itüdergisi/***d***
mühendislik
Cilt:3, Sayı:6, 25-32
Aralık 2004

Dinamik durum geribeslemesi ile ayrık H_∞ model eşleme problemi

Murat AKIN[*], **Leyla GÖREN**

İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi, Elektrik Mühendisliği Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada bir ön kontrolörün eşdeğeri olan dinamik durum geribeslemesi ile ayrık H_∞ model eşleme probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri yaklaşımı ile çözümü amaçlanmıştır. Ayrık H_∞ model eşleme problemi, ayrık H_∞ optimal kontrol probleminin özel bir halidir. Bu nedenle ayrık H_∞ optimal kontrol probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri ile elde edilen çözümü ayrık H_∞ model eşleme probleminin çözülmesi için kullanılabilir. Makalede ayrık H_∞ model eşleme probleminin dinamik durum geribeslemesi ile çözümünün tek doğrusal matris eşitsizliğine indirgenebildiği gösterilmiş ve kontrolör tasarımı için gereken sentez teoremi ve algoritma verilmiştir.
Anahtar Kelimeler: *H_∞ kontrol, H_∞ model eşleme problemi, doğrusal matris eşitsizlikleri.*

Discrete H_∞ model matching problem by dynamic state feedback

Abstract

The model matching problem is one of the most familiar problems in the control theory. Let $T_m(z)$ and $T(z)$ be stable and proper transfer matrices. The discrete H_∞ model matching problem is to find a controller transfer matrix $R(z)$ which is stable and causal, to minimize the H_∞ norm of $T_m(z)-T(z)R(z)$. The interpretation is this: $T_m(z)$ and $T(z)$ are given as the model and the given system transfer matrices, respectively. Thus, the closed-loop performance $T(z)R(z)$ approximates the desired performance $T_m(z)$. In this paper, we consider the discrete H_∞ model matching problem with dynamic state feedback in the sense of H_∞ optimality criterion by using linear matrix inequalities approach. The main contribution could briefly be explained as to reformulate the discrete H_∞ model matching problem as a special discrete H_∞ optimal control problem in the formulation of linear matrix inequality, to derive a solvability condition for this special case and to give a design procedure for the controller of the discrete H_∞ model matching problem. It may be noted that the linear matrix inequality based parameterization of the controller provides the best performance of the discrete H_∞ model matching problem in the sense of H_∞ and the controller can be determined through the solution of only one linear matrix inequality.
Keywords: *H_∞ control, H_∞ model matching problem, linear matrix inequalities.*

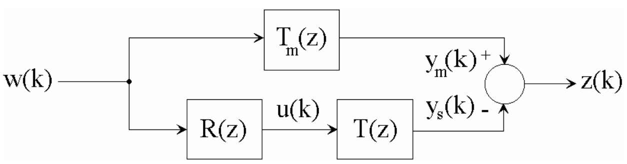
[*]Yazışmaların yapılacağı yazar: Murat AKIN. murakin@elk.itu.edu.tr; Tel: (216) 445 06 60.
Bu makale,birinci yazar tarafından İTÜ Elektrik-Elektronik Fakültesi'nde tamamlanmış olan "H∞ model eşleme probleminin lineer matris eşitsizlikleri yaklaşımı ile çözümü" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 18.06.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 30.07.2003 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2005 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

$T_m(z) \in RH_\infty$ ve $T(z) \in RH_\infty$ olan yani kararlı transfer fonksiyonları matrisleri olsun. Burada T(z), kontrol edilmek istenen sistemin açık çevrim transfer fonksiyonları matrisi, $T_m(z)$ ise kontrol edilen sisteme kapalı çevrimli durumda kazandırmak istediğimiz davranış ölçütlerini sağlayan yani uygun sıfır-kutup dağılımına sahip model sistemin transfer fonksiyonları matrisidir. O halde aşağıdaki gibi tanımlandığı biçimiyle;

$$\gamma_{opt} = \inf_{R(z) \in RH_\infty} \| T_m(z) - T(z)R(z) \|_\infty \qquad (1)$$

bir γ_{opt} aramak ayrık H_∞ model eşleme problemi olarak tanımlanır. Yani bir R(z) kontrolörü yardımıyla T(z), $T_m(z)$'ye γ_{opt}'in büyüklüğüne göre eşlenmektedir: (Şekil 1).



