

# Nokta kuyruk modellemesi için bir dinamik düğüm noktası modeli

Hilmi Berk ÇELİKOĞLU \*, Ergun GEDİZLİOĞLU

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Ulaştırma Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Bu çalışmada; karayolu ağlarında akım yayılımını modelleyen ve bir dinamik ağ yükleme sürecinde tümleşik olarak kullanılabilen analitik bir dinamik düğüm noktası modeli yardımıyla, bağ girişlerinde meydana gelen nokta kuyruklanmanın modellemesi yapılmıştır. Önerilen dinamik düğüm noktası modelinin; bağ çıkış formülasyonu temelli bir karma-boyut bağ modeli bileşeni ve akım korunumu, kapasite, akım dağılımı ve negatif olmama kısıtlarını içeren bir düğüm noktası kuralları bileşeni vardır. Oluşturulan dinamik düğüm noktası formülasyonu, belirlenen kısıtlar altında benzetim yoluyla çözülmüştür. Nokta kuyruk varsayımı ile oluşturulan bağ modeli bileşeni; aşırı-doygun trafik akım durumunu değerlendiren bir yapıdadır. Zaman boyutunda yapılan ayrıklaştırma, aşırı-doygun duruma ilişkin konulan kapasite kısıtı ve düzgün ivmelenen taşıt hareketi varsayımı ile oluşturulan bağ modeli bileşeni, gerçekçi trafik akım dinamiklerinin temsiline olanak sağlamıştır. Bağ modeli ile belirlenen akımlar, düğüm noktası bileşenine girdi olmaktadır. Akımların düğüm noktası bileşeninde, önceden tanımlı dağılım oranları ve ayrılan bağ özellikleri ile işlenmesi ile ayrılan bağ giriş akımları hesaplanır. Modellenen nokta kuyrukların; i) kapasitenin aşıldığı herhangi durumda ve ii) modeli çözmek için zaman düzeyinde yapılan ayrıklaştırmaya bağlı olarak, bir önceki hesaplama anından arta kalan akım hacmi varolduğu durumda belirlediği varsayılmıştır. Nokta kuyruk modellemesi için önerilen yeni dinamik düğüm noktası modeli, karma-boyut yaklaşımı temeli üzerinde yapılandırılmış tek düğüm noktası modelidir. Yeni modelin aşırı-doygunlukta gerçekçi sonuçlar verdiği görülmüştür.*

**Anahtar Kelimeler:** Ulaştırma ağı, trafik akımı, düğüm noktası modeli, benzetim.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Hilmi Berk ÇELİKOĞLU. hbcelikoglu@ins.itu.edu.tr; Tel: (212) 285 37 98.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Ulaştırma Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "A dynamic node model for highway networks " adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 13.12.2006 tarihinde dergiye ulaşmış, 11.01.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 01.02.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## A dynamic node model for point queue modelling

### Extended abstract

*Point-queuing and physical queuing are the two main assumptions that have been made in problems of Dynamic Network Loading (DNL) in order to model link and network performances. The queue spillback can only be captured by physical-queue approach, which is more realistic. Accordingly, the recent trend on traffic flow modeling for Dynamic Traffic Assignment (DTA) is to propose models with physical-queue assumption. However capturing the effects of physical-queuing in DNL modelling brings difficulties in obtaining an optimal solution of a DTA problem. As an alternative, the point-queue assumption handles vehicles as points without physical lengths. The storage capacity of each link can be ignored. The queue spillback on a link can be simulated by assuming the existence of a buffer area in the initial node of the link, for the temporary storage of vehicles exceeding the maximum density. Therefore, all links can contain unconstrained number of vehicles and capacity constraint on a link can be applied without numerical and computational difficulties. Moreover, the outflow rate of a link is only affected by its own flow considering that the downstream links will always have sufficient storage capacities. In the literature, point-queue assumption has been made in a varying structure of flow models adopting both exit-flow function approach, and in travel time function approach to perform DNL.*

*In this paper, a mesoscopic dynamic node model for network loading is proposed, based on discrete packets, to model the point-queue process on a highway node with multiple merging and diverging links. The model is run using theoretical input data to simulate point-queuing in over-saturation condition. The presented dynamic node model has two components; a mesoscopic link model set with an exit link function formulation, and an algorithm written with a set of node rules considering the constraints of conservation, capacity, flow splitting rates and non-negativities. First, the time-varying flows that enter to multiple merging links (inflows) simultaneously are input to the mesoscopic link model.*

*The link model component is developed by both considering the over-saturation phenomenon and improving the computational efficiency on a previously*

*proposed link model. This model, is set out with link exit function formulation, discretisation on time dimension, defining capacity constraint rules for over-saturated states and uniformly accelerated speed assumption, which allows a realistic representation of outflow dynamics. Model has an iterative structure, which enables convergence to any target performance criteria with the coded algorithm. The flows that exit from these merging links (outflows) are computed regarding the link and flow characteristics. Then outflows of the merging links are input to a node as inflows. These conflicting flows are processed within the node component with predefined splitting rates and characteristics of the diverging links, and then the nodal exiting flows are computed. The main difference of the proposed dynamic node model in comparison to other models is that it respects capacity constraints regarding to splitting rules and consequently holds first-in-first-out rule. For the link model component of integrated model structure has been set out with the point-queuing assumption, the point-queues and the delays calculated in the presence of these vertical queues are considered instead of the physical queues and the delays occurring as a result of over-saturation.*

