

**itüdergisi/d****mühendislik**

Cilt:5, Sayı:1b, 228-238

Şubat 2006

# Merkez üslerin konumlandırılması probleminin Hopfield-Tank yapay sinir ağları ile çözülmesi

**Murat ERMIŞ\***, **Füsun ÜLENGİN***İTÜ İşletme Fakültesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü, 34469, Maçka, İstanbul*

## Özet

Merkez üslerin yerleşim noktalarının belirlenmesi ve merkez üsler ağının tasarlanmasını içeren merkez üslerin konumlandırılması problemi konum teorisi alanında yaygın olarak çalışılmaktadır. Bu çalışmada, kapasite sınırlamasının olmadığı, sabit konumlandırma maliyetlerinin olduğu, tek tahsisli merkez üsleri konumlandırma problemi için yapay sinir ağı (YSA) temelli bir çözüm yöntemi önerilmiştir. Ayrıca tavlama benzetimine dayanan bir yöntem de geliştirilmiştir. Yöntemin etkinliğini test etmek için, literatürde sıklıkla kullanılan test veri seti kullanılarak, YSA temelli yöntem için elde edilen sonuçlar ile literatürde yer alan en iyi çözümler ve tavlama benzetiminden elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Merkez üsler, yapay sinir ağları, Hopfield-Tank, tavlama benzetimi.

## Solving uncapacitated hub location problem using Hopfield-Tank type artificial neural networks

### Abstract

In many transportation and telecommunication networks, the cost of carrying a unit of traffic between two points decreases as the capacity of the connection joining the two points increases. It is possible to facilitate this connection by building dedicated channels between each pair of nodes that communicate with each other. However, this would result in higher costs. Because of this fact, it is often convenient to design networks in which traffic is concentrated on high capacity links, even if this traffic travels longer distances. In order to facilitate the flow of the traffic between nodes so as to decrease the overall cost of transportation, some centers known as hubs are introduced. Airline passenger flow, cargo or postal delivery networks, large telecommunication networks are examples of networks utilizing hubs. The problem addressed in this study is the uncapacitated single allocation hub location problem (USAHLP) in which, given  $n$  interacting nodes in a network, hubs are fully interconnected and each spoke is assigned to a unique hub. In this study, a solution method based on an artificial neural network framework for the USAHLP is introduced. The heuristic based on simulated annealing is also developed. To present its effectiveness, the solutions of this ANN-based method is compared with the best solutions presented in the literature and the solutions of simulated annealing based heuristic by considering CAB data set.

**Keywords:** Hub location, artificial neural network, Hopfield-Tank, simulated annealing.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Murat ERMIŞ. [ermis@hho.edu.tr](mailto:ermis@hho.edu.tr); Tel: (212) 663 24 90 dahili: 4356.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ İşletme Fakültesi'nde tamamlanmış olan "Lojistik sistemlerin yapay sinir ağları ile modellenmesi, gerçekleştirilmesi ve kontrolü" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 10.03.2005 tarihinde dergiye ulaştırılmış, 05.04.2005 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.07.2006 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Giriş

Konum-Tahsis problemlerinin (KTP) özel bir çeşidi olan merkez üslerin konumu (*hub location*) araştırmaları son yıllarda konum teorisinin önemli bir araştırma alanı olmuştur. Modern ulaştırma ve iletişim sistemlerinin büyük bir kısmında merkez üs ağlarının kullanılması, bu alandaki araştırmaların önemini artmasında etken olmuştur. Bu sistemler, maliyette ölçek ekonomisinin söz konusu olduğu birçok hareket ve varış noktaları arasında seyahat veya iletişimin gerçekleşmesini sağlar. Özellikle ulaştırmada daha büyük araçlar birim başına daha düşük taşıma maliyetine sahiptirler. Örneğin, büyük bir uçakta (mesela, Airbus 340) mil başına bir koltuğun maliyeti, küçük bir uçağın (mesela, RJ 70) mil başına koltuk maliyetinden daha düşüktür.

Merkez üslerin konumlandırılması problemi bir çok açıdan klasik tesis konum problemlerinden farklılık gösterir. Klasik bir ayırık tesis yerleşim probleminde talep ayırık noktalarda gerçekleşir, tesisler ayırık noktalarda konumlandırılmıştır ve amaç genellikle talep noktaları ile tesisler arasındaki mesafe ve maliyetle ilgilidir. Merkez üsler konum problemlerinde ise, birbirleriyle iletişim halinde olan düğümlerden oluşmuş bir ağ söz konusudur. İletişimden kastedilen, bir çok hareket ve varış noktaları arasındaki akış ve merkez üs tesisleri hareket-varış noktası akışları için aktarma ve birleştirme noktaları gibi hizmet verirler. Bir merkez üs, bir çok ayrı küçük akışı daha büyük akışlara yönlendirir veya birleştirir. Ayrıca, farklı varış noktaları için büyük bir akışı daha küçük akışlara da bölebilir. Bu nedenle, bağlantı noktaları çıkış-varış noktası akışlarının takip ettiği yoldaki ara noktalardır (Drezner ve Hamacher, 2002). Merkez üsler konum problemlerinin ulaştırma (hava yolu ile seyahat, hava yolu ile nakliyat, bir gecelik dağıtım sistemleri, posta dağıtımı, vs.) ve telekomünikasyon (bilgisayar iletişimi, telefon ağları, dağıtık bilgisayar işleme vs.) alanında bir çok uygulamaları vardır.

Merkez üslerin konumlandırılması probleminin farklı türleri vardır (O'Kelly, 1987). Bir merkez üsün toplayabileceği akışın miktarına ilişkin bir kapasite kısıtı olabilir; herhangi bir düğüm nok-

