

# Yüksek beton mukavemetli betonarme kirişlerde uygun sonlu eleman boyutları

**Güray ARSLAN\***, **Zekeriya POLAT**

YTÜ İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 34349, Yıldız, İstanbul

## Özet

Açıklık ortasında tekil yüklü betonarme kirişlerde kesme ve eğilme mukavemetleri; doğrusal olmayan (Drucker-Prager akma kriteri) çözüm yöntemleri temel alınarak deneylerle uyumlu tahmin edilebilmektedir. Bu çalışmada; kesme mukavemetini hesaplamak için kiriş ortasından tekil yükü yüklenmiş donatılı, yüksek mukavemetli beton kirişlerde, deney sonuçları ile tutarlı yük-yerdeğiştirme eğrisini veren uygun sonlu eleman boyutları araştırılmıştır. Karşılaştırmaya tabi tutulan deney serilerinde değişkenler; beton basınç mukavemeti, kesme açıklığının kiriş etkili derinliğine oranı ( $a/d$ ) ve enine donatı oranıdır. Kirişler doğrusal olmayan çözümlenmeye tabi tutulmuş ve sonlu eleman boyutlarının uygun değerleri araştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Kesme mukavemeti, boyut etkisi, yüksek mukavemetli beton, kesme donatısı oran, sonlu elemanlar.

## Optimal finite element size in reinforced high-strength concrete beams

### Abstract

Ever since the finite element method was applied to nonlinear problems in the field of reinforced concrete, many researchers have tried to predict the shear and bending strengths of reinforced concrete beams by using various material models for concrete. In this study; to determine shear strength of reinforced high-strength concrete beams with shear span to depth ratios between 1.5 and 2.5, under concentrated loads at midspan, finite element size effect on load carrying capacity has been investigated analytically. In order to obtain more accurate numerical solutions from the finite element simulation of the reinforced high-strength concrete beams, the beams are evaluated for the different mesh size. Providing a larger size than optimum mesh size configuration for the nonlinear analysis, the whole load-deflection behavior of the beams have been analyzed and the main results of the numerical analyses were compared with the results of reinforced high-strength concrete beams experimental results reported in literature (Shin et al. 1999) to demonstrate how accurately the present mesh size predicts the load carrying capacity. The test variables were compressive strength of concrete, the shear span to depth ratio ( $a/d$ ) and vertical shear reinforcement ratio for the comparison. The elasto-plastic analyses of the beams, employing the Drucker-Prager yield criterion for concrete, have been performed and reasonable mesh size has been investigated.

**Keywords:** Shear strength, size effect, high-strength concrete, shear reinforcement ratio, finite element.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Güray Arslan. [aguray@yildiz.edu.tr](mailto:aguray@yildiz.edu.tr); Tel: (212) 259 70 70 dahili: 2738.

Makale metni 29.05.2003 tarihinde dergiye ulaşmış, 20.01.2004 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 30.06.2004 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Malzemenin elastik ötesi davranışını ve yüklemelerinin özelliklerini (statik-dinamik) dikkate alan sayısal yöntemlerle, beton elemanların hesabı, gerçeğe daha yakın yapılabilmektedir. Yükleme ile betonarme yapı elemanlarının hesap ve boyutlandırılmasında gerekli yükler ifade edilmektedir. Beton için önerilen geliştirilmiş malzeme davranış denklemleri (bünye denklemleri) ise, genellikle tek yönlü artan yüklere maruz betonarme elemanların temel karakteristiklerini tanımlayan üç boyutlu gerilme-birim şekil değiştirme ilişkilerini vermektedir. Bünye denklemleri; betonarme elemanların hesabında ihtiyaç duyulan en önemli bağıntılardır. Ancak; betonun doğrusal olmayan davranışına ait matematiksel modellerin oluşturulabilmesi; beton ve donatı çeliği davranışları ile birlikte çelik beton arası aderansın doğru modellenmesini de gerektirir. Betonarme elemanların kompozit davranışının modellenmesinde, her iki malzeme için uygun gerilme-birim şekil değiştirme bağıntıları seçilmelidir. Bu çalışmada; beton ve çelik arasında tam aderansın olduğu varsayılmıştır.