Şekil 1. Ayrık H_∞ model eşleme problemine ait blok diyagramı

Bir transfer fonksiyonları matrisinin ayrık H_∞ normu;

$$\| G(z) \|_\infty = \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} \sigma_{max}(G(e^{j\omega})) \qquad (2)$$

biçiminde tanımlanır.

H_∞ optimal kontrol probleminin ilk çözümü, Francis (1987) ile Francis ve Doyle (1987)'de yer almıştır. Daha sonra problem, Doyle ve diğerleri (1989)'da Riccati denklemleri ile, Hung (1989)'da model eşleme probleminden yararlanılarak ve Green ve diğerleri (1990)'da da J spektral faktörizasyon ile model eşleme problemi kullanılarak çözülmüştür.

H_∞ model eşleme problemi, Nevanlinna-Pick Problemi'ne (Doyle vd., 1992) veya Nehari Problemi'ne, (Francis, 1987; Francis ve Doyle, 1987), indirgenerek çözülebilmekte veya daha farklı çalışmalarla da incelenebilmektedir, (Hung, 1989). İlk iki çalışmanın ortak özelliği problemlerin yapısı gereği önce γ_{opt} bulunmakta, sonra kontrolör tasarımına geçilmektedir. Ancak her iki çalışmada da bazı sınırlayıcı taraflar söz konusudur:

a) Şekil 1'de görülen H_∞ model eşleme probleminin Nevanlinna-Pick Problemi'ne indirgenerek yapılan çözümü aşağıdaki kısıtlamalar altında geçerlidir:

i) Sistemler tek girişli tek çıkışlıdır,

ii) kontrol edilmek istenen sistem ve model sistem kararlıdır,

iii) kontrol edilmek istenen sistemin sürekli H_∞ model eşleme problemi için imajiner eksen üzerinde sıfırı olmamalı, sağ yarı açık s düzleminde ise en az 1 adet sıfırı olmalıdır.

b) Şekil 1'de görülen H_∞ model eşleme probleminin Nehari Problemi'ne indirgenerek yapılan çözümü aşağıdaki kısıtlamalar altında geçerlidir:

i) Kontrol edilmek istenen sistem ve model sistem kararlıdır,

ii) kontrol edilmek istenen sistemin sürekli H_∞ model eşleme problemi için sağ yarı açık s düzleminde en az 1 adet sıfırı olmalıdır.

Doğrusal matris eşitsizliklerinin Aleksandr Mikhailovich Lyapunov'un kararlılık analizinde (1890) ilk kez "$A^*X+XA<0$ ve $X>0$" şeklinde ortaya çıktığı söylenebilir (Boyd vd., 1994). Doğrusal matris eşitsizliklerinin sayısal çözümü için Nesterov ve Nemirovski (1988) tarafından geliştirilen yöntem, H_∞ optimal kontrol probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri temelli çözümünün elde edilmesini ve konunun gelişmesini sağlayan en önemli etken olmuştur.

Pascal Gahinet, Pierre Apkarian, Mahmoud Chilali ve Carsten Scherer'in çalışmaları (Chilali ve Gahinet, 1996a; Chilali vd., 1996b; Gahinet ve

Apkarian, 1994a) H_∞ optimal kontrol, H_2 optimal kontrol, kutup yerleştirme, dayanıklı (robust) kutup yerleştirme vb. bazı kontrol problemlerinin doğrusal matris eşitsizlikleri ile çözülebileceğini gösterdi.