tasını merkez üs olarak kurulmasında sabit bir maliyet olabilir veya düğüm noktaları bir veya birden fazla merkez üsse paylaştırılabilir. Ancak, merkez üs problemlerinin bütün çeşitlerinde amaç fonksiyonu, ağın toplam maliyeti enküçüklenecek şekilde bağlantı noktalarının konumlarını ve düğüm noktalarının (*spoke*) paylaşımını bulmaktır. Eğer bütün akışlar merkez üs aracılığıyla yapılmakta ve merkez üs olmayan her bir düğüm noktası sadece bir merkez üsse tahsis edilmişse, bu problem kapasite sınırlaması olmayan tek tahsisli merkez üs konumlandırma problemi (*uncapacitated single allocation hub location problem - USAHLP*) adını alır. Bu problemde, merkez üs sayısı karar değişkenidir ve matematiksel formülasyona sabit bir maliyet de dahil edilmiştir. Eğer merkez üs sayısı sabit ise ( $p$  merkez üs), bu problem kapasite sınırlaması olmayan tek tahsisli  $p$ -merkez üs problemi (*uncapacitated single allocation  $p$ -hub median problem-USA $p$ HMP*) olarak isimlendirilmiştir. Bağlantı noktalarındaki akış miktarına ilişkin bir sınırlandırma da olabilir (*capacitated- CMAHLP*) veya her bir düğüm noktası birden fazla merkez üssüne tahsis edilmiş de olabilir (*multiple allocation - UMA $p$ HMP*). Diğer bir farklı biçimi ise, bugüne kadar kapsamlı olarak çalışılmamış olan, bazı bağlantılarda veya tamamında minimum akışa gereksinim duyulan (akış eşikleri) modellerdir. Örneğin, çoklu tahsisin söz konusu olduğu havayolları uygulamasında, şirket tarafından işletilen en küçük uçak büyüklüğüne ilişkin akış eşiği, ağda yer alıp da ekonomik olmayan bağlantıları önlemeyi sağlayabilir. KTP;  $p$ -medyan ve  $p$ -merkez problemleri gibi zor problemler olarak bilinirler. Konumlar bilindiğinde diğer problemler sıradanlaşırken, merkez üsler problemi bu durumda dahi zor problem olarak kalır (Love vd., 1988).

Bugüne kadar araştırmacıların yoğun ilgisini çeken merkez üs problemleri;  $p$ -merkez üsler medyan problemi ve sonlu/sonsuz kapasiteli merkez üsler problemleridir. Merkez üsler problemi ikinci dereceden tamsayı programlama olarak ilk kez O'Kelly tarafından modellenmiştir (O'Kelly, 1987). Tek tahsisli durumu Aykin (1994), Campbell (1994, 1996), Klincewicz

(1991), O'Kelly ve diğerleri (1995) tarafından çalışılmıştır. Her bir durum farklı yollardan formüle edilebilmekle beraber, en etkin genel bir yaklaşım Ernst tarafından ortaya konmuştur (Ernst ve Krishnamoorthy 1996; Ernst ve Krishnamoorthy 1998). Bu yaklaşımda her bir orijin için arklardaki akışlara dayanan bir yöntem önerilmiştir.

O'Kelly, USAHLP'yi çözmek için, bir havayolu şirketinin uçuş rotalarını modelleyen ve her bir hava limanına belirli sayıda merkez üsleri atamaya çalışan iki sezgisel yöntemi ele almıştır (O'Kelly vd., 1995). Klincewicz KTP'yi ele alarak  $p$ -merkez üslerin bütün olası kombinasyonlarını deneyen ve her bir durum için en küçük mesafeye sahip düğüm noktasını atayan bir sezgisel yöntem kullanmıştır (Klincewicz, 1991). Yasaklı aramayı KTP'nin çözümünde ilk olarak Skorin-Kapov kullanmıştır (Skorin-Kapov ve Skorin-Kapov, 1994). Kullanılan bir diğer yaklaşım ise tavlama benzetimi tekniğidir (Ernst ve Krishnamoorthy, 1996). Çözüm kalitesinin tahmini bir değerini verebilecek alt sınırlar oluşturmada referans çözümü kullanan ilginç bir sezgisel çözüm tekniği de O'Kelly tarafından önerilmiştir (O'Kelly vd., 1995). Abdinnour-Helm ise USAHLP için iyi çözümler elde etmede genetik algoritmalar ile yasaklı aramayı bir arada kullanan melez bir sezgisel yaklaşım kul-

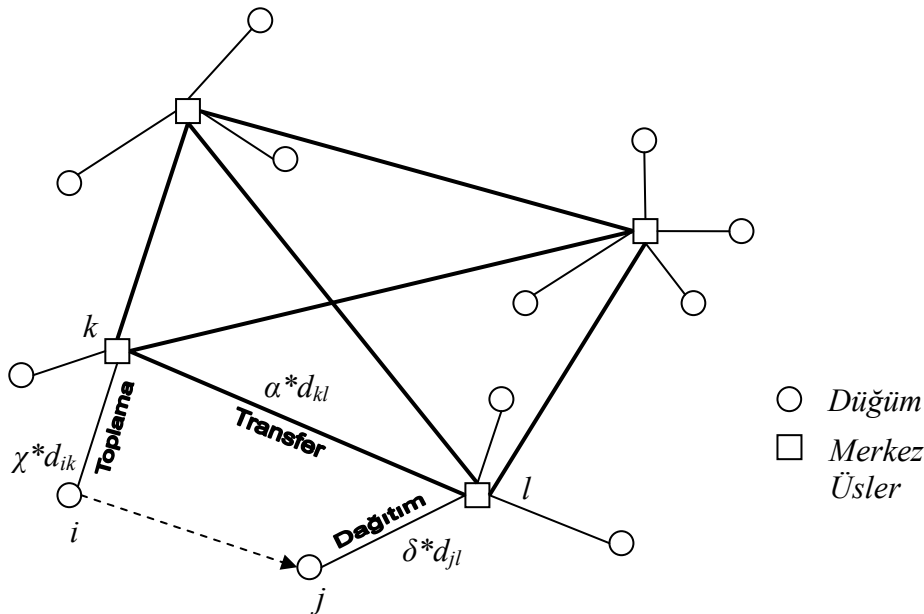
lanmıştır (Abdinnour-Helm, 1998). Smith, sonsuz kapasiteli, tek paylaşımlı  $p$ -merkez üsler medyan problemini çözmek için yapay sinir ağları yaklaşımını önermiştir (Smith vd., 1996). Topcuoğlu ise USAHLP için bu güne kadar literatürde yer alan en iyi çözümleri veren genetik algoritmalara dayalı sezgisel bir yaklaşım önermiştir (Topcuoğlu vd., 2005).

### Problemin formülasyonu

Merkez üslerin konumuyla ilgili mevcut temel bilgiler, her bir düğüm noktası çifti  $(i,j)$  arasında bilinen bir  $W_{ij}$  miktarındaki akışın (yolcu, veri, posta, bilgi, vs.) gerçekleşmesi için ihtiyaç duyulan  $n$  düğüm noktasıdır. Bunu gerçekleştirmenin en basit yolu, her bir düğüm noktası çiftini doğrudan birbirleriyle birleştirmektir, ancak bu çok verimsiz bir yöntemdir. Verimliliği artırmak için bütün akışların Şekil 1'de görüldüğü gibi aktarma/ bağlantı noktaları (merkez üsler) aracılığıyla gerçekleştirilmesi gerekir.

Merkez üslerin konumları orijinal düğüm noktaları kümesinden seçilmelidir. Genellikle merkez üsler tamamen birbirlerine bağlıdır ve transfer maliyetleri üçgen eşitsizliğini sağlar.