Rebeiz (1999) tarafından  $a/d$ , eğilme donatısı oranı ve beton basınç mukavemetleri göz önüne alınarak göçme ve çatlama kesme mukavemetinin tahmini için deneysel çalışmalar yapılmış; kiriş etkisi ve kemer etkisi arasında davranıştaki fark işaret edilmiştir.  $1 < a/d < 2.5$  olması durumunda; ilk eğik çatlama oluşu sonrası toptan göçmeye kadarki safhada, önemli ölçüde ilave eğik kuvvet taşınabilmektedir (kemer etkisi). Yüksek (derin) kirişlerde gerilmenin bu yeniden dağılımı, mesnetler ve uygulanan yükler arasındaki mesafenin göreceli kısalığından kaynaklanmaktadır.  $a/d \geq 2.5$  olan hallerde ilk eğik çatlak oluşumunu toptan göçme izlemektedir; bu durumlarda çatlama kesme mukavemeti  $v_c$  ve göçme kesme mukavemeti  $v_u$  yaklaşık olarak eşit şiddettedir.

Sonlu elemanlar yöntemi ile çalışan bilgisayar programları; genellikle elastik, doğrusal olmayan elastik ve plastik modeller yardımıyla statik ve dinamik yükler altında çözümleri içermektedir. Malzemelerin bünyesel olarak modellenmesi

amacıyla pek çok matematiksel bağıntı geliştirilmiştir. Söz konusu modeller; plastik, doğrusal olmayan elastik, elasto-plastik, kırılma mekaniği, düzgün yayılı çatlak modeli, hasar modeli, ve mikro çatlak modelleridir (Köksal, 1998). Bu çalışmada, belirli yükler altında betonarme yüksek kirişlerin, LUSAS (2001) programı ile sonlu eleman plastik analizleri yapılmıştır. Analizde, beton için Drucker-Prager, donatı için Tresca akma ve kırılma kriterleri kullanılmıştır. Drucker-Prager malzeme modelinin Von-Mises kriterinin geliştirilmiş şekli olduğu söylenebilir. Drucker-Prager; akma kriteri Von-Mises kriterinde hidrostatik gerilme etkisini ek bir terim olarak dikkate alır. Seçilen eleman tipleri beton için QPM8 (iki boyutlu izoparametrik eleman), donatı için BAR3 (iki boyutlu izoparametrik çubuk eleman)'dır. Kullanılan yüksek mukavemetli betonda en büyük agrega boyutu 13 mm'dir. Malzeme modelinde beton için içsel sürtünme açısı  $37^\circ$ , kohezyon katsayısı 3.02 alınmıştır (Doran vd., 1998).

Eğik çatlama mukavemeti ve nominal kesme mukavemetini hesaplamak için kiriş ortasından tekil yükle yüklenmiş yüksek mukavemetli betonarme kirişlerde (Shin vd., 1999), deney sonuçları ile tutarlı uygulanan yük-yerdeğiştirme eğrisini veren uygun sonlu eleman boyutları araştırılmıştır. Pek çok çalışmada uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrileri ile deney sonuçlarının uyumluluğu ilk kriter olarak göz önüne alınmaktadır.

## Elemanların özellikleri

Eğik çatlama mukavemeti ve nominal kesme mukavemetini hesaplamak için açıklık ortasında tekil yükle yüklenmiş yüksek mukavemetli betonarme kirişlerdeki değişkenler (Shin vd., 1999) :

1. Kesme açıklığının kiriş etkili derinliğine oranı ( $a/d=1.5, 2.0$  ve  $2.5$ ),
2. Kiriş enine donatı oranı ( $\rho_v/\rho_{v(ACI)}=0, 0.25$  ve  $\rho_{v(ACI)}$  narin kirişler için ACI 318/95'e göre gerekli kiriş enine donatı oranı).  $\rho_{v(ACI)}$ 'un hesabında gerekli kesme mukavemeti, boyuna donatının akmasına karşılık gelen kesme kuvveti olarak alınmıştır.