1995'te Pascal Gahinet, Arkadi Nemirovski, Alan J. Laub ve Mahmoud Chilali'nin bir araya gelerek MATLAB programının içine The LMI Control Toolbox'ını eklemeleri (Gahinet vd., 1994b) ve yukarıdaki kontrol problemlerini ayrı ayrı veya bir arada ele alıp sayısal olarak çözmeleri bu konudaki son gelişmeleri oluşturur.

H_∞ model eşleme probleminin sürekli sistemler için dinamik durum geribeslemesi ile çözümü ve çok amaçlı H_∞ kontrol problemine uygulanması Gören ve Akın, (2002)'de; ayrık sistemler için statik durum geribeslemesi ile çözümü ise Akın ve Gören, (2002)'de yer almıştır.

Bu çalışmada, ayrık H_∞ model eşleme problemi, önce ayrık H_∞ optimal kontrol problemine indirgenmekte, daha sonra doğrusal matris eşitsizlikleri ile ayrık H_∞ optimal kontrol probleminin çözümü için geliştirilen sentez teoremi kullanılmakta ve ayrık H_∞ model eşleme probleminin çözümünün 3 doğrusal matris eşitsizliğinden tek doğrusal matris eşitsizliğine indirgenebildiği gösterilmektedir.

Elbette ayrık H_∞ model eşleme problemi;

$$R(z)=T_m^{-1}(z)T(z)\notin RH_\infty \qquad (3)$$

olduğu durum için anlamlıdır.

Çalışmanın her yerinde, KerM ve ImM, sırasıyla M matrisinin sıfır ve görüntü uzaylarını; N^*, N matrisinin kompleks eşlenik transpozesini ve P>0 ise P matrisinin pozitif tanımlı (positive definite) olduğunu göstermektedir.

Ayrık H_∞ optimal kontrol problemi

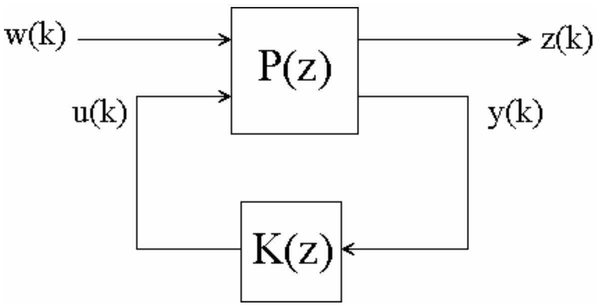
P(z), Şekil 2'de görülen ve durum uzayı modeli aşağıdaki gibi verilmiş doğrusal, parametreleri zamanla değişmeyen, nedensel, deterministik ve ayrık bir sistem olsun;

$$\underline{x}(k+1)=\underline{A}\underline{x}(k)+B_1w(k)+B_2u(k) \qquad (4)$$

$$z(k)=C_1\underline{x}(k)+D_{11}w(k)+D_{12}u(k) \qquad (5)$$

$$y(k)=C_2\underline{x}(k)+D_{21}w(k)+D_{22}u(k). \qquad (6)$$

Burada $\underline{x}(k)\in R^n$, durum vektörünü; $u(k)\in R^{m_2}$, kontrol işaretlerini; $w(k)\in R^{m_1}$, bozucu, gürültü veya referans gibi tüm dış kaynaklı girişleri; $y(k)\in R^{p_2}$, geri besleme işaretlerini ve $z(k)\in R^{p_1}$, kontrol edilmek istenen büyüklükleri göstermektedir. K(z) ise dinamik kontrolöre ait transfer fonksiyonları matrisidir.