Benzer şekilde, merkez üs olmayan herhangi bir düğüm noktası doğrudan bir bağlantı noktasına



Şekil 1. Merkez üsler ağına toplama ve dağıtım süreçleri

bağlanmalıdır. Bu varsayımlar ve sınırlamalarla bütün transferler bir veya en fazla iki bağlantı noktası üzerinden rotalanmalıdır. Genellikle bu akış,  $i$ 'den  $j$ 'ye  $k$  ve  $l$  bağlantı noktaları üzerinden olan transfer, eğer  $k$  ve  $l$  eşitse, tek bir bağlantı noktası üzerinden gerçekleşen akış olarak yazılır. Benzer şekilde eğer  $i$  bir bağlantı noktası ise  $i = k$  ve eğer  $j$  bir bağlantı noktası ise  $l = j$  olarak yazılır. Bu bağlantıların ulaştırma maliyeti,  $i$ 'den  $k$ 'ya olan toplama,  $k$ 'dan  $l$ 'ye transfer ve  $l$ 'den  $j$ 'ye dağıtım maliyetlerinin toplamına eşittir. Eğer düğüm noktalarından ikisi birbirinin aynısı ise bu maliyetlerden bazıları sıfıra eşit olabilir.

USA $\rho$ HMP için ilk tamsayı programlama formülasyonu O'Kelly tarafından önerilmiştir ve bu modelde amaç fonksiyonu ikinci derecedendir (O'Kelly, 1987). Böyle bir ikinci dereceden formülasyonun avantajı, sadece  $N^2$  ikili değişkene ve  $(1+N+N^2)$  kısıta gereksinim duymasındadır. Dezavantajı ise, ikinci dereceden formülasyonun doğasından kaynaklanan, genel minimuma ulaşmanın garanti olmaması sorunudur. Ayrıca bu problem için karışık tamsayı programlama formülasyonu da geliştirilmiştir (Campbell, 1994; Ernst ve Krishnamoorthy, 1999; Ebery, 2001). Bu çalışmada, ikinci dereceden tamsayı programlama modeli Yapay Sinir Ağı çatısına dönüştürmeye uygun olduğundan, bazı notasyon değişiklikleri yapılarak O'Kelly'nin formülasyonu kullanılmıştır.

Eğer  $i$ 'nci düğüm noktası  $k$ 'nci düğüm noktasına konumlandırılmış merkez üsse tahsis edilmişse, tamsayı karar değişkeni  $X_{ik}$  1'e, aksi takdirde 0'a eşit olacaktır. Her bir merkez üs kendi kendine atanmıştır; yani,  $k$ 'nci düğüm noktası eğer bir merkez üs ise  $X_{kk}$  1'e eşittir.  $d_{ik}$   $i$ 'nci ve  $k$ 'nci düğüm noktaları arasındaki mesafe,  $W_{ij}$   $i$ 'nci düğüm noktasından  $j$ 'nci düğüm noktasına olan akış miktarı ve  $\chi$ ,  $\alpha$  ve  $\delta$  toplama, transfer ve dağıtım birim maliyetleridir. Bir merkez üssü  $k$ 'nci düğüm noktasına konuşlandırmanın maliyeti de  $f_k$  olarak tanımlanmıştır. Literatürde, merkez üsler arasındaki indirgenmiş birim maliyeti elde edebilmek için bir iskonto faktörü olarak  $\alpha < 1.0$  ve  $\chi = \delta = 1.0$  değerleri kabul edilmiştir.

Bu tanımlamalar kullanılarak USAHLP, 0-1 ikinci dereceden programlama olarak aşağıdaki gibi modellenebilir:

$$\begin{aligned} \min f(x) = & \sum_i \sum_j \sum_k \chi W_{ij} d_{ik} X_{ik} \\ & + \sum_i \sum_j \sum_l \delta W_{ji} d_{jl} X_{jl} \\ & + \sum_i \sum_k \sum_l \sum_j \alpha W_{ij} d_{kl} X_{ik} X_{jl} \\ & + \sum_k f_k X_{kk} \end{aligned} \quad (1)$$

Kısıtlar;

$$\sum_k X_{ik} = 1, \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$X_{kk} - X_{ik} \geq 0, \quad \forall i, k \in N \quad (3)$$

$$X_{ik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, k \in N \quad (4)$$

Orijin  $i$ 'den dışarıya olan toplam akış miktarı  $O_i$  ise:

$$O_i = \sum_j W_{ij}, \quad \forall i \in N \quad (5)$$

ve  $D_i$  varış noktası  $i$ 'de sonlanan toplam akış miktarı ise:

$$D_i = \sum_j W_{ji}, \quad \forall i \in N \quad (6)$$

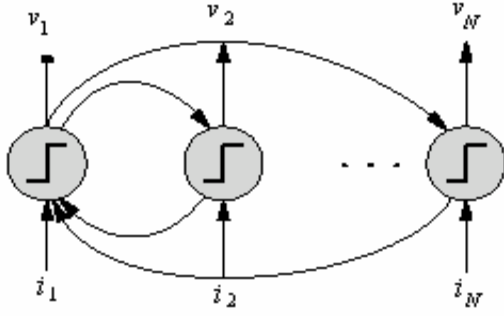
Eğer maliyet matrisi simetrik ise (yani,  $d_{ik} = d_{ki}$ ), amaç fonksiyonu (1) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} f(x) = & \sum_i \sum_j X_{ij} d_{ij} (\chi O_i + \delta D_i) \\ & + \sum_i \sum_k \sum_l \sum_j \alpha W_{ij} d_{kl} X_{ik} X_{jl} + \sum_k f_k X_{kk} \end{aligned} \quad (7)$$

Amaç fonksiyonu (1); toplama, transfer ve dağıtım maliyetlerinin toplamına eşittir. Kısıt (2), her bir düğüm noktasının sadece tek bir merkez üsse tahsis edilmesini garanti altına alır. Kısıt (3), her toplama ve dağıtım hareketi için merkez üslerin tespit edilmesini sağlar. Dördüncü ve son kısıt, bütün değişkenlerin 0-1 tamsayı değeri almaya zorlar.

### Hopfield-Tank (HT) sinir ağı modeli

Hopfield-Tank sinir ağı, birbirlerine tamamen bağlı  $n$  adet nörondan oluşan yinelemeli bir sistemdir (Şekil 2).