Elemanların özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo1. Elemanların özellikleri

Elemanlar	b mm	h mm	d mm	f <sub>c</sub> MPa	f <sub>yk</sub> MPa	a/d	$\rho_v = \frac{A_v}{bs}$	$\rho$	$\rho'$
HB1.5*-0**	125	250	215	73	414	1.5	0.0	0.0377	0.0
HB1.5-25	125	250	215	73	414	1.5	0.0045	0.0377	0.005
HB2.0-0	125	250	215	73	414	2.0	0.0	0.0377	0.0
HB2.0-25	125	250	215	73	414	2.0	0.0045	0.0377	0.005
HB2.5-0	125	250	215	73	414	2.5	0.0	0.0377	0.0
HB2.5-25	125	250	215	73	414	2.5	0.0045	0.0377	0.005

\* 1.5 : a/d=1.5 olduğunu gösterir. (deney değerleri a/d=1.5, 2.0, 2.5 )

\*\* 0 :  $\rho_v/\rho_{v(ACI)}=0$  yüzde olarak ifade edilmiştir

Şekil 1'de a/d =2 ve enine donatı aralığının 100 mm olması durumunda sonlu eleman çözümlenmesinde kullanılacak kesit geometrisi ve donatıları verilmiştir. Tüm kirişlerde yük açıklık ortasına etkimektedir.

### Uygun sonlu eleman boyutları

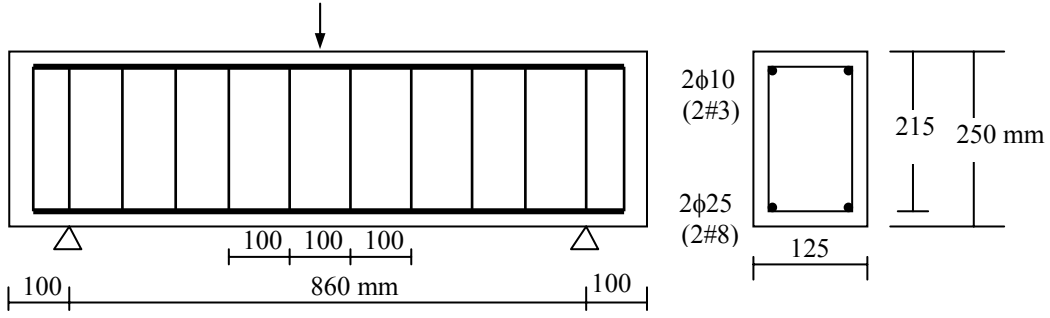
Tablo 2'de çubuk uzunluğu boyunca ve çubuk kesitindeki çözümde kullanılan eleman boyutları ayrıntılı olarak özetlenmiştir. Yatayda sonlu eleman boyutunun 100 mm seçilmesi durumunda, enine donatılı kirişlerde enine donatı aralığı ve sonlu eleman boyutlarının geometrik uyumsuzluğundan, kiriş açıklık ortasında yerdeğiştirmeler karşılaştırılamamaktadır.

Genellikle, sayısal çözümlenmelerde, sonlu eleman boyutu küçüldükçe elemanların yük taşıma kapasitesi ve şekil değiştirmelerinde gerçeğe daha yakın sonuçlar elde edilebileceği düşünülmesine karşın, sonlu eleman uygulamalarında beton elemanların sonlu eleman boyutunda bir alt sınır bulunmaktadır. Bu alt sınır konularak, sonlu eleman boyutundan kaynaklanan problemten kaçınılması mümkün olabilmektedir. Optimum sonlu eleman boyutu iki farklı yolla tanımlanabilir. İlki, beton elemanlarda ölçülen şekil değiştirmelerde şekil değiştirme ölçüsünün uzunluğu gibi alınabilir, ki bu değer; beton karışımdaki en büyük agrega boyutunun iki veya üç katıdır. Sonlu eleman boyutu küçüldükçe, genellikle betonun bünye bağıntılarının kullanımıyla uyumsuzluk olmaktadır (Bedard ve Kotsovas, 1986). Bazant ve Oh (1983) tarafından ifade