Şekil 2. H_∞ optimal kontrol problemine ait standart blok diyagramı

Yukarıdaki şekilden;

$$P(z)=\begin{bmatrix} P_{11}(z) & P_{12}(z) \\ P_{21}(z) & P_{22}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} (zI-\underline{A})^{-1}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

yazılabilir. Bu durumda w(k)'dan z(k)'ya kapalı çevrim transfer fonksiyonları matrisi ise şu şekilde olacaktır;

$$T_{zw}(z)=P_{11}(z)+P_{12}(z)K(z)(I-P_{22}(z)K(z))^{-1}P_{21}(z) \qquad (8)$$

Şekil 2'deki sistem göz önüne alınacak olursa:

a) kapalı çevrimli sistem iç kararlı,

b) $\|T_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$

olacak şekilde bir kontrolör bulmak ayrık suboptimal H_∞ kontrol problemi, γ'yı minimum yapan kontrolörü bulmak ise ayrık H_∞ optimal kontrol problemi olarak tanımlanır.

Aşağıdaki lemma yukarıdaki ifadelerden hareketle bulunmuş ayrık H_∞ optimal kontrol probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri ile çözümünü veren sentez teoremidir ve Gahinet ve Apkarian (1994a)'da yer almıştır.

Lemma.1 Ayrık H_∞ optimal kontrol problemini çözen yani $\|T_{zw}(z)\|_\infty < \gamma$ ve kapalı çevrimli sistemi iç kararlı yapan $n_K \geq n$ boyutlu bir kontrolörün varlığı için aşağıdaki doğrusal matris eşitsizliklerini aynı anda sağlayan X>0 ve Y>0 matrislerinin bulunması gerek ve yeterdir;

$$\begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \underline{A}^* X \underline{A} - X & \underline{A}^* X B_1 & C_1^* \\ B_1^* X \underline{A} & -\gamma I_{m_1} + B_1^* X B_1 & D_{11}^* \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I_{p_1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} N_o & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix} < 0 \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \underline{A} Y \underline{A}^* - Y & \underline{A} Y C_1^* & B_1 \\ C_1 Y \underline{A}^* & -\gamma I_{p_1} + C_1 Y C_1^* & D_{11} \\ B_1^* & D_{11}^* & -\gamma I_{m_1} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 . \quad (11)$$

N_o ve N_c,

$$\operatorname{Im} N_o = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\operatorname{Im} N_c = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} B_2^* & D_{12}^* \end{bmatrix} \quad (13)$$

özelliklerini sağlayan tam kolon ranklı matrislerdir. ($\underline{A}$,B_2,C_2) kararlılaştırılabilir, denetlenebilirdir ve $D_{22}=0$.

İspat: Gahinet ve Apkarian (1994a).

$R(z) \in RH_\infty$ özelliğinde olan her ön kontrolöre eşdeğer bir dinamik durum geribeslemesi vardır. H_∞ model eşleme probleminin çözümü olarak bulunan kontrolörün, geribesleme yapısı kulanılarak gerçeklenmesi bu eşdeğerlikten yararlanılarak yapılır, Kucera (1991).

Ayrık H_∞ model eşleme probleminin ayrık H_∞ optimal kontrol problemine indirgenmesi

Şekil 1'deki ayrık H_∞ model eşleme problemini gözönüne alalım: (A,B,C,D) kontrol edilmek istenen sistemin yani T(z)'nin, (F,G,H,J) ise model sistemin yani $T_m(z)$'nin herhangi durum uzayı modeli olsun;

$$T(z): \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) & (14) \\ y_s(k) = Cx(k) + Du(k) & (15) \end{cases}$$

$$T_m(z): \begin{cases} q(k+1) = Fq(k) + Gw(k) & (16) \\ y_m(k) = Hq(k) + Jw(k). & (17) \end{cases}$$

Yukarıda $x(k) \in R^{n_s}$, $q(k) \in R^{n_m}$, $u(k) \in R^m$, $w(k) \in R^m$, $y_s(k) \in R^p$ ve $y_m(k) \in R^p$'dir.

$$U(z)=R(z)W(z) \quad (18)$$

şeklinde kontrol kuralını uygularsak ayrık H_∞ model eşleme problemi, ayrık H_∞ optimal kontrol problemine ait durum uzayı denklemlerine indirgenmiş olur;

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ q(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} w(k) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \quad (19)$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} -C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ q(k) \end{bmatrix} + Jw(k) - Du(k) \quad (20)$$

$$y(k)=w(k) \quad (21)$$

Görüldüğü gibi burada ayrık H_∞ model eşleme problemini çözen kontrolör R(z), ayrık H_∞

optimal kontrol problemini çözen kontrolör K(z) ile aynıdır.