Şekil 2. Hopfield sinir ağı

Nöron  $i$ 'nin içsel durumu  $u_i$  ve çıktı düzeyi  $y_i$  ile gösterilsin. Bir nöronun içsel durumu ile çıktı düzeyi arasındaki ilişki basit monoton olarak azalmayan bir fonksiyondur:

$$y_i = g_i(u_i) \quad (8)$$

Bu fonksiyon, ağıın son durumunun bir hiperküpün köşe noktası olmasını garanti altına almak için, her bir nöron çıktısının 0 ile 1 arasında kalmasını sağlayacak şekilde bir eşik fonksiyon gibi çalışır. İçsel durum ( $u_i$ ),  $i_i$  ile gösterilen bir önyargı terimi içerir ve diğer nöronların tartılandırılmış çıktılarının toplamına eşittir. Nöron  $i$ 'den nöron  $j$ 'ye olan bağlantının gücünü gösteren ağırlıklar  $W_{ij}$  olarak gösterilir.  $g(u_i)$  fonksiyonunun davranış biçimi ve güncelleme prosedürü, kullanılan Hopfield ağıının ayrık veya sürekli olmasına göre değişir. Ayrık olması durumunda,  $g(u_i)$  fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanan bir adım fonksiyonudur:

$$g(u_i) = \begin{cases} 0 & u_i < 0.5 \\ 1 & u_i \geq 0.5 \end{cases} \quad (9)$$

Sürekli Hopfield modelinde  $y_i$ , 0 ile 1 arasında sınırlandırılmış sürekli bir değişkendir ve  $g(u_i)$  sürekli bir fonksiyondur. Genellikle bu fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$g(u_i) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{e^{u_i/\lambda} - e^{-\lambda u_i/\lambda}}{e^{\lambda u_i/\lambda} + e^{-\lambda u_i/\lambda}} \right) \quad (10)$$

Bu ifadede  $\lambda$  parametresi aktivasyon fonksiyonunun artışı (eğimini) kontrol etmede kullanılır. Sürekli Hopfield sinir ağı modelinde bir nö-

ronun davranışı, aşağıdaki diferansiyel denklem ile ifade edilen ve sürekli bir değişken olan aktivasyon düzeyi ( $u_i$ ) ile karakterize edilir:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\mathbf{u}}{\eta} + \mathbf{W}\mathbf{v} + \mathbf{i} \quad (11)$$

Denklem 11'de;  $\eta$  öğrenme oranını,  $\mathbf{W}$  nöronlar arasındaki bağlantıların ağırlıklarının oluşturduğu matrisi ve  $\mathbf{i}$  harici girdi değerlerinden oluşan vektörü gösterir. Denklem 11'deki ilk terim

$(-\frac{\mathbf{u}}{\eta})$  literatürde genellikle ihmal edilir

(Takefuji, 1992). Öğrenme oranı ( $\eta$ ), nörona dışardan ve diğer nöronlardan tartılandırılmış girdiler olmadığı takdirde sıfıra doğru azalma oranını verir. Aktivasyon fonksiyonunun eğiminin yüksek olması (high-gain) durumunda ( $\lambda \approx 0$ ), çıktı değerleri 0 ya da 1'e yaklaşır ve ağıın durum uzayı  $n$ -boyutlu bir hiperküpün köşe noktalarının oluşturduğu kümedir  $\{0, 1\}^n$ . Bu nedenle ağıın son durumu bu köşe noktalarından birisidir.

Hopfield bu ağıın kararlılığını, ağıın çıktısının ( $y_i$ ) aşağıdaki Liapunov fonksiyonunu minimum yapacak biçimde evrildiğini yukarıdaki dinamik diferansiyel denklem ile göstererek ispat etmiştir (Hagan vd., 1996).

$$E = -\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{W} \mathbf{y} - \mathbf{i}^T \mathbf{y} + \frac{1}{\eta} \sum \int_0^y g^{-1}(y) dy \quad (12)$$

Hopfield ağıları, 0-1 karışık tamsayı programlama problemlerini çözmede (örneğin, merkez üslerin konumlandırılması), eğer ağırlıklar simetrik ise bir yaklaşık yöntem olarak kullanılabilir. Çünkü, ağırlıkların simetrik olması durumunda ağı enerjisi fonksiyonunun minimumuna yakınsar.

$$E^k = -\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{W} \mathbf{v} - \mathbf{i}^T \mathbf{v}, \quad v_i \in \{0,1\}, \forall i \quad (13)$$

Bu tip ağıların kararlılığının ispatı,  $E^k$ 'nin aktivasyon işlevi azalmayan bir Liapunov fonksiyonu olmasına dayanmaktadır (Cohen ve Grossberg, 1983). Ayrıca, eğer kendi üzerine dönme bağlantısı yoksa (yani,  $W_{ii}=0, \forall i$  için) yüksek eğimli aktivasyon fonksiyonu kullanıldığında, minimum nokta  $\{0,1\}^n$ 'in bir köşe nok-

tasıdır. Eğer  $W_{ii}$  negatif ise Liapunov inişine engel olmamakla birlikte, ağıın içteki bir yerel minimuma yakınsamasına yol açabilir. Bu durumda, çözümü köşelere doğru yönlendirmek için genellikle tavlama teknikleri kullanılır.

Hopfield ve Tank farklı kombinatorik eniyileme problemlerinin ağına nasıl dönüştürülebileceğini göstermişlerdir (Hopfield ve Tank, 1985; Tank ve Hopfield, 1986). Ağıın enerji fonksiyonu genellikle enküçüklenecek eniyileme probleminin amaç fonksiyonuna eşitlenir ve problemin kısıtları da enerji fonksiyonuna ceza koşulları olarak eklenir (Lagrangian relaxation). Ağıın parametreleri, bu enerji fonksiyonu ile standart enerji fonksiyonu (13) karşılaştırılarak bulunabilir. Ağı, her bir nöronun aktivite düzeyi yansız bir duruma eşitlenerek başlangıç durumuna getirilir. Ağıın rassal ve eşzamanlı olmayan güncellenmesi ile bir minimum enerji durumuna erişilir.

Kısıtlı bir 0-1 tamsayı programlama problemi, amaç fonksiyonu enküçükleneceğinden ve kısıtların sağlanmasıyla ceza terimleri sıfır olacağından, enerji fonksiyonunu da eniyileyecektir. Ancak, enerji fonksiyonunun bir minimumu amaç fonksiyonunun bir minimumuna karşılık gelmeyebilir, çünkü enerji fonksiyonunda birçok yerel minimuma neden olabilecek fazla sayıda terim vardır. Bu nedenle, hangi terimlerin bütünüyle enküçükleneceği ile ceza parametrelerinin (enerji fonksiyonunda her bir terim için Lagranj çarpanı gibi davranan parametreler) dikkatlice seçildiği durumlar dışında karşılaşılabilecek ağıın olurluluğu arasında bir ödünleşme

yapmak gerekir. Hopfield-Tank enerji fonksiyonundaki ceza terimlerini eşit olarak dengeleyebilecek bir yöntem bulma çalışmaları hala devam eden bir konudur. Ağı olurlu bir çözüme yakınsamayı başarsa da diğer tekniklerle kıyaslandığında çözüm kalitesi büyük olasılıkla kötüdür. Çünkü Hopfield ağı bir iniş tekniğ olduğundan karşılaştığı ilk yerel minimuma yakınsar.