edilen diğer çözümde ise; beton gibi heterojen malzeme eşit sürekli homojen malzeme olarak ifade edildiği zaman, mikro yapıda gerçek gerilme ve şekil değiştirmelerden sürekli homojen gerilme ve şekil değiştirmeler ayırt edilmelidir. Temsil edilen alan beton olduğu takdirde, optimum sonlu eleman boyutu beton karışımdaki en büyük agrega boyutunun iki veya üç katı gibi alınabilir. Sonlu eleman boyutu küçüldükçe, erken göçen daha zayıf elemanların oluşması ile sayısal çözümlenelerde bulunan yük taşıma kapasitesi ve şekil değiştirme değerleri gerçeği yansıtmamaktadır. Bu çalışmada; betonarme kirişin doğrusal olmayan çözümünde optimum sonlu eleman boyutu beton karışımdaki en büyük agrega boyutunun üç katından büyük seçilerek mevcut yüksek mukavemetli beton kirişte, deney sonuçları ile tutarlı yük-yerdeğiştirme eğrisini veren uygun sonlu eleman boyutları araştırılmıştır

### Deney sonuçları ile sonlu eleman uygulamalarının karşılaştırılması

Şekil 2'de literatürde (Shin vd., 1999) yer alan altı farklı deney ve sonlu eleman analizi sonucunda açıklık ortasında uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrileri verilmiştir. Yalnız çekme donatılı ve aynı çekme donatısı oranında a/d oranı arttıkça kirişlerin toplam yük taşıma kapasitesi azalmaktadır. Enine donatısız elemanlarda eğik çatlak oluşumu sonrası yük-yerdeğiştirme eğrisinde keskin bir azalma görülmektedir. Enine donatılı elemanlar maksimum yükün ötesinde daha sünek davranış sergilemektedir.



Şekil 1. Eleman boyutları ( $a/d=2.0$ ,  $\rho_v/\rho_{v(ACI)}=0.25$ )

Tablo 2. Sonlu eleman aralıkları ve boyutları

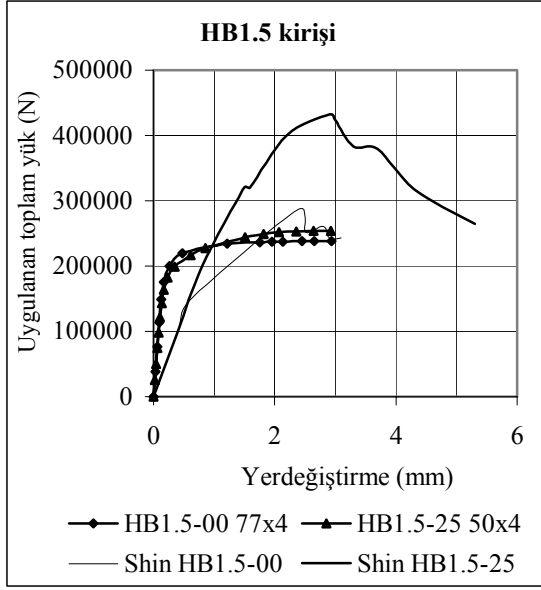
Elemanlar	a/d	Sonlu eleman boyutları		Kirişlerin isimleri
		Yatayda (mm)	Düşeyde (mm)	
HB1.5-0	1.5	77	35+4x53.75	77x4
HB2.0-0	2.0	77	35+4x53.75	77x4
HB2.5-0	2.5	43	35+4x53.75	43x4
HB2.5-0	2.5	50	35+4x53.75	50x4
HB2.5-0	2.5	77	35+107.5x2	77x2
HB2.5-0	2.5	77	35+72+71+72	77x3
HB2.5-0	2.5	77	35+4x53.75	77x4
HB2.5-0	2.5	77	35+35+5x36	77x6
HB2.5-0	2.5	100	35+4x53.75	100x4
HB2.5-0	2.5	180	35+4x53.75	180x4
HB1.5-25	1.5	50	35+4x45+35	50x4
HB2.0-25	2.0	50	35+4x45+35	50x4
HB2.5-25	2.5	50	35+4x45+35	50x4
HB2.5-25	2.5	50	35+2x90+35	50x2
HB2.5-25	2.5	100	35+4x45+35	100x4
HB2.5-25	2.5	100	35+2x90+35	100x2