*The node model problem is formulated as to maximize the total flow passing through the node subject to the constraints of conservation, capacity, flow splitting rates and non-negativities. The optimization problem is solved by simulation within the modelling horizon. Simulation process of the proposed model lasted as the inflows to merging links are wholly discharged from the entire node structure.*

*The integrated model structure provided more realistic results in representing outflow dynamics. It is seen that the outflows of the link model component existed respecting to capacity constraints and the diagrams of these outflows seemed alike the sinusoidal inflow curves under the set node configuration. Despite the flows requiring to enter the diverging links are above over-saturation rates, the capacity restraint is respected. The results show that the model appears realistic in the representation of point-queuing process and diverging link flow dynamics, and is quite easy to calculate. The future extension of this study will be on the application of the proposed model to a general network.*

**Keywords:** *Traffic networks, traffic flow, node model, simulation.*

## **Giriş**

Dinamik Ağ Yükleme (DAY) problemi; zaman-bağımlı yol talep akımlarından, zaman-bağımlı akım hacmi, yoğunluk ve hız değişkenlerinin gösterimini ifade eder. DAY modelleri, verilen bir ağ üzerindeki taşıtların, başlangıç düğüm noktasından varış düğüm noktasına olan zaman-bağımlı yol tercihleri şeklinde tanımlanan Dinamik Trafik Atama (DTA) probleminin ayrılmaz bir bileşenidir. DAY problemi, pek çok farklı model yapısı içerisinde çalışılmaktadır. Model yapısındaki çeşitlenme, problemi çözmek için yapılan varsayımlara bağlıdır. Bağ temelli ve düğüm noktası temelli olarak kümelendirilebilir. Çok sayıda bağ temelli DAY modeli olmasına karşın, düğüm noktası temelli modellerin sayısı çok azdır. DAY problemlerini çözmek ve bağ ile ağ başarımlarını modellemek için yapılan iki temel kuyruklanma varsayımı vardır. Bunlar; nokta kuyruklanma ve fiziksel kuyruklanma varsayımlarıdır. DAY modelleri; DTA'nda kullanılmak üzere nokta-kuyruklanma ve fiziksel-kuyruklanma olmak üzere iki varsayımına göre oluşturulmuştur. Nokta-kuyruk yaklaşımı ile oluşturulan modeller, kuyruk dağılımı olgusunu irdeleyemez. Dolayısıyla, kuyruk dağılımlarını modelleyebilen fiziksel-kuyruk modelleri daha gerçekçidir. Fakat fiziksel-kuyruk etkisinin modellenmeye çalışılması, atama söz konusu olduğunda ideal dinamik kullanıcı optimali (Ran ve Boyce, 1996) çözümünü elde etmeyi zorlaştırır. Bu ise fiziksel kuyruk varsayımının yapıldığı DTA problemlerine yönelik geliştirilen algoritmaların yakınsaması üzerinde güçlükler meydana getirir. (Lo ve Szeto, 2002). Akım içerisindeki fiziksel kuyrukların etkilerini modellemenin; sonuçta elde edilen güzergah seçimi yapısını değiştirmesinin ve çözüm elde etmeyi zorlaştırmasının yanısıra DTA problemine ilişkin özellikleri değiştiriyor olması götürüleri vardır. Ayrıca bu çaba, algoritmik gelişmeyi, ulaşım ağı tasarımını ve ağ başarımlarını tahmini de zorlaştırır (Lo ve Szeto, 2002).

Bağ uzunlukları ve kapasiteleri yeterince fazla olan yollarda akım yayılımı modellemesi için geçmişteki pek çok çalışmada nokta kuyruk varsayımı yapılmıştır. Çoğu bağ temelli olan bu modeller iki farklı başarımlar fonksiyonu üzerinde

geliştirilmiştir. Bağ çıkış fonksiyonu kullanılarak geliştirilen nokta kuyruk modellerine örnek olarak Merchant ve Nemhauser (1978a, b), Carey (1987, 1990), Friesz ve diğerleri, (1989), Lam ve Huang (1995), Wie ve diğerleri (1994), ve Yang ve Huang (1997)'in çalışmaları gösterilebilir. Yolculuk zamanı fonksiyonu kullanılarak geliştirilen nokta kuyruk modellerine ise örnek olarak Ran vd. (1993), Friesz vd. (1993), Astarita (1995, 1996), Wu vd. (1998), Xu vd. (1999), Zhu ve Marcotte (2000) ve Carey vd. (2003)'nin çalışmaları gösterilebilir. Fiziksel kuyruk varsayımı yapılarak önerilmiş düğüm noktası temelli modellere kıyasla (Daganzo 1995; Kuwahara ve Akamatsu, 2001; Rubio-Ardanaz vd., 2003), nokta kuyruk varsayımı ile önerilen düğüm noktası temelli modeller (Dell'Orco vd., 2005; Celikoglu, 2006a) çok az sayıdadır.