### Hopfield-Tank sinir ağı modelinin USAHLP'ye uyarlanması

USAHLP, amaç fonksiyonu ve kısıtlar  $\mathbf{X}$  çözüm matrisi değil de  $\mathbf{x}$  çözüm vektörü gibi yazılarak standart ikinci dereceden programlama biçimine dönüştürülebilir.  $vec(\mathbf{x})$ ,  $n \times n$ 'lik matris  $\mathbf{X}$ 'i  $mn$  - elemanlı vektör  $\mathbf{x}$ 'e dönüştüren fonksiyon olsun. Bu fonksiyon şu şekilde tanımlanabilir:

$$\mathbf{x} = vec(\mathbf{X}) = [X_{11}, X_{21}, \dots, X_{n1}, \dots, X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{nn}]^T \quad (14)$$

ve  $c$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{c} = [d_{11}(O_1 + D_1) + f_1, d_{21}(O_1 + D_1), \dots, d_{n1}(O_1 + D_1), \dots, d_{1n}(O_n + D_n), \dots, d_{nn}(O_n + D_n) + f_n]^T \quad (15)$$

Denklem (7)'deki ikinci dereceden terim  $\alpha \mathbf{x}^T \mathbf{d}^T \mathbf{x} \mathbf{W}$  gibi gösterilebilir. Bu ifadede,  $\mathbf{d}$  maliyetlerin ( $d_{ij}$ ) oluşturduğu matris,  $\mathbf{W}$  akışların ( $W_{ij}$ ) oluşturduğu matristir. Bu ifade  $\mathbf{x}^T (\alpha \mathbf{d}^T \otimes \mathbf{W}) \mathbf{x}$ 'e eşittir ve  $\otimes$  Kronecker çarpımıdır (Gee vd., 1991):

$$\mathbf{d}^T \otimes \mathbf{W} = \begin{bmatrix} d_{11}W_{11} & \dots & d_{11}W_{1n} & d_{21}W_{11} & \dots & d_{21}W_{1n} & d_{n1}W_{11} & \dots & d_{n1}W_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{11}W_{n1} & \dots & d_{11}W_{nn} & d_{21}W_{n1} & \dots & d_{21}W_{nn} & d_{n1}W_{n1} & \dots & d_{n1}W_{nn} \\ d_{12}W_{11} & \dots & d_{12}W_{1n} & d_{22}W_{11} & \dots & d_{22}W_{1n} & d_{n2}W_{11} & \dots & d_{n2}W_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{12}W_{n1} & \dots & d_{12}W_{nn} & d_{22}W_{n1} & \dots & d_{22}W_{nn} & d_{n2}W_{n1} & \dots & d_{n2}W_{nn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{1n}W_{11} & \dots & d_{1n}W_{1n} & d_{2n}W_{11} & \dots & d_{2n}W_{1n} & d_{nn}W_{11} & \dots & d_{nn}W_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{1n}W_{n1} & \dots & d_{1n}W_{nn} & d_{2n}W_{n1} & \dots & d_{2n}W_{nn} & d_{nn}W_{n1} & \dots & d_{nn}W_{nn} \end{bmatrix} \quad (16)$$

USAHLP çözüm vektörü ( $\mathbf{x}$ ) cinsinden yeniden şu şekilde ifade edilebilir:

$$\text{Min } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (17)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b} \quad (18)$$

$$x_i \in \{0,1\}, \quad \forall i \quad (19)$$

Öyle ki;  $\mathbf{Q}$   $\mathbf{d}$  ve  $\mathbf{W}$ 'nin Kronecker çarpımı ( $=\alpha \mathbf{d}^T \otimes \mathbf{W}$ ),  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  ise bir önceki formülasyondan elde edilen değerlerdir. Bu genel problem için uygun enerji fonksiyonu Aiyer ve Gee tarafından gerçekleştirilen çalışmalar temel alınarak şu şekilde verilebilir (Aiyer vd., 1990; Gee vd. 1991):

$$E = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} c_0 E^g \quad (20)$$

Bu eşitlikte  $E^g$  terimi  $\mathbf{x}$  vektörünün kısıt düzlemi  $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 'den sapma miktarına eşittir. Bu değişikliğin avantajı sadece tek bir ceza parametresinin ( $c_0$ ) seçilmesine gereksinim duymasındır. Eğer  $c_0$  yeteri kadar büyükse, enerjinin enküçüklenmesi esnasında kısıt terimi ortadan kalkmaya zorlanacağından, çözümün geçerliliği sağlanır. Bu nedenle, çözüm ister istemez kısıt düzleminde yer alacaktır.

### Değiştirilmiş HT enerji fonksiyonu

$\mathbf{x}$  vektörünün kısıt düzleminin ( $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ) çözüm uzayına projeksiyonu yapılırsa:

$$\mathbf{x} \leftarrow \wp \mathbf{x} + \mathbf{s} \quad (21)$$

Öyle ki:

$$\begin{aligned} \wp &= \mathbf{I} - \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{s} &= \mathbf{A}^T (\mathbf{A} \mathbf{A}^T)^{-1} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (22)$$

Bu yüzden,  $\mathbf{x}$  vektörü kısıt düzleminde sapma miktarı aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$\|\mathbf{x} - (\wp \mathbf{x} + \mathbf{s})\|^2 \quad (23)$$

Enerji fonksiyonu (20) aşağıdaki gibi yeniden ifade edilebilir:

$$E = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} c_0 \|\mathbf{x} - (\wp \mathbf{x} + \mathbf{s})\|^2 \quad (24)$$

Denklem (24) açıldığında:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (-2\mathbf{Q} + c_0 (\wp - \mathbf{I})) \mathbf{x} - \mathbf{x}^T (c_0 \mathbf{s} - \mathbf{c}) \\ &\quad + \frac{1}{2} c_0 \mathbf{s}^T \mathbf{s} \end{aligned} \quad (25)$$

$E$  standart Hopfield enerji fonksiyonu ile karşılaştırıldığında, ağırlıklar ( $\mathbf{W}$ ) ile harici girdileri ( $\mathbf{I}$ ):

$$\mathbf{W} = -2\mathbf{Q} + c_0 (\wp - \mathbf{I}) \quad (26)$$

$$\mathbf{I} = c_0 \mathbf{s} - \mathbf{c} \quad (27)$$

olarak bulunur. Ağırlıkların yakınsadığı çözümün en iyi çözüme yakın, hem 0-1 tamsayı hem de olurlu olması için  $c_0$  parametresinin en uygun biçimde nasıl seçilmesi gerektiği hala bir problemdir. Ancak bu sorun, yakınsamanın kısıt düzleminde kalmasını sağlayacak biçimde yeteri kadar büyük bir değer  $c_0$ 'a atanırsa bertaraf edilebilir. Böylelikle enerji fonksiyonunun Liapunov anlamında azalması, olurlu çözümün maliyetini enküçükleyecek şekilde birim hiperküpün köşelerine doğru hareket etmesini garanti altına alır.