Eğik çatlak oluşumu sonrası kiriş enine donatısındaki şekil değiştirmeler büyük miktarda artmakta; buna karşın, beklenildiği gibi, kiriş enine donatısındaki şekil değiştirmeler kesme donatısı arttıkça hızla azalmaktadır. Aynı kiriş enine donatısı oranında, a/d arttıkça enine donatıdaki şekil değiştirmeler artmaktadır (Shin vd., 1999).

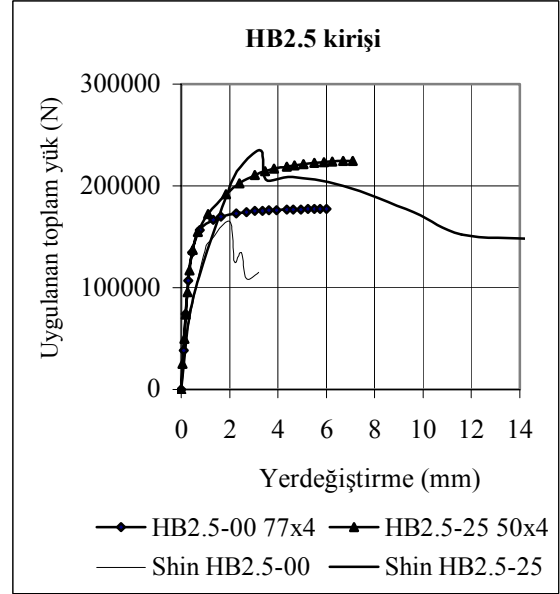
ACI-318 (1995) ile belirtilen kiriş enine donatı oranının %50'nden daha az enine donatı sahip elemanlarda, boyuna donatı akmadan göçme olmuştur. a/d=1.5 ve kiriş enine donatısı ACI'da belirtilen değerde yerleştirildiğinde, boyuna donatıda büyük şekil değiştirmeler gerçekleşmiştir, bu durumda kemerlenme etkisinin baskın olduğu

görülmektedir. Eğik çatlama oluşmasına kadar enine donatılardaki şekil değiştirmeler oldukça küçük kalmakta; eğik çatlak oluşumu sonrası ise önemli miktarda artmaktadır (Shin vd., 1999).

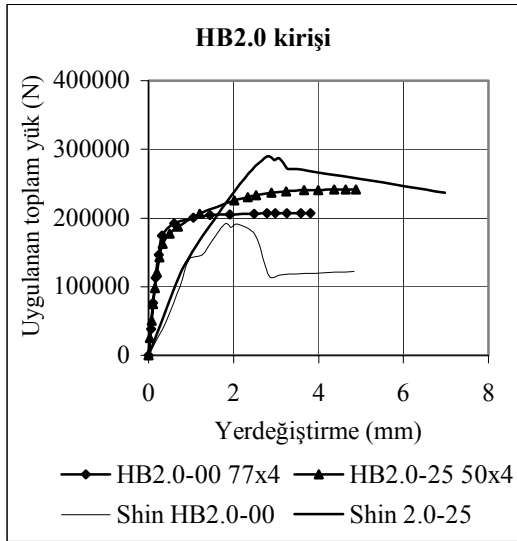
Şekil 2'deki deney sonuçları ile farklı sonlu eleman uygulamalarının karşılaştırılmasında; kesme açıklığının kiriş etkili derinliğine oranı arttıkça, uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrisinin deney sonuçlarına yaklaştığı görülmektedir. a/d=2.5 olduğunda deneysel verilerle sonlu eleman analizleri hemen hemen örtüşmektedir. a/d oranı artışı enine donatılı ve enine donatısız kirişte toplam yük taşıma kapasitesi daha küçük tahmin edilmektedir.