Dinamik durum geribeslemesi ile ayrık H_∞ model eşleme problemini doğrusal matris eşitsizlikleri ile çözen sentez teoremini elde etmeden önce gerekli olan lemmaları tanıt için vermek uygun olur.

Lemma.2 A herhangi bir kare matris ve Q>0 olmak üzere A'nın bütün özdeğerlerinin birim çember içinde bulunması ancak ve ancak $A^*XA-X+Q=0$ ayrık Lyapunov denkleminin;

$$X=\sum_{k=0}^{\infty}(A^*)^k QA^k>0 \tag{22}$$

şeklinde tek çözümünün var olması ile mümkündür.

İspat: Zhou ve diğerleri, (1996).

Lemma.3

$$\begin{bmatrix} P & M \\ M^* & N \end{bmatrix}<0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} N<0, \\ P-MN^{-1}M^*<0 \end{cases} \tag{23}$$

Burada $P-MN^{-1}M^*$ ifadesine N matrisinin Schur complement'i denir.

İspat: Boyd ve diğerleri, (1994).

Lemma.4 (A,B,C,D), $T(z)=D+C(zI-A)^{-1}B$'nin minimal olması gerekmeyen bir gerçeklemesi ise aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

i) $\|D+C(zI-A)^{-1}B\|_\infty<\gamma$ ve A Schur'dur yani A'nın tüm özdeğerleri z düzleminde birim çemberin içindedir.

ii) Aşağıdaki doğrusal matris eşitsizliğini çözen bir X>0 matris vardır;

$$\begin{bmatrix} A^*XA-X & A^*XB & C^* \\ B^*XA & -\gamma I+B^*XB & D^* \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix}<0 \tag{24}$$

iii) Aşağıdaki doğrusal matris eşitsizliğini çözen bir Y>0 matris vardır;

$$\begin{bmatrix} AYA^*-Y & AYC^* & B \\ CYA^* & -\gamma I+CYC^* & D \\ B^* & D^* & -\gamma I \end{bmatrix}<0 \tag{25}$$

İspat: Doyle ve diğerleri, (1991). (ii)'ye Ayrık Sınırlı Reel Lemma, (iii)'ye ise Ayrık Sınırlı Reel Lemma'nın Dual Biçimi denir.

Problemin çözümü

İlk önce, sentez teoreminin ispatını sadeleştirebilmek için kullanılacak aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma.5 A, C, X ve Y herhangi matrisler ve $\gamma\in R$ olsun. Eğer A Schur ise verilen her $\gamma>0$ ve Y>0 çifti için, aşağıdaki eşitsizlikleri aynı anda sağlayan bir X>0 matris her zaman bulunabilir;

$$A^*XA-X+\frac{1}{\gamma}C^*C<0 \tag{26}$$

$$X-Y^{-1}\geq 0. \tag{27}$$

İspat: A Schur olduğundan her $\gamma\in R^+$ için aşağıdaki ayrık Lyapunov denklemini çözen bir $X_0>0$ matris her zaman vardır;

$$A^*X_0A-X_0+\frac{1}{\gamma}C^*C=0 \tag{28}$$

Burada X_0'a, $\left(A,\frac{1}{\sqrt{\gamma}}C\right)$ sisteminin ayrık gözlenebilir Gramian matrisi denir. Lemma.2'den herhangi bir Q>0 matris için;