Yukarıda anlatılan eksikliklerden dolayı bu çalışmada; sinyalizasyon olmayan bir karayolu düğüm noktasındaki nokta kuyruklanmaların benzetimini yapan, nokta kuyruk varsayımı ve karma-benzetim yaklaşımı ile oluşturulmuş bir Dinamik Düğüm Noktası (DDN) modeli irdelenmiştir. Önerilen model; çoklu katılan ve ayrılan bağları olan örnek bir düğüm noktası düzeni üzerinde kuramsal veri yardımıyla sınanarak aşırı-doygun hallerdeki nokta kuyruk benzetimini yapmıştır. Önerilen modelin genel yapısı, bağ modeli bileşeni ve düğüm noktası kurallarını irdeleyerek ikinci bölümde açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, önerilen DDN modelinin geçerlilik sınaması özetlenmiştir. Çalıştırılan model sonuçlarının değerlendirilmesi son bölümde yapılmıştır.

## **Dinamik düğüm noktası modeli**

Önerilen DDN modelinin iki bileşeni vardır. Bağ bileşeni olarak temel alınan (Dell'Orco, 2006) ve farklılaştırılarak kullanılan model, karma-benzetim yaklaşımı ile bağ çıkış başarımlar fonksiyonu üzerinde yapılandırılmıştır. Önce kuramsal olarak üretilen dinamik akım hacmi, katılan bağlara giren akım olarak karma-benzetim bağ modeline girdi oluşturmuştur. Bağ modeli bileşeni ile; katılan bağlardan çıkan akım hacmi bağ ve akım özellikleri dikkate alı-

narak hesaplanmıştır. Daha sonra; katılan bağlardan çıkan akım hacmi, ayrılan bağlara giren akım hacmi olarak düğüm noktası modeline gir-di oluşturmuştur. Düğüm noktasında çatışan akımlar, daha önceden tanımlanmış dağılım oranları ve bağ kapasiteleri dikkate alınarak işlenmiştir. Sonuç olarak, ayrılan bağlara giren akım hacimleri hesaplanmıştır. Düğüm noktasında kapasite kısıtına bağlı meydana gelen gecikmeler, Spiess (1990) tarafından önerilen ve istenilen özelliklere sahip bir konik gecikme fonksiyonu ile hesaplanmıştır.

### Karma-benzetim bağ modeli

Karma-benzetim modellerinde; taşıtların, ayrık taşıt kümeleri olarak gruplandırıldığı ya da sürekli taşıt kümeleri içerisinde yayıldığı varsayımı yapılır. Karmabenzetim uygulamalarında sıkça kullanılan modellerde taşıtlar, ayrık taşıt kümeleri boyutunda gruplandırılır ve herbir taşıt kümesi, tek bir taşıtmış gibi ele alınır (Leonard vd., 1989). Bu modeller taşıt kümeleri, bağa giriş zamanlarına göre düzenlenmiştir. Taşıt kümelerinin bağ üzerindeki yolculuk süreleri ise; düğüm noktalarındaki kayıpların, bağ üzerindeki mevcut akım hacminin bir fonksiyonu olduğu varsayılarak hesaplanır. Bağa giren ya da bağdan çıkan akımların, uygun zaman aralıklarında eklenmesi ya da çıkarılması ile bağdaki akım hacmi hesaplanır. Bu çalışmanın bağ bileşeni kapsamında değerlendirilen model, bağ çıkış akım fonksiyonu yöntemi kullanılarak, zaman boyutu ayrıklaştırılarak, ortalama bir hız atamak yerine taşıt gruplarını düzgün ivmelendirerek ve aşırı doygun akımlar için kapasite kısıt kuralları belirleyerek oluşturulmuştur. Modelin; belirlenen bir başarımlı ölçütünü sağlayacak şekilde, bir algoritma yardımıyla hesaplanan döngüsel bir yapısı vardır. Kullanılan karmabenzetim modelinde; ayrık taşıt kümesi içerisindeki taşıtların tamamının, kümenin ön kısmında gruplandırıldığı ve yalnız tek kullanıcı sınıfı olduğu varsayımı yapılmıştır. Aşağıda sıralanan kabullere göre, hız ile yoğunluk arasında geçerli bir ilişki olduğu söylenebilir.

- Bağ üzerindeki tüm taşıt grupları için hız değeri aynıdır.

- Taşıtların hareketleri, üniform olarak ivmelendirilmiştir.
- Taşıtlar, herbir taşıt kümesinin ön kısmında gruplanmıştır.

*Bağ modeli bileşeninin kuramsal yapısı* - P, ağ üzerindeki olası güzergahlar kümesi olmak üzere, aynı j zaman aralığında ayrılan ve aynı p ( $p \in P$ ) güzergahını izleyen taşıtlar kümesi (j, p) olsun. Buna göre bağ modeli değişkenleri aşağıda sıralanmıştır.

- $m_{j,p}$  : (j, p) taşıt kümesindeki toplam taşıt sayısıdır.
- $a^i(t)$  : [t, t+Δt] zaman aralığında i bağı üzerindeki tüm taşıtlar için aynı ve sabit olan ivme değeridir.
- $n_{j,p}^i(t)$  : i bağında t anında bulunan (j, p) taşıt kümesine ait taşıt sayısıdır.
- $s_{j,p}^i(t)$  : t anında (j, p) taşıt kümesinin ön kısmının i bağı üzerindeki konumudur. Eğer (j, p) taşıt kümesi i bağı üzerinde değilse,  $s_{j,p}^i(t)$  nin değeri 0 olur.
- $n^i(t)$  : t anında i bağı üzerindeki taşıt kümelerine ait toplam taşıt sayısıdır.
- $k^i(t)$  : t anında i bağı üzerindeki yoğunluk değeridir.
- $N^i(t)$  : kapasite kısıtına bağlı olarak t anında i bağından çıkan toplam taşıt sayısıdır.
- $N^i(t)$  : kapasite kısıtına bağlı olarak t anında i bağından çıkamayan (bağda kalan) toplam taşıt sayısıdır.
- $d^i$  : i bağının uzunluğudur.
- $V^i(t)$  : t anında i bağı üzerinde bulunan tüm taşıtlar için aynı olan hız değeridir.
- $w^i(t)$  : t anında i bağından çıkan hacimdir.