Ancak, Aiyer tarafından önerilen bu değiştirilmiş enerji fonksiyonuna sahip Hopfield ağırlıklarının elektronik devre olarak gösterimi yaklaşımı çok uygun ve ümit verici olmasına rağmen, bilgisayar ortamında benzetiminin oldukça zor olduğu Gee tarafından gösterilmiştir (Gee vd., 1991).

Bununla beraber, eğer  $c_0$ 'ın büyük değerleri için enerji fonksiyonunun (25) enküçüklenmesi ile amaç fonksiyonunun ( $f(\mathbf{x})$ ) en dik inişi arasında bir ilişkilendirme yapılırsa, ağırlıkların benzetimi etkin bir biçimde gerçekleştirilebilir. Nöron  $i$ 'nin içsel durumu  $u_i$  marjinal olarak kısıt düzleminde kaldığında,  $c_0$ 'ın büyük değerleri, aynı şekilde diferansiyel denklemin büyük değerler almasına yol açar. Bu nedenle, büyük zaman adımları sürekli Hopfield ağırlıklarının ayrık-zamanlı benzetiminde kısıt düzlemi civarında dengesiz salınımlara yol

açar. Oldukça küçük zaman adımları kullanıldığında ise benzetim pratiklikten oldukça uzaklaşır.

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \quad (30)$$

Büyük  $c_0$  değerine sınır getirildiğinde,  $\mathbf{x}$  yakınsamanın başından sonuna kadar geçerli altuzaya iliştirilecektir ve ağı dinamikleri  $E=E^k$  olacak şekilde enküçükleyecektir. Sonuçta elde edilen sistemin benzetimi, değiştirilmiş bir ağ kullanılarak verimli bir şekilde gerçekleştirilebilir.

olur. Bu nedenle benzetim yaklaşımının,  $\mathbf{x}$ 'in birim hiperküpün içerisinde kalmasını sağlayacak biçimde  $c_0$ 'a büyük değer vererek kısıt düzlemine iliştirilmesi yoluyla amaç fonksiyonunun en dik inişini gerçekleştirdiği görülebilir. Bu prosedür şu şekilde işler:

Gee'nin önerdiği benzetim yönteminde Hopfield ağının içsel dinamiklerinde, diferansiyel denklemdeki  $(-\mathbf{u}/\eta)$  terimi atılarak küçük bir değişiklik yapılmıştır. Buna gerekçe olarak, bu terimin ağı yakınsamasını bastırması gösterilmiştir (Takefuji, 1992; Smith vd., 1996). Ayrıca, tanjant hiperbolik aktivasyon işlevi yerine,  $\mathbf{x}$ 'in birim hiperküpün içinde kalmasını sağlayan ve aşağıda verilen parçalı doğrusal fonksiyon kullanılmıştır:

$$x_i = g(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_i > 1 \\ u_i & \text{if } 0 \leq u_i \leq 1 \\ 0 & \text{if } u_i < 0 \end{cases} \quad (28)$$

Denklem (29)'da dinamikler en dik iniş yöntemi ile  $E^k$  değerini enküçükler. Herhangi bir rasgele seçilmiş başlangıç çözümü  $\mathbf{x}_0$ 'dan (olurlu olması gerekmez) hareketle, yeni bir çözüm vektörü ( $\mathbf{x}_1$ ) verecek şekilde kısıt düzlemine projeksiyonu gerçekleştirilir.  $\mathbf{x}_1$  birim hiper küpün içerisinde yer almayabileceğinden, doğrusal olmayan parçalı doğrusal fonksiyon aracılığıyla birim hiperküpün içerisinde yer alan yeni bir vektör ( $\mathbf{x}_2$ ) elde edilir. Ancak,  $\mathbf{x}_2$  vektörü kısıt düzleminde olmayabilir. Bu yüzden, bu süreç hem kısıt düzleminde hem de birim hiperküpün içerisinde yer alan bir  $\mathbf{x}_n$  noktası elde edilinceye kadar sürekli tekrarlanır (Şekil 3).

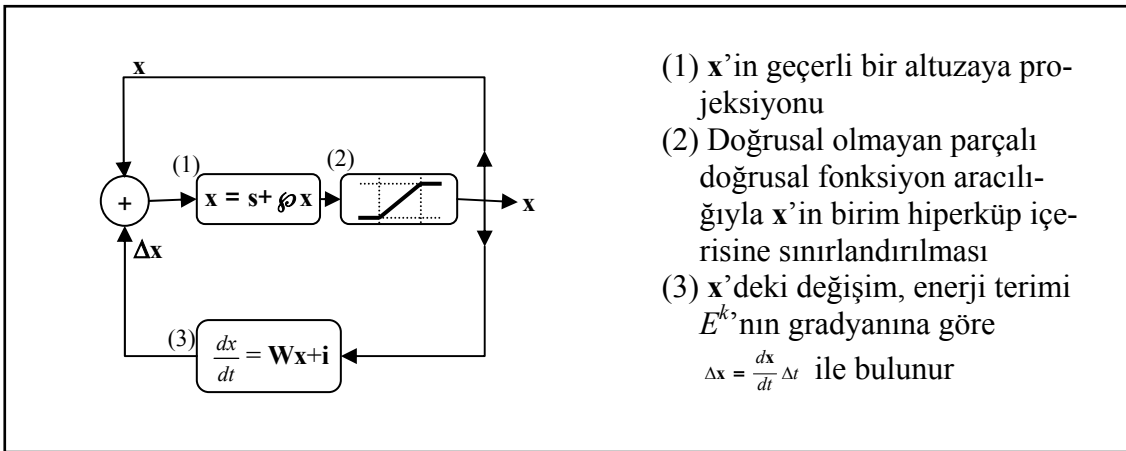
Birim hiperküpün içerisinde  $x_i = u_i$  olduğundan:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = (\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{i}) = -\frac{\partial E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (29)$$

Böyle bir noktaya erişildiğinde, eniyilenmeye çalışılan enerji teriminin ( $E^k$ ) gradyanına göre Denklem (31) kullanılarak değiştirilir. Bu çevrim, maliyet fonksiyonunda iyileşme olmayınca kadar tekrarlanır.

ve büyük  $c_0$  için kısıt düzleminde;

$$\Delta \mathbf{x} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Delta t = (\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{i}) \Delta t \quad (31)$$



Şekil 3. Değiştirilmiş Hopfield ağının gerçekleşmesinin şematik gösterimi



Ayrıca çözüm kalitesini artırmak için, yerel minimumlardan kurtulmayı sağlayan tavlama benzetimi tekniğinde kullanılan mekanizmaya benzeyen bir tepe-tırmanma yaklaşımı kullanılabilir (HN\*):

$$\Delta \mathbf{x} = \alpha(t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \Delta t = \alpha(t) (\mathbf{W}\mathbf{x} + \mathbf{i}) \Delta t \quad (32)$$

Öyle ki,  $\alpha(t)$  parametresi için soğutma çizelgesi:

$$\alpha(t) = \text{random}(k(t), 1) \text{ ve } k(t) = 1 - 2e^{-t/\beta} \quad (33)$$

olarak kullanılmıştır. En dik iniş veya çıkış  $\alpha(t) = \pm 1$  olduğunda gerçekleşir. HN başlangıçta enerjinin rassal olarak artışına izin verir ve zaman ilerledikçe bu artış azalır.  $\alpha(t)$ , +1'e eşit olduğunda HN en dik iniş algoritması gibi davranır.