$$A^*MA-M+Q=0 \tag{29}$$

ayrık Lyapunov denklemini çözen bir M>0 matris vardır. Dolayısıyla $X=X_0+\varepsilon M$ matrisi, birinci eşitsizliği her $\varepsilon\in R^+$ için sağlar. Bir M matrisi ancak ve ancak $M=N^*N$ ve N tekil olmayan (nonsingular) bir matris şeklinde yazılabiliyorsa pozitif tanımlıdır. Bu durumda;

$$X_0+\varepsilon M\geq Y^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon\geq\lambda_{max}[(N^{-1})^*(Y^{-1}-X_0)N^{-1}] \tag{30}$$

İkinci eşitsizliği sağlayan bir $\varepsilon \in R^+$ her zaman bulunabileceğinden ispat tamamlanmış olur.

Dinamik durum geribeslemesi ile ayrık H_∞ model eşleme probleminin doğrusal matris eşitsizlikleri ile çözümünü veren sentez teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem.6 Ayrık H_∞ model eşleme problemini çözen yani $\|T_m(z)-T(z)R(z)\|_\infty<\gamma$ ve kapalı çevrimli sistemi iç kararlı yapan $n_K \geq n$ mertebeli bir R(z) kontrolörünün var olmasının gerek ve yeter şartı aşağıdaki doğrusal matris eşitsizliğini sağlayan bir Y>0 matrisinin bulunmasıdır;

$$\begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^* - Y & \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} -C^* \\ H^* \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ G \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}^* & -\gamma I_p + \begin{pmatrix} -C & H \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} -C^* \\ H^* \end{pmatrix} & J \\ \begin{pmatrix} 0 & G^* \end{pmatrix} & J^* & -\gamma I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_c & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} < 0 \qquad (31)$$

N_c tam kolon ranklıdır öyle ki;

$$\operatorname{Im} N_c = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} B^* & 0_{mxn_m} & -D^* \end{bmatrix} \qquad (32)$$

İspat: (19), (20) ve (21) denklemleri, ayrık H_∞ model eşleme problemini ayrık H_∞ optimal kontrol problemine indirgeyen denklemlerdir. Lemma.1'i bu denklemler için kullanırsak;

$$\operatorname{Im} N_o = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0_{m_1 xn} & I_{m_1} \end{bmatrix} \qquad (33)$$

ve;

$$N_o = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{m_1 xn} \end{bmatrix} \qquad (34)$$

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0_{m_1 xn} & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \underline{A}^* X \underline{A} - X & \underline{A}^* X B_1 & C_1^* \\ B_1^* X \underline{A} & -\gamma I_{m_1} + B_1^* X B_1 & D_{11}^* \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I_{p_1} \end{bmatrix} \qquad (35)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0_{m_1 xn} & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix} < 0$$

Ara işlemler yapılarak, yukarıdaki eşitsizlik aşağıdaki ayrık Lyapunov eşitsizliğine indirgenir;

$$\underline{A}^* X \underline{A} - X + \frac{1}{\gamma} C_1^* C_1 < 0. \qquad (36)$$

Üçüncü eşitsizlik de Schur complement özelliğinden;

$$X - Y^{-1} \geq 0 \qquad (37)$$

şeklinde elde edilir. Lemma.5 kullanıldığında yukarıdaki iki eşitsizliği aynı anda sağlayan bir X>0 matrisin bulunabileceği görülür. Bu durumda (31), (10) doğrusal matris eşitsizliğinin ayrık H_∞ model eşleme problemine ait (19), (20) ve (21) denklemlerinin kullanılmasıyla elde edilmiş halinden başka bir şey değildir.