Hızın, ortalama yoğunluk  $k^i(t)$  nin bir fonksiyonu olduğu kabulü yapılmıştır ( $V^i(t) = V(k^i(t))$ , ve  $k^i(t) = n^i(t)/d^i$ ). Dolayısıyla, bir önceki bölümde verilen varsayımlar da dikkate alınarak bir bağ üzerindeki toplam taşıt sayısı (1) bağıntısında verildiği gibi hesaplanabilir.

$$n^i(t) = \sum_{p \in P} \sum_{j \leq t} n_{j,p}^i(t) \quad (1)$$

Hız ile yoğunluk arasında geçerli bir ilişki (Greenshields, 1935) olduğu varsayılarak  $V^i(t)$ ,  $n_{j,p}^i(t)$ , ve  $s_{j,p}^i(t)$  değişkenlerinin yardımıyla; (2), (3), (4) ve (5) numaralı bağıntılar ile verilen ilişkiler serisi yazılabilir.

$$s_{j,p}^i(t) = s(V^i(t - \Delta t), V^i(t), s_{j,p}^i(t - \Delta t)) \quad (2)$$

$$n_{j,p}^i(t) = n(s_{j,p}^i(t), s_{j+1,p}^i(t)) \quad (3)$$

$$N^i(t) = N(\overline{N^i(t - \Delta t)}, n^i(t)) \quad (4)$$

$$V^i(t) = V(N^i(t)) \quad (5)$$

Burada;  $j > t$  iken  $n_{j,p}^i(t) = 0$  ve  $s$ ,  $n$  ve  $V$  sürekli fonksiyonlardır.  $t$  anında  $i$  bağından çıkan akım hacmi  $w^i(t)$ , (6) bağıntısında gösterildiği gibi  $N^i(t)$ 'nin bir fonksiyonu olarak ifade edilir.

$$w^i(t) = w(N^i(t)) \quad (6)$$

(5) bağıntısı ile hesaplanan hız değeri, taşıt kümesinin ardındaki taşıt sayısına da bağlıdır. Bu varsayımın etkisi,  $\Delta t \rightarrow 0$  yaklaşırken daha azalmaktadır. Değişkenlere ilişkin toplulaştırmalar yapıldığı için, tüm karmabenzetim modellerinde bu eksiklik vardır. Bu varsayıma göre; (3) bağıntısı ile verilen taşıt sayısı  $n_{j,p}^i(t)$ , artık yalnızca  $s_{j,p}^i(t)$ 'nin bir fonksiyonudur ve (7) bağıntısında gösterildiği gibi yalnızca iki değer alabilir.

$$n_{j,p}^i(t) = \begin{cases} s_{j,p}^i(t) = 0 \Rightarrow 0 \\ s_{j,p}^i(t) > 0 \Rightarrow m_{j,p} \end{cases} \quad (7)$$

Dolayısıyla, oluşturulan modele ait ilişkiler; (8), (9), (10), (11), (12) ve (13) bağıntılarında verildiği gibi düzenlenir.

$$s_{j,p}^i(t + \Delta t) = s(V^i(t), V^i(t + \Delta t), s_{j,p}^i(t)) \quad (8)$$

$$n_{j,p}^i(t + \Delta t) = \begin{cases} s_{j,p}^i(t + \Delta t) = 0 \Rightarrow 0 \\ s_{j,p}^i(t + \Delta t) > 0 \Rightarrow m_{j,p} \end{cases} \quad (9)$$

$$n^i(t + \Delta t) = \sum_{p \in P} \sum_{j \leq t} n_{j,p}^i(t + \Delta t) \quad (10)$$

$$N^i(t + \Delta t) = N(\overline{N^i(t)}, n^i(t + \Delta t)) \quad (11)$$

$$V^i(t + \Delta t) = V(N^i(t + \Delta t)) \quad (12)$$

$$w^i(t + \Delta t) = w(N^i(t + \Delta t)) \quad (13)$$

Temel fizik yasalarına göre hız ve alınan yola ilişkin ifadeler, (14) ve (15) bağıntılarında verildiği gibidir.

$$V^i(t + \Delta t) = V^i(t) + (a^i(t) \cdot \Delta t) \quad (14)$$

$$s_{j,p}^i(t + \Delta t) = s_{j,p}^i(t) + V^i(t)\Delta t + \frac{1}{2} a^i(t)\Delta t^2 \quad (15)$$