Şekil 2a. HB1.5 kirişi yük-yerdeğiştirme eğrileri



Şekil 2c. HB2.5 kirişi yük-yerdeğiştirme eğrileri



Şekil 2b. HB2.0 kirişi yük-yerdeğiştirme eğrileri

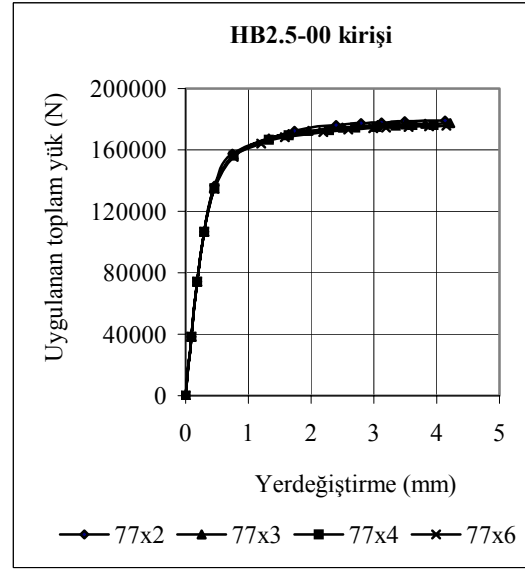
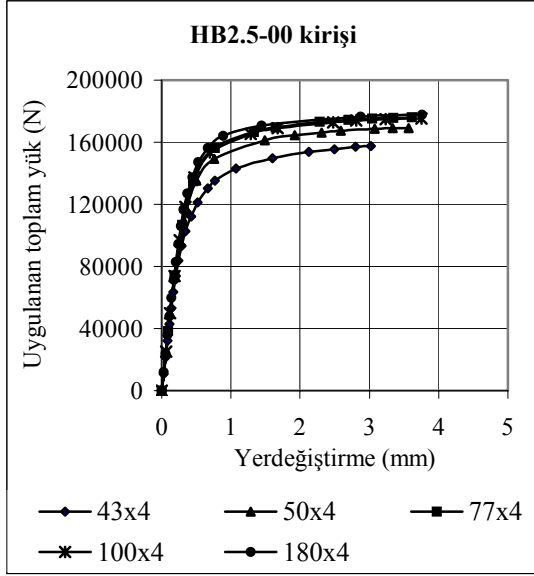
Şekil 2’de farklı a/d oranlarında 100 mm aralıklı enine donatı yerleştirilmesine bağlı olarak uygulanan “toplam yük-yerdeğiştirme” eğrileri görülmektedir. Aynı beton basınç mukavemeti ve enine donatı oranında a/d oranı düşerken yük taşıma kapasitesi artmaktadır.

Şekil 3a’da HB2.5-00 (a/d=2.5, enine ve basınç donatısız) kirişinin düşey kesitte sonlu eleman boyutu 35+4x53.75 sabit tutularak eleman uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutu değişimine göre uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrileri karşılaştırılmıştır.

Yatayda sonlu eleman boyutu artışının elastik sınırlar içerisinde önemli bir etkisi olmadığı görülmektedir. Ancak, elastik sınır ötesinde kiriş uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun artışı yük taşıma kapasitesinde %10’un üzerinde bir artışa sebep olmaktadır. Yatayda boyutların 43(43x4), 50(5x4) mm seçilmesi durumu ile 77(77x4)-100(100x4) ve 180(180x4) mm olması eğride önemli değişiklik görülmektedir; (Şekil 5). Söz konusu kirişte yatayda sonlu eleman boyutlarının 77 mm den büyük seçilmesi durumunda deney sonuçları ile daha çok örtüşen toplam yük-yerdeğiştirme eğrisi elde edilebilmektedir.

Şekil 3b’de düşeyde sonlu eleman boyutu değişimi etkisi karşılaştırılmıştır. Kirişe uygulanan toplam yük–yerdeğiştirme eğrilerinden yük doğrultusunda eleman boyutu değişiminin kapasite artışına veya azalışına belirgin bir etkisi görülmemektedir.