Görüldüğü gibi Teorem.6'yı ispatlayabilmek için Lemma.1 kullanılmıştır. Lemma.1'in kullanılabilmesi için yani ayrık H_∞ optimal kontrol probleminin dinamik bir çözümünün var olabilmesinin gerek ve yeter şartı ($\underline{A}$,B_2,C_2) kararlılaştırılabilir ve denetlenebilir olmasıdır. Model sistem ile kontrol edilmek istenen sistemin kararlı alınması, ayrık H_∞ model eşleme problemini çözen dinamik bir kontrolörün varlığını garantiler.

Yukarıdaki teorem ayrık H_∞ model eşleme problemini çözen dinamik bir R(z) kontrolörünün varlığı için gerek ve yeterdir. Ancak eşitsizliği çözen minimum γ bir iterasyon işlemiyle bulunacaktır. Aşağıdaki teorem bu iterasyonun nereden başlatılabileceğini göstermektedir.

Teorem.7

$$\gamma_{opt} = \inf_{R(z)\in RH_\infty} \| T_m(z) - T(z)R(z) \|_\infty \le \| T_m(z) \|_\infty \quad (38)$$

İspat: (19), (20) ve (21) denklemlerini kullanırsak;

$$\|D_{11}+C_1(zI-\underline{A})^{-1}B_1\|_\infty \quad (39)$$

$$= \left\| J + \begin{bmatrix} -C & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (zI-A)^{-1} & 0 \\ 0 & (zI-F)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ G \end{bmatrix} \right\|_\infty \quad (40)$$

$$= \|J+H(zI-F)^{-1}G\|_\infty = \|T_m(z)\|_\infty \quad (41)$$

elde edilir. Ayrık Dual Sınırlı Reel Lemma'dan dolayı $\|D_{11}+C_1(zI-\underline{A})^{-1}B_1\|_\infty<\gamma$ ve $\underline{A}$ matrisinin Schur olması için aşağıdaki doğrusal matris eşitsizliğini çözen bir Y>0 matrisinin bulunması gerek ve yeterdir;

$$\begin{bmatrix} \underline{A}Y\underline{A}^* - Y & \underline{A}YC_1^* & B_1 \\ C_1Y\underline{A}^* & -\gamma I + C_1YC_1^* & D_{11} \\ B_1^* & D_{11}^* & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 . \quad (42)$$

$T_m(z)$'nin H_∞ normundan daha büyük γ değerleri için (10) dolayısıyla (31) sağlanmış olur. Teorem.6'nın doğal sonucu olarak $\gamma_{opt} \le \|T_m(z)\|_\infty$ yazılabilir.

Teorem.6 ve Teorem.7 kullanılarak ayrık H_∞ model eşleme problemini çözen dinamik kontrolör tasarımı algoritması verilebilir. Doğrusal matris eşitsizlikleri ile ilgili yapılacak çözümlerde The LMI Control Toolbox'ı (Gahinet vd., 1994b) gibi yazılımlar kullanılır.

Kontrolör tasarım algoritması

Adım.1: γ iterasyonu Teorem.7 gereği $\|T_m(z)\|_\infty$'dan başlatılarak (31)'i sağlayan γ_{opt} ve buna ait bir Y>0 matrisi bulunur.

Adım.2: Adım.1'de bulunan γ_{opt} için;

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}^* X_0 \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} - X_0 + \frac{1}{\gamma_{opt}} \begin{bmatrix} -C^* \\ H^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -C & H \end{bmatrix} = 0 \quad (43)$$

ayrık Lyapunov denklemini çözen bir $X_0>0$ matris elde edilir.

Adım.3:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix}^* M \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & F \end{bmatrix} - M + I = 0 \quad (44)$$

ayrık Lyapunov denklemini çözen bir M>0 matrisi bulunur.

Adım.4: $M=N^*N$'den N matrisi elde edilir.

Adım.5: $\varepsilon \ge \lambda_{max}[(N^{-1})^*(Y^{-1}-X_0)N^{-1}]$ ifadesini sağlayan bir ε seçilir.