(8), (9), (10), (11), (12) ve (13) bağıntıları ile ifade edilen model, hız değişkeni  $V^i(t + \Delta t)$ 'ye ait (12) ve (14) bağıntıları ile hesaplanan iki farklı ile bir sabit-nokta problemidir. Çalışmada sabit-nokta problemi, "başarılı ortalamalar yöntemi" adı verilen algoritma (Cascetta, 2001) kullanılarak dögüsel bir yapı içerisinde çözümlenmiştir. Hız değeri önce (14) bağıntısı ile hesaplanır. Daha sonra (8)-(13) bağıntıları ile tanımlanan modele atanır.  $V_y^i(t + \Delta t)$ ;  $i$  bağı üzerinde,  $t + \Delta t$  anındaki hızın,  $y^{inci}$  dögüdeki değerini göstermek üzere, hız değeri (16) bağıntısında verilen algoritma ile hesaplanabilir.

$$V_{y+1}^i(t + \Delta t) = \left( \frac{1}{y} \cdot V(N(n(s(V_y^i(t + \Delta t)))) \right) + \left( \frac{(k-1)}{k} \cdot (V_y^i(t + \Delta t)) \right) \quad (16)$$

Dögü; verilen algoritmayla hesaplanan ardışık iki hız değeri arasındaki fark, istenen değere geldiğinde durdurulmuştur. Elde edilen hız değerleri ile hesaplanan yeni ivme değeri (17) bağıntısında verildiği gibi elde edilir.

$$a^i(t + \Delta t) = \frac{(V^i(t + \Delta t) - V^i(t))}{\Delta t} \quad (17)$$

Önerilen yeni modele ait temel akım hacmi kısıtı kuralı, model içerisinde hesaplanan akım hacmi değeri ile bağa atanan kapasite değerinin karşılaştırılmasını gerektirir.  $C^i$ ,  $i$  bağının kapasitesi olmak üzere; anlatılan döngüsel süreç içerisinde, bir bağ üzerindeki taşıt sayısı, kapasite kısıtına göre düzeltilir.

### Düğüm noktası kuralları bileşeni

Önerilen DDN modelinin düğüm noktası kuralları bilşeni Çelikoğlu (2006b)'nin çalışmasında oluşturulan ve başka bir çalışmada da kullanılan (Celikoglu, 2006a) bağıntılardan türetilmiştir. DN modelinde kullanılan bazı değişkenler ve bunların gösterimi aşağıdaki gibidir.

- $FW_k$  :  $k$  düğüm noktasından ayrılan bağlar kümesidir.
- $BW_k$  :  $k$  düğüm noktasına katılan bağlar kümesidir.
- $i$  :  $k$  düğüm noktasına katılan bağlar kümesine ait bir bağ ( $i \in BW_k$ ).
- $r$  :  $k$  düğüm noktasından ayrılan bağlar kümesine ait bir bağ ( $r \in FW_k$ ).
- $w^{ik}(t)$  :  $i$  bağından çıkıp,  $k$  düğüm noktasına  $t$  anında giren akım hacmidir ( $i \in BW_k$ ).
- $u^{kr}(t)$  :  $k$  düğüm noktasından çıkıp,  $r$  bağına  $t$  anında giren toplam akım hacmidir ( $r \in FW_k$ ).
- $w^{ikr}(t)$  :  $k$  düğüm noktasından geçip,  $t$  anında  $r$  bağına girmek için  $i$  bağından çıkmaya hazır akım hacmidir ( $i \in BW_k$  ve  $r \in FW_k$ ).
- $u^{ikr}(t)$  :  $i$  bağından çıkıp,  $k$  düğüm noktasından geçip,  $t$  anında  $r$  bağına giren akım hacmidir ( $i \in BW_k$  ve  $r \in FW_k$ ).
- $C^r$  :  $r$  bağının kapasitesidir ( $r \in FW_k$ ).
- $NK^r(t)$  :  $r$  bağ girişinde,  $t$  anındaki nokta-kuyruğa ait taşıt sayısıdır ( $r \in FW_k$ ).
- $G^r(t)$  :  $t$  anında  $r$  bağında, kapasite kısıtına ve varolan nokta-kuyruğa bağlı olarak meydana gelen gecikmedir ( $r \in FW_k$ ).
- $\alpha^{ir}$  : Katılan bir  $i$  bağından, ayrılan bir  $r$  bağına geçen akım hacmi dağılım faktörü ( $i \in BW_k$  ve  $r \in FW_k$ ).

DDN modelini sınamak için; düğüm noktaları kümesi  $k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , yönlenmiş katılan bağlar kümesi  $i$ , ayrılan bağlar kümesi  $r$

( $i \in BW_k$ )  $\cup$  ( $r \in FW_k$ )  $\subset I$  ile oluşturulmuş bir ulaştırma ağı,  $\Omega = (N, I)$ , yapısı ele alınmıştır. Trafığın,  $o$  olan DN'ndan ( $o \in O$  ve  $O \subset N$ ) ayrılıp,  $d$  olan ( $d \in D$  ve  $D \subset N$ ) DN'na vardığı varsayılmıştır. Böylece, bir başlanıç-son ( $o-d$ ) çifti olan  $rs$  ( $rs \in R \subset (O * D)$ ) elde edilir. Güzergahlar kümesi  $p$  ( $p \in P_{rs}$ ),  $rs$   $o-d$  çiftini birbirine bağlar ve zamana göre değişken talep akım hacmi  $D_{rs}(t)$  bu güzergahları kullanır. Modelin sınaması tek bir DN üzerinde yapıldığı için, güzergah akımlarının bilindiği varsayılmıştır. Dolayısıyla, değişken gösterimlerinde başlanıç-son indeksi kullanılmamıştır. Trafığın, başlanıç noktalarından  $[0, T]$  zaman aralığında ayrılır ve tüm trafik varış noktalarına  $[0, T']$  zaman aralığında varır ( $T' > T$ ). Bunlara göre;  $t$  anında,  $i$  baği üzerinde zamana göre değişken giren hacim  $u^i(t)$  ve çıkan hacim  $w^i(t)$  sırasıyla (18) ve (19) bağıntılarında verildiği gibi hesaplanabilir.