### Algoritma

Adım 1: Ağ parametrelerini ( $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\Delta t$  ve  $\beta$ ) başlangıç durumuna getir.

Adım 2: HN\* için;  $k(t) = 1 - 2\exp(-t/\beta)$  olarak güncelle ve  $\alpha(t)$ 'yi  $[k(t), 1]$  aralığından rasgele seç.

Adım 3: Nöronları;

$$x_{i,\text{new}} = x_i - \alpha(t) \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta t$$

olarak güncelle ( $\mathbf{x}$ , büyük olasılıkla kısıt düzleminin dışına çıkacaktır)

Adım 4:  $\mathbf{x}$ 'i aşağıdaki yinelemeli prosedüre göre kısıt düzlemine projeksiyonunu yap:

```

While ( $\|\mathbf{x} - (\wp \mathbf{x} + \mathbf{s})\|^2 > \text{limit}$ )
   $\mathbf{x} \leftarrow \wp \mathbf{x} + \mathbf{s}$ 
  For  $i = 1$  to  $N$ 
     $x_i = g(u_i)$ 
  endwhile

```

Adım 5:  $t$ 'yi artır. Eğer  $k(t) = 1$  ve  $\frac{dx_i}{dt} = 0, \forall i$  ise DUR. Yoksa Adım 2'ye git.

### Deneysel sonuçlar

Literatürde Sivil Havacılık Örgütü (Civil Aeronautics Board - CAB) veri seti merkez üslerin konumlandırılması algoritmalarının etkinliklerinin değerlendirilmesinde sıklıkla kulla-

nılmıştır (O'Kelly, 1987). Bu veri setinde şehirler arasındaki akışlar simetriktir ve bu çalışmada 25 şehirlik veriden  $n = 10$ 'luk bir problem seti oluşturularak kullanıldı. Problem setinde farklı transfer maliyetleri (yani, iskonto oranları)  $\alpha = \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0\}$  kullanıldı. Toplama ve dağıtım birim maliyetleri ise sabit olarak  $\chi = \delta = 1$  kabul edildi. Her bir iskonto oranı için, bir düğüm noktasında merkez üs kurmanın sabit maliyeti ise  $f_k \in \{100, 150, 200\}$  olarak belirlendi. Referans maliyet olarak kesin sonuçlar ise Abdinnour-Helm'in çalışmasından türetildi (Abdinnour-Helm, 1998).

HN ve HN\* sonuçlarını başka bir yöntemle de karşılaştırmak için, orijinali Ernst tarafından uygulanan tavlama benzetimi (TB) yaklaşımı merkez üsler problemine uyarlandı (Ernst ve Krishnamoorthy, 1996). TB algoritmasının ilk kontrol parametresi tavlama sıcaklığının ( $T^0$ ) başlangıç değeridir ve aşağıdaki gibi hesaplanabilir (Aarts ve Korst, 1989):

$$\gamma = \frac{m_1 + m_2 \times e^{-\frac{\Delta f}{T^0}}}{m_1 + m_2} \quad (34)$$

Burada,  $\gamma$  (kabul oranı) 0.95 olarak belirlenmiştir. Bu formülasyonda,  $m_1$  maliyette azalmaya yol açan hareketlerin sayısını,  $m_2$  bir önceki adıma göre maliyette artışa neden olan hareketlerin sayısını ve  $\Delta f$  ise  $m_2$  hareketleri için maliyetteki ortalama artışı gösterir. Başlangıç sıcaklığı Markov zinciri için geçici büyük bir sayıya (yapılan deneyde 100.000) eşitlenir. Bir tam Markov zinciri tamamlandıktan sonra, başlangıç sıcaklığı ( $T^0$ ) Denklem (34) kullanılarak hesaplanır. Markov zincirinin uzunluğu  $2np$  ( $n$  problemin büyüklüğü,  $p$  merkez üs sayısı) olarak belirlenir. Tavlama benzetimini  $n = 50$  ve  $n = 5$  için çalıştırıldığında  $T^0$  için 224.000 değeri elde edilmiştir.

Aynı merkez üsse tahsis edilen düğüm noktaları grubu *küme* olarak tanımlanmıştır. TB sezgisel yaklaşımında komşuluk çözümlerini elde etmek için iki ana işlem vardır: 1) rasgele seçilmiş bir düğüm noktasının farklı bir kümeye tahsis edilmesi ve 2) rasgele seçilmiş bir kümeden rasgele

seçilen bir düğüm noktasının bağlantı noktası olarak belirlenmesi (Ernst ve Krishnamoorthy, 1996).

Bu işlemlerden bir tanesi daha önce belirlenmiş bir olasılıkla uygulanır. TB sezgisel yaklaşımının uygulanması esnasında yerel minimumdan kurtulmak için bir yeniden ısıtma mekanizması da kullanılır. Yapılan deneylerde soğutma oranı 0.97 olarak kullanılmıştır.

Deneyler neticesinde elde edilen HN, HN\* ve TB sonuçları Tablo 1’de gösterilmiştir. Hopfield ağı matris işlemlerinden dolayı çok fazla hesaplama zamanı ve hafızaya gereksinim duyduğundan tavlama benzetimi ile hesaplama süresi karşılaştırması yapılmamıştır.

HN ilk yerel minimuma takıldığından bazı durumlar için kötü sonuçlar vermiştir. Ancak HN\* çözüm kalitesini oldukça artırmış ve veri setindeki bütün durumlar için en iyi çözümü bulmuştur. Benzer biçimde, TB sezgisel yaklaşımı da yeniden ısıtma yöntemi sayesinde yerel minimumlara takılmadan optimal çözümlere ulaşmıştır.