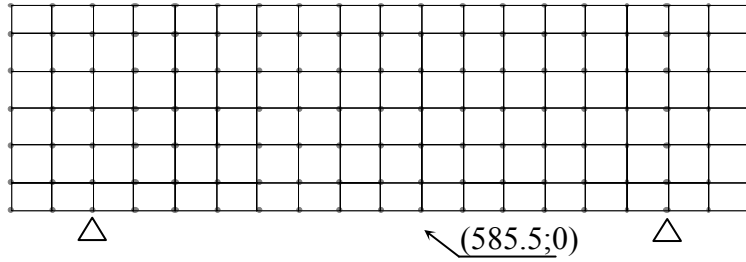
Şekil 4’te a/d=2.5 ve enine donatı aralığı 100 mm olan kirişte (587.5;0) noktası ve sonlu eleman ağı değişimi görülmektedir. Yatayda sonlu eleman boyutunun 100 mm seçilmesi durumunda, enine donatılı kirişlerde enine donatı aralığı ve sonlu eleman boyutlarının geometrik uyumsuzluğundan kiriş açıklık ortasında yerdeğiştirmeler karşılaştırılmamıştır.



a. Yatayda farklı sonlu eleman boyutları

b. Düşeyde farklı sonlu eleman boyutları

Şekil 3. HB2.5-00 kirişi



Şekil 4. 50x4(yatayda 50 mm, düşeyde 35+4x45+35) kirişi sonlu eleman ağı ve grafikte yerdeğiştirmelerin karşılaştırıldığı nokta (HB2.5-25 kirişi)

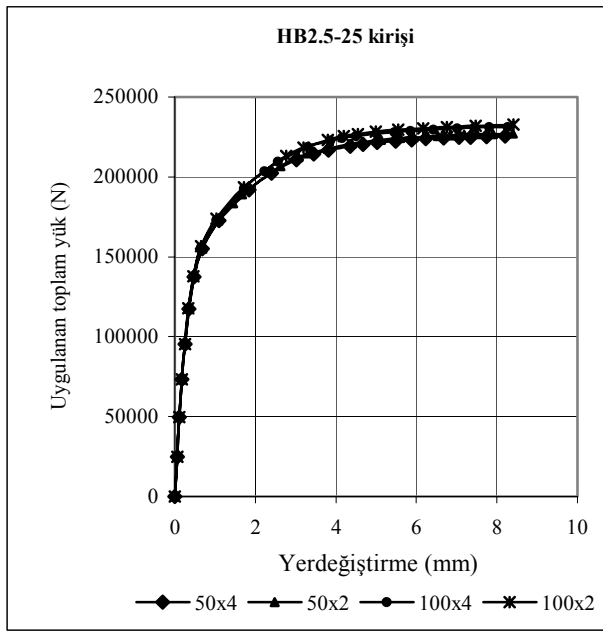
Şekil 5'te görülebileceği gibi, sonlu eleman boyutlarının yatayda 50 mm, düşeyde 35+4x45+35 mm (50x4) ve 35+2x90+35 mm (50x2); yatayda 100 mm düşeyde 35+4x45+35 mm (100x4), 35+2x90+35 mm (100x2) olmaları arasında toplam yük-yerdeğiştirme değerleri açısından fark bulunmaktadır. 50x4, 50x2 kirişleri uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme eğrisi 100x4 ve 100x2 eğrilerinin altındadır. Bu nedenle, kiriş açıklık ortasından tekil yüklü kirişlerde, kiriş boyunca sonlu eleman aralığının enine donatı aralığı boyutunda verilmesinin, deney sonuçları ile daha uyumlu sonuç verdiği görülmektedir.  $a/d=1.5-2.5$ ,  $a/d=2.0-2.5$  ve  $a/d=2.5-2.5$  kirişlerinde açıklık ortası yerdeğiştirmeyi de karşılaştırabilmek için yatayda sonlu eleman boyutu 50 mm verilmiştir.