$$u^r(t) = \sum_{i \in BW_k} u^{ikr}(t) \quad (18)$$

$$w^i(t) = \sum_{r \in FW_k} w^{ikr}(t) \quad (19)$$

DN'nı modellemek için DN bileşeninde; kullanılan akım hacmi modeli kısıtlarına ek olarak, DN'ndan dağılımlara ilişkin akım hacmi korunumu ve kapasiteye ilişkin kısıtlar belirlenmiştir. Çalışma kapsamında oluşturulan modelin DN dağılım kurallarına ilişkin bileşenin, var olan diğer modellerden temel farklılığı kapasite kısıtı koşulunu sağlıyor olması ve dolayısıyla da ilk-giren-ilk-çıkart (İGİÇ) düzenine uyum gösteriyor olmasıdır. Önerilen tümleştirilmiş modelin bağ modeli bileşenin, nokta-kuyruk varsayımı yapılarak oluşturulmasından dolayı, bağ üzerinde aşırı doyguluk ve yoğunluktan meydana gelen fiziksel kuyruklanmalar ve gecikmeler yerine, nokta kuyruklanmalar ve bunlara bağlı gecikmeler irdelenmiştir. Dolayısıyla bir nokta kuyruk oluşması için gerek ve yeterli koşul:

- Kapasitenin aşıldığı herhangi durum,
- Modeli çözmek için zaman düzeyinde yapılan ayrıklaştırmaya bağlı olarak, bir önceki

hesaplama anından arta kalan akım hacmi varolduğu durumdur.

Ayrılan her bir bağ üzerindeki akım düzenine ait gecikmeler Spiess (1990)'in önerdiği konik gecikme fonksiyonu ile hesaplanmıştır. Dikkat edilmesi gereken önemli bir nokta; yalnızca ayrılan bağların kapasitelerinden kaynaklanan gecikmelerin var olduğudur. DN'ndaki akım çatışmalarından kaynaklanan gecikmeler, bu aşamada dikkate alınmamıştır. İrdelenen örnek DN'nın sinyalizasyon olmayan bir düzende olduğu ve ayrıca, çatışmadan kaynaklanan gecikmelerin, kapasite kısıtına bağlı meydana gelen gecikmelere göreli olarak çok düşük olduğu düşünüldüğünde, yapılan varsayımın tutarlı olduğu görülmektedir.

Ayrılan bağlarla ilişkin bir kapasite kısıtı;  $\forall i \in BW_k$  ve  $\forall r \in FW_k$  olmak üzere bir  $r$  bağına giren toplam akım hacminin, en fazla o bağın kapasitesi kadar olabileceğidir (bağıntı 20):

$$u^{kr}(t) = \sum_{i \in BW_k} w^{ikr}(t) \leq C^r \quad (20)$$

Akım korunumu yasasına göre;  $t$  anında  $k$  düğüm noktasından  $r$  bağlarına dağılan akım hacimleri toplamı,  $\forall i \in BW_k$  ve  $\forall r \in FW_k$  olmak üzere  $t$  anında  $k$  DN'na  $i$  bağlarından giren akım hacmi toplamından fazla olamaz (bağıntı 21):

$$\sum_{r \in FW_k} u^{kr}(t) \leq \sum_{i \in BW_k} w^{ik}(t) \quad (21)$$

Modelde kapasite kısıtı olduğu ve akım çatışmalarından kaynaklanan gecikme olmadığı dikkate alınarak, ayrılan bağlardaki toplam akım hacmi (22) bağıntısındaki gibi ele alınmıştır:

$$\sum_{r \in FW_k} u^{kr}(t) = \begin{cases} \sum_{i \in BW_k} w^{ik}(t) \leq \sum_{r \in FW_k} C^r \Rightarrow \sum_{i \in BW_k} w^{ik}(t) \\ \sum_{i \in BW_k} w^{ik}(t) > \sum_{r \in FW_k} C^r \Rightarrow \sum_{r \in FW_k} C^r \end{cases} \quad (22)$$

DN'nı modelleme sürecinin tamamı  $[0, T_\infty]$  düşünüldüğünde ise,  $t \in [0, T]$ ,  $\forall i \in BW_k$  ve  $\forall r \in FW_k$  olmak üzere (21) ile verilen kısıt, ko-

runum bağıntısı olarak (23) ile verilen eşitliği sağlamalıdır.

$$\sum_{t \in T} \sum_{r \in FW_k} u^{kr}(t) = \sum_{t \in T} \sum_{i \in BW_k} w^{ir}(t) \quad (23)$$