Adım.6: Kontrolörün mertebesi $n_K=n$ şeklinde alınır ve

$$X_2X_2^* = X - Y^{-1} = X_0 + \varepsilon M - Y^{-1} \quad (45)$$

ifadesinden $X_2 \in R^{nxn}$ bulunur.

Adım.7:

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} X_0 + \varepsilon M & X_2 \\ X_2^* & I \end{bmatrix} \quad (46)$$

matrisi kullanılarak Ayrık Sınırlı Reel Lemma çözülür ve kontrolörün durum uzayı matrislerinden oluşan

$$\begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix} \quad (47)$$

matrisi elde edilir.

Adım.8:

$$R(s)=K(s)=D_K+C_K(zI-A_K)^{-1}B_K \quad (48)$$

kontrolörü Kucera (1991)'de görülebileceği gibi dinamik durum geribeslemesi ile gerçeklenir.

Sonuçlar

Bu çalışmada, ayrık H_∞ model eşleme problemi önce ayrık H_∞ optimal kontrol problemine indirgenmiş, daha sonra doğrusal matris eşitsizlikleri ile ayrık H_∞ optimal kontrol probleminin çözümü için geliştirilen sentez teoremi kullanılmış ve ardından ayrık H_∞ model eşleme probleminin çözümünün 3 doğrusal matris eşitsizliğinden tek doğrusal matris eşitsizliğine indirgenebildiği gösterilmiştir. Teorem 7 ile de tek doğrusal matris eşitsizliğini çözmek için kullanılacak bir başlangıç değeri verilmiştir.

Kaynaklar

Akın, M. ve Gören, L. (2002). The H_∞ discrete model matching problem by static state feedback, *WSEAS Transactions on Systems*, **1**, 87-93.

Boyd, S., El Ghaoui, L., Feron, E. ve Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, **15**, SIAM.

Chilali, M. ve Gahinet, P. (1996a). H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**, 3, 358-367.

Chilali, M., Gahinet, P. ve Scherer, C. (1996b). Multiobjective output-feedback control via LMI optimization, *Proceedings on IFAC 13th Triennial World Congress*, San Francisco, USA.

Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P. ve Francis, B.A. (1989). State-space solutions to standart H_2 and H_∞ control problems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**, 8, 831-847.

Doyle, J.C., Packard, A. ve Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs and μ, *Proceedings on the IEEE Conference on Decision and Control.*

Doyle, J.C., Francis, B.A. ve Tannenbaum, A.R. (1992). *Feedback Control Theory*, Macmillan Publishing Company.

Francis, B.A. (1987). *A Course in H_∞ Control Theory, No.88, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer-Verlag.

Francis, B.A. ve Doyle, J.C. (1987). Linear control theory with an H_∞ optimality criterion, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **25**, 4, 815-844.

Gahinet, P. ve Apkarian, P. (1994a). A linear matrix inequality approach to H_∞ control, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **4**, 421-448.

Gahinet, P., Nemirovski, A., Laub, A.J. ve Chilali, M. (1994b). The LMI control toolbox, *Proceedings on the IEEE Conference on Decision and Control*, 2038-2041.

Gören, L. ve Akın, M. (2002). A multiobjective H_∞ control problem: Model matching and disturbance rejection, *Proceedings on IFAC 15th Triennial World Congress*.

Green, M., Glover, K., Limebeer, D. ve Doyle, J.C. (1990). A J-Spectral factorization approach to H_∞ control, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **28**, 6, 1350-1371.

Hung, Y.S. (1989). H_∞ optimal control part I, II, *International Journal of Control*, **49**, 4, 1291-1359.

Kucera, V. (1991). *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*, Prentice-Hall International.

Nesterov, Y. ve Nemirovski, A. (1988). A general approach to polynomial-time algorithms design for convex programming, *Technical Report, Cent. Econ. and Math. Inst., USSR Acad. Sci., Moscow, USSR.*

Zhou, K., Doyle, J.C. ve Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*, Prentice-Hall International.