## Sonuç

Bu makalede, sonsuz kapasiteli merkez üs konumlandırma problemini çözmek için bir Hopfield ya-

pay sinir ağı modeli önerilmiştir. Çalışmanın amacı; merkez üs sayısını, merkez üslerin konumlarını ve merkez üslere tahsis edilecek düğüm noktalarını bulmada Hopfield ağlarının nasıl kullanılabileceğini göstermekti. Literatürde çok bilinen ve yaygın olarak kullanılan CAB veri seti ile önerilen yapay sinir ağı modelinin performans ve çözüm kalitesini test etmek amacıyla deneyler yapılmıştır. Sonuçlar, tepe tırmanma tipindeki Hopfield ağının (HN\*) normal Hopfield ağına göre çözüm kalitesi açısından daha etkin olduğunu gösterdi. HN\* literatürde yer alan en iyi çözümlerin tamamını bulurken, HN 15 durumdan 13’ünde en iyi çözümü buldu. Sonuçları karşılaştırmak için kullanılan tavlama benzetimi yöntemi de HN\*’de olduğu gibi en iyi çözümlerin tamamını buldu.

Hopfield ağı matris işlemlerinden dolayı çok fazla hesaplama zamanı ve hafızaya gereksinim duyduğundan daha büyük modeller için test yapmak ancak donanım uygulaması ile mümkün olabilir. Gelecekte bu konuda yapılabilecek çalışmalardan birisi, daha büyük modelleri çözebilecek paralel işlem yapabilen ağların tasarlanması ve donanım uygulamalarının gerçekleştirilmesidir.

Tablo 1. Sonuçların karşılaştırılması (n = 10)

$\alpha$	$f_k$	Merkez üs-ler	Optimal	HN	HN*	TB
0.2	100	4, 6, 7	791.93	18.8%	0.0%	0.0%
	150	7, 9	915.99	0.0%	0.0%	0.0%
	200	7, 9	1015.99	0.0%	0.0%	0.0%
0.4	100	4, 6, 7	867.91	15.9%	0.0%	0.0%
	150	7, 9	974.30	0.0%	0.0%	0.0%
	200	7, 9	1074.30	0.0%	0.0%	0.0%
0.6	100	7, 9	932.62	0.0%	0.0%	0.0%
	150	7, 9	1032.62	0.0%	0.0%	0.0%
	200	4	1131.05	0.0%	0.0%	0.0%
0.8	100	7, 9	990.94	0.0%	0.0%	0.0%
	150	4	1081.05	0.0%	0.0%	0.0%
	200	4	1131.05	0.0%	0.0%	0.0%
1.0	100	4	1031.05	0.0%	0.0%	0.0%
	150	4	1081.05	0.0%	0.0%	0.0%
	200	4	1131.05	0.0%	0.0%	0.0%

## Semboller

- $E^k$  : Kesikli Hopfield enerji işlevi  
 $\otimes$  : Kronecker çarpımı  
 $\wp$  : Projeksiyon işlevi  
 $\alpha(t)$  : Soğutma çizelgesi  
 $\beta$  : Tavlamada soğutma parametresi

## Kaynaklar

- Aarts, E.H.L., ve Korst, J., (1989). Simulated annealing and Boltzmann machines, John Wiley & Sons, Essex.
- Abdinnour-Helm, S., (1998). A Hybrid Heuristic for the Uncapacitated Hub Location Problem, *European Journal of Operational Research*, **106**, 489-499.
- Aiyer, S.V.B., Niranjana, M., ve Fallside, F., (1990). A theoretical investigation into the performance of the Hopfield model, *IEEE Transactions on Neural Networks*, **1**, 2, 204-215.
- Aykin, T., (1994). Lagrangian relaxation based approaches hub-and-spoke network design problem, *European Journal of Operational Research*, **79**, 501-523.
- Campbell, J.F., (1994). Integer programming formulations of discrete hub location problems, *European Journal of Operational Research*, **72**, 387-405.
- Campbell, J.F., (1996). Hub location and the p-hub median problem, *Operations Research*, **44**, 923-935.
- Cohen, MA., ve Grossberg, S., (1983). Absolute stability of global pattern and parallel memory storage by competitive neural networks, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **13**, 5, 815-825.
- Drezner, Z. ve Hamacher, H.W., (2002). *Facility Location: Applications and Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 37-81.
- Ebery, J., (2001). Solving large single allocation p-hub problems with two or three hubs, *European Journal of Operational Research*, **128**, 447-458.
- Ernst, A.T. ve Krishnamoorthy, M., (1996). Efficient algorithms for the uncapacitated single allocation p-Hub median problem, *Location Science*, **4**, 139-154.
- Ernst, A.T. ve Krishnamoorthy, M., (1998). Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-Hub median problem, *European Journal of Operational Research*, **104**, 100-112.
- Ernst, A.T. ve Krishnamoorthy, M., (1999). Solution algorithms for the capacitated single allocation hub location problem, *Annals of Operations Research*, **86**, 141-159.
- Gee, A.H., Aiyer, S.V.B. ve Fallside, F., (1991). Neural networks and combinatorial optimization problems-the key to a successful mapping, **CUED/F-INFENG/TR 77**, Cambridge University Eng. Dept.
- Hagan, M.T., Demuth, H.B. ve Beale, M.H., (1996). *Neural network design*. PWS Publishing, Boston.
- Hopfield, J.J. ve Tank, D.W., (1985). Neural computation of decisions in optimization problems, *Biological Cybernetics*, **52**, 141-152.
- Klincewicz, J.G., (1991). Heuristics for the p-Hub location problem, *European Journal of Operational Research*, **79**, 25-37.
- Love, R.F., Morris, J.G. ve Wesolowsky, G.O., (1988). *Facility location: Models and methods*, *Publications in OR*, **7**, North Holland, New York.
- O'Kelly, M., (1987). A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities, *European Journal of Operational Research*, **32**, 393-404.
- O'Kelly, M., Skorin-Kapov, D. ve Skorin-Kapov, J., (1995). Lower bounds for the hub location problem, *Management Science*, **41**, 713-721.
- Skorin-Kapov, D. ve Skorin-Kapov, J., (1994). On tabu search for the location of interacting hub facilities, *European Journal of Operational Research*, **73**, 502-509.
- Smith, K., Palaniswami, M. ve Krishnamoorthy, M., (1996). Neural versus traditional approaches to the location of interacting hub facilities, *Location Science*, **4**, 155-171.
- Takefuji, Y., (1992). *Neural Network Parallel Computing*, Kluwer Academic Publishers, Massachusetts.
- Tank, D.W. ve Hopfield, J.J., (1986). Simple neural optimization networks: An A/D Converter, Signal decision circuit and a linear programming circuit, *IEEE Transactions on Circuit Systems*, **33**, 5, 533-541.
- Topcuoglu, H., Corut, F., Ermiş, M., ve Yılmaz, G., (2005). Solving the uncapacitated hub location problem using genetic algorithms, *Computers and Operations Research*, **32**, 4, 967-984.