DN'na katılan belirli bir  $i \in BW_k$  bağından çıkıp, DN'ndan ayrılan belirli bir  $r \in FW_k$  bağına geçmek isteyen kullanıcının, başka bir  $r$  bağına yönlendirilemeyecek olmasından dolayı, katılan bağlardan ayrılan bağlara olan akım dağılım oranları sabittir.  $BW_k$  ve  $FW_k$  bağ kümeleri arası aktarılan akım hacim oranlarının bilindiği varsayımıyla, DN'ndan dağılım oranları hesaplanabilir. Genel olarak; bir  $i$  bağından her bir  $r$  bağına dağılan akımlara ilişkin dağılım oranları  $\alpha^{ir}$ , (24) ifadesindeki gibi hesaplanabilir. Korunum yasasına göre de, katılan akımların tamamının ayrıldığı düşünüldüğünde (25) ifadesi yazılabilir. Burada  $\alpha^{ir}$  nin hesaplanma yönteminin İGİÇ düzenine uyulacağı anlaşılmaktadır.

$$\alpha^{ir} = \frac{u^{ikr}(t)}{w^{ik}(t)}, \quad \alpha^{ir} \geq 0 \quad (24)$$

$$\sum_{r \in FW_k} \alpha^{ir} = 1 \quad (25)$$

(24) ve (25) bağıntıları ile verilen ilişkiler; bu çalışmada önerilen kapasite kısıtı dikkate alınarak uyarlandığında, doyumluk-altı ve aşırı-doygun durumlar için  $\alpha^{ir} \geq 0$  olmak üzere (26) bağıntısı ile verilen farklı dağılım oranlarını dikkate almayı gerektirmiştir.

$$\alpha^{ir} = \begin{cases} \sum_{i \in BW_k} w^{ikr}(t) \leq C^r \Rightarrow \frac{u^{ikr}(t)}{w^{ik}(t)} \\ \sum_{i \in BW_k} w^{ikr}(t) > C^r \Rightarrow \frac{C^r}{w^{ik}(t)} \end{cases} \quad (26)$$

Ayrılan bir bağa giren toplam akım hacminin, bu bağın kapasitesini aşmadığı durumlarda (25) bağıntısı geçerli olacaktır. Söz edilen toplam akım hacminin kapasiteyi aştığı durumlarda ise (27) bağıntısı geçerli olacaktır.

$$\sum_{r \in FW_k} \alpha^{ir} < 1 \quad (27)$$

Bağ girişinde oluşacak olası bir NK boyu, bu bağa giremeyen toplam taşıt sayısına eşittir. Benzetim yapılırken  $t=0$  anında bağ girişlerinde kuyruklanma olmadığı varsayılır.

Trafik ataması yöntemlerinin çoğunda, bağ kapasitesine bağlı olarak yolculuk zamanı üzerinde meydana gelen gecikmeler, akım hacminin bir fonksiyonu olarak ifade edilir. Bu fonksiyonlar  $G(\cdot)$  genellikle; serbest-akım hızı ile tıkanıklığı ifade eden bir fonksiyonun  $f(\cdot)$  çarpılması ile tanımlanır. Tıkanıklık genellikle, akım hacmi/kapasite değişkeninin bir fonksiyonu olarak ifade edilir:

$$G^r(\omega^r(t)) = t_{sa}^r \cdot f(\omega^r(t)) \quad (28)$$

Burada;  $t_{sa}^r$  serbest akım yolculuk hızıdır. Tıkanıklık fonksiyonu değişkeni  $\omega$ , akım hacmi/kapasite oranıdır. Yapılan nokta-kuyruk varsayımına da bağlı olarak, bu çalışmada tıkanıklığı ifade etmek için kullanılan değişken, ayrılan bir bağa girmek için DN'ndan ayrılan akım hacmi  $u^{kr}(t)$ 'dir. Gecikme fonksiyonu olarak ise, istenilen matematik özelliklere sahip bir konik tıkanıklık fonksiyonu içeren gecikme fonksiyonu kullanılmıştır (Spiess, 1990):

$$f\left(\frac{u^{kr}(t)}{C^r}\right) = 2 + \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{u^{kr}(t)}{C^r}\right)^2 + b^2} - a \left(1 - \frac{u^{kr}(t)}{C^r}\right) - b \quad (29)$$

Burada  $b$ ,  $(2a-1)/(2a-2)$ 'ye eşit ve  $a$  da 1'den büyük herhangi bir sayıdır. "a" parametresi, kapasiteye yaklaştıkça tıkanıklık etkisinin ne derece ani değiştiğini ifade eden bir parametredir. NK varsayımına göre,  $t$  anında  $r$  bağı girişinde kapasite kısıtına bağlı tıkanıklık değeri  $f^r(t)$  (30) bağıntısı ile belirlenir.

$$f^r(t) = \begin{cases} PQ^r(t) = 0 & \Rightarrow 0 \\ PQ^r(t) > 0 & \Rightarrow f(\omega^r(t)) \end{cases} \quad (30)$$

Dikkat edilmesi gereken, eğer NK yoksa kapasiteye bağlı gecikme olmadığı ve  $G^r(t)$ 'nin tıka-

nıklık değeri olduğudur. Gecikme, bu değer (28) bağıntısındaki gibi serbest-akım yolculuk süresi ile çarpılmasından elde edilir.

