne alındığında KDM'in diğer üç PID tabanlı yöntemle göre daha başarılı ve daha üstün olduğu görülmektedir.

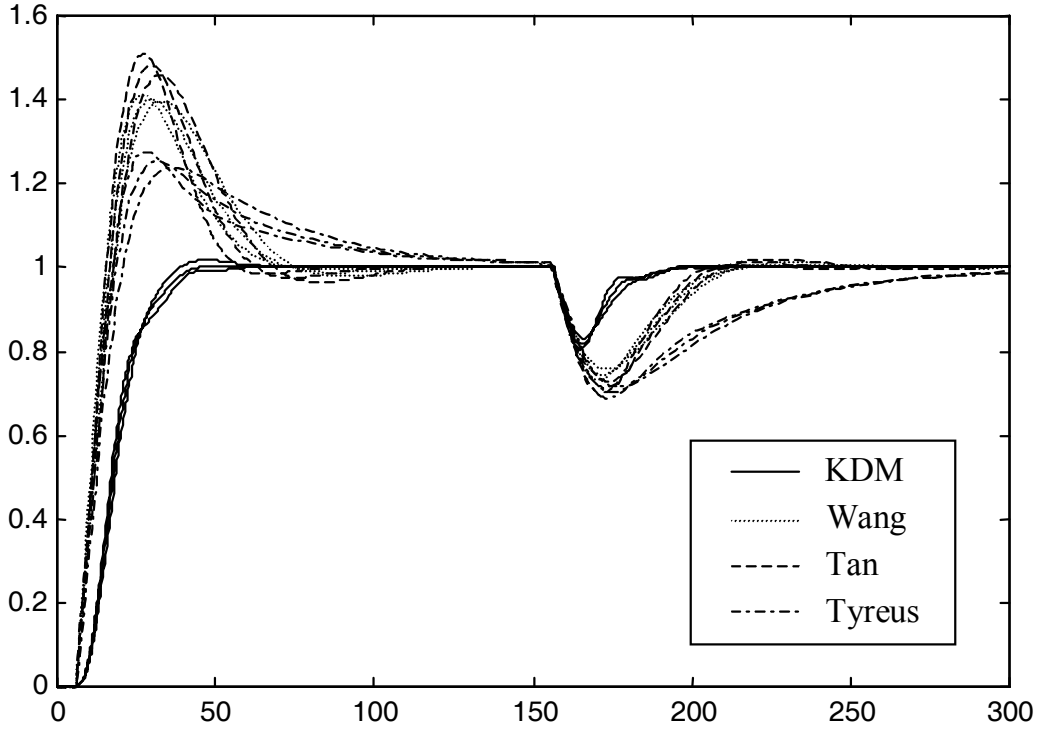


Şekil 2. Kontrol sistemlerine ait birim basamak fonksiyonu yanıtları





Şekil 3. Kontrol sistemlerinin ürettikleri kontrol işaretleri



Şekil 4. Sistemin kazanç parametresinde nominal değer ve bu değerde meydana gelen  $\pm\%10$  parametre değişimi için kontrol sistemlerinin birim basamak fonksiyonu yanıtları

Tablo 2. Şekil 2’de verilen zaman yanıtı eğrilerine ait davranış değerleri

	Yerleşme Süresi (s)	% Maksimum aşım
Tyreus PI	127	25
Tan PI	80	48
Wang PID	67	40
KDM	32	-

## Sonuçlar

Bu çalışmada, doğrusal kontrolör polinomlarını kullanan Katsayı Diyagram Metodu ile yapı-sında integratör bulunan sistemlerin kontrolü için bir tasarım prosedürü verilmiştir. Bu prosedürde temel nokta, gecikme elemanı yerine Padé yaklaşımının kullanılması ve KDM tasarım parametrelerinin uygun bir şekilde seçilerek kontrol işleminin gerçekleştirilmesidir. Verilen prosedür, bu tür sistemlerin kontrolünde kullanılan diğer kontrol tekniklerine göre oldukça kolay, sistematik ve açıktır. Verilen karşılaştırmalı tasarım örneğinde, bu prosedürün ne kadar başarılı bir şekilde ortaya konulduğu gösterilmiştir.

## Kaynaklar

- Bose, N.K., Jury, E.I. ve Zeheb, E., (1988). On robust Hurwitz and Schur polynomials, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 33, 1166-1168.
- Hamamcı S.E., Kaya, İ. ve Atherton, D.P., (2001). Smith Predictor Design by CDM, *ECC’01 European Control Conference*, Seminário de Vilar, Porto, Portugal.
- Hamamcı, S.E., (2002). Katsayı Diyagram Metodu’nun Özel Durumlara ve ÇGÇÇ (MIMO) Sistemlere

- Uygulanması, *Doktora Tezi*, Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Elazığ.
- Hamamcı, S.E., Köksal, M. ve Manabe, S., (2002). Robust Position Control of a Radar Antenna with the Coefficient Diagram Method. *The Proceedings of the ASCC’02 The 4th Asian Control Conference*, Singapore.
- Lipatov, A.V. ve Sokolov, N., (1979). Some Sufficient Conditions for Stability and Instability of Continuous Linear Stationary Systems, *Automation and Remote Control*, 39, 1285-1291.
- Majhi, S. ve Atherton, D.P., (1999). Autotuning and Controller Design for Processes with Small Time Delays, *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 146, 5, 415-425.
- Manabe, S., (1994). A Low Cost Inverted Pendulum System for Control System Education, *The 3<sup>rd</sup> IFAC Symposium on advances in Control Education*, Tokyo.
- Manabe, S., (1997). The Application of Coefficient Diagram Method to ACC Benchmark problem, *2<sup>nd</sup> Asian Control Conference*, Seoul.
- Manabe, S., (1998). Coefficient Diagram Method, *14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Seoul.
- Manabe, S., ve Kim, Y.C., (2000). Recent Development of Coefficient Diagram Method, *ASSC’2000 3rd Asian Control Conference*, Shanghai.
- Tan, W., Liu, J. ve Tam, P.K.S. (1998). PID Tuning Based on loop-shaping Hinf Control, *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 145, 6, 485-490.
- Tyreus, B.D. ve Luyben, W.L., (1992). Tuning PI Controllers for Integral/Dead Time Processes, *Industrial Engineering and Chemistry Research*, 31, 2625-2628.
- Wang, L. ve Cluett, W.R., (1997). Tuning PID Controllers for Integrating Processes, *IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 144, 5, 385-392.