## Sonuçlar

1. Açıklık ortasında tekil yüklerle yüklenmiş yüksek mukavemetli betonarme kirişte çubuk uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutu değişiminin, uygulanan toplam yük-yerdeğiştirme kapasitesinin değerlendirilmesinde oldukça etkili olduğu görülmüştür. Yine aynı çözümlenelerde, uygulanan yük doğrultusundaki sonlu eleman boyutu değişiminin yük-yerdeğiştirme kapasitesine önemli bir etkisi olmadığı görülmektedir.
2. Yatayda sonlu eleman boyutu artışının elastik sınırlar içerisinde önemli bir etkisi olmadığı görülmektedir. Ancak; elastik sınır ötesinde (HB2.5-00 kirişinde) kiriş uzunluğu boyunca sonlu eleman boyutunun artışı, yük taşıma

kapasitesinde %10'un üzerinde bir artışa sebep olmuştur. Kirişlerde yatayda sonlu eleman boyutlarının 77 mm'den büyük seçilmesi durumunda, deney sonuçları ile daha çok örtüşen toplam yük-yerdeğiştirme eğrisi elde edilebilmiştir.

3. Sonlu eleman analizlerinde, a/d oranı arttıkça, açıklık ortasında toplam yük-yerdeğiştirme eğrilerinin deneysel verilere uygunluğu artmaktadır. a/d=2.5 olduğunda deneysel veriler ile sonlu eleman analizleri hemen hemen örtüşmektedir.



Şekil 5. HB2.5-25 kirişi toplam yük-yerdeğiştirme eğrisi

### Semboller

- a/d :kesme açıklığının kiriş etkili derinliğine oranı  
b :kiriş genişliği (mm)  
d :kiriş etkili derinliği (mm)  
 $f'_c$  :beton basınç mukavemeti (MPa)  
h :kiriş yüksekliği (mm)  
 $\rho, \rho'$  :çekme donatısı ve basınç donatısı oranı  
 $\rho_v$  :kesme donatısı oranı

### Kaynaklar

- ACI Committee 318, (1995). *Building Code for Structural Concrete (318-95) and Commentary (318R-95)*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 369.
- ACI Committee 318, (1999). *Building Code for Structural Concrete (318M-99) and Commentary (318RM-99)*, American Concrete Institute, Farmington Hills, Michigan, 391.
- Arslan G., (2002). Tersinir Yükler Altında Betonarme Çubukların Kesme Mukavemeti, *Doktora Tez Raporu2*, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Bazant Z. P. ve Oh B., (1983). Crack band theory for fracture of concrete, *Materiaux et Constructions*, **16**, 93, 155-177.
- Bedard C. and Kotsovos M.D., (1986). Fracture process of concrete for NLFEA methods, *ASCE Journal of Structural Engineering*, **112**, 3, 573-586.
- Cedolin L. ve Dei Poli S., (1977). Finite element studies of shear critical R/C beams, *ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division*, **103**, EM3, 395-410.
- Doran B., Köksal H.O., Polat Z., Karakoç C., (1998). Betonarme Elemanlarda Sonlu Eleman Uygulamalarında Drucker-Prager Akma Kriteri Kullanılması, *İMO Teknik Dergi*, **9**, Sayı 2, 1617-1625.
- Köksal H.O., (1998). Modeling of Concrete Fracture, *Ph.D. Thesis*, Submitted to Boğaziçi University, İstanbul.
- LUSAS, Finite Element System (2001). *Examples Manual*, Version 13.3, Issue 2, FEA Ltd., United Kingdom.
- Ngo D. ve Scordelis A.C., (1967). Finite element analysis of reinforced concrete beams, *ACI Journal*, **64**, No.3, 152-163.
- Rebeiz K.S., (1999). Shear Strength Prediction for Concrete Members, *Journal of Structural Engineering ASCE*, **125**, No.3, 301-308.
- Shin S-W, Lee K-S, Moon J ve S.K.Ghosh., (1999). Shear Strength of Reinforced High-Strength Concrete Beams with Shear Span-to-Depth Ratios between 1.5 and 2.5, *ACI Structural Journal*, **96**, 549-556.