Çalışma kapsamında önerilen tümleşik model yapısı, bir DN'nın var olduğu durumlarda akım yayılımını belirli bir amaca ve kısıtlara göre modellemek için oluşturulmuştur. Burada amaç, (31) bağıntısındaki gibi DN'ndan geçip ayrılan toplam akım hacmini enbüyüklemektir.

$$\text{maks} \left\{ \sum_{t \in T} \sum_{i \in BW_k} \sum_{r \in FW_k} u^{ikr}(t) \right\} \quad (31)$$

Amaç fonksiyon; DN bileşeni içerisinde irdelenen dağılım oranları, kuyruklanmalar, gecikmeler ve korunum kurallarının varlığında oluşturulan ve (20)-(27) bağıntıları ile verilen kısıtlarla ele alınmış ve problemi benzetim yöntemiyle çözmeye yönelik olarak kodlanmıştır. Akım yayılımı, temel olarak (23) bağıntısı ile verilen ilişkinin modelleme süreci içerisinde sağlanmasını arayan ve yeni oluşturulan benzetim yöntemiyle modellenmiştir.

### Önerilen dinamik düğüm noktası modelinin başarımının sınaması

Önerilen DDN modeli ile, kuramsal olarak oluşturulan ve 4 adet katılan ve 3 adet ayrılan bağı olan bir örnek DN'nda, aşırı-doygun akım durumunun benzetiminin yapılmıştır. Tek bir DN'nda akım yayılımı modellenmek istendiği için, örnek DN'na katılan bağlardan, DN'ndan ayrılan bağlara dağılan akım hacimlerinin dağılım oranlarının, güzergah akımları yardımıyla bilindiği varsayılmıştır. Dolayısıyla bu değerler sabit alınarak, doyumluk-altı hallerinde kullanılmıştır. Aşırı-doygun durumlarda ise, bu oranlar kapasite kısıtına bağlı olarak düzeltilmiştir.

Katılan bağlara, tek tepeli bir sinüs eğrisine uyacak ve kuramsal olarak üretilen dinamik giriş akım hacimleri  $u^i(t)$  yüklenmiştir. Yükleme 1., 2., 3. ve 4. katılan bağlar için sırasıyla %20, %3, %2 ve %8'lik kapasite aşım benztimi yapılmasına yönelik düzenlenmiştir. Örnek düzene ilişkin bağ ve akım özellikleri Tablo 1'de verilmiştir.



Tablo 1. Katılan bağ ve yüklenen akım hacmi özellikleri

	KB1	KB2	KB3	KB4
Bağ uzunluğu (km)	4	4	4	4
Bağ kapasitesi (tş/sa)	3000	4900	6000	4000
En büyük hacim (tş/sa)	3600	5040	6120	4320
En büyük yoğunluk (tş/km)	180	210	240	195
Sürünme hızı (km/sa)	12	10	8	11
Serbest-akım hızı (km/sa)	66.7	93.4	100.0	82.1

Önerilen bağ modelinin, aşırı-doygun akımda çalışabilirliğini değerlendirebilmek için, bağlara yüklenen akımlara ilişkin en büyük akım hacimleri Tablo 1’de verildiği gibi atanmıştır. Modelin ayrık zamanlı olmasından dolayı, benzetim (ardışık yaklaşım) zaman dilimi bir saniye alınmıştır. Bağ üzerinde en büyük yoğunluk değeri aşıldığında, artık yoğunluğu (en büyük yoğunluk değerinden arda kalan yoğunluk) oluşturan taşıtların, bağa girişten önce bir tampon bölgede depolandığı varsayımı yapılmıştır. Bu varsayım bir diğer anlamda, modelin karmabenzetim yapısı içerisinde nokta-kuyruklanma varsayımıdır. Bağ üzerindeki taşıt akışında tıkanmayı önlemek için ise, en büyük yoğunluk değeri aşıldığı durumlarda var olan bir sürünme hızının olduğu varsayılmıştır.

Aşırı yoğun olmayan durumlarda, hız değerini hesaplamak için Greenshields (1935)’in (32) bağıntısıyla verilen hız-yoğunluk ilişkisi kullanılmıştır. Herbir taşıt kümesinin hızı  $V^i(t)$ ; (33) bağıntısıyla verilen serbest akım hızı  $F^i$  ile ortalama yoğunluk  $k^i(t) = N^i(t)/d^i$ ’nin (32) bağıntısında yerlerine konulmaları ile elde edilir. Burada  $k_{eb}^i$ ,  $i$  bağına ait en büyük yoğunluk değeridir. Elde edilen hız denklemi, (34) bağıntısı ile verilmiştir.

$$V^i(t) = F^i \cdot \left(1 - \frac{k^i(t)}{k_{eb}^i}\right) \quad (32)$$

$$F^i = 4 \cdot \frac{C^i}{k_{eb}^i} \quad (33)$$

$$V^i(t) = 4 \cdot \frac{C^i}{k_{eb}^i} \cdot \left(1 - \frac{N^i(t)}{d^i \cdot k_{eb}^i}\right) \quad (34)$$

DDN modelinin bağ modeli bileşeni ile hesaplanan ve katılan bağların (KB) tamamından akım hacminin temizlenmesi sırasında geçen benzetim süresi Tablo 2’de ayrıntılı olarak verilmiştir.

Tablo 2. Katılan bağların benzetim süreleri

	KB1	KB2	KB3	KB4
Benzetim zamanı (dak)	68	63	63	64
İşlemci zamanı (sn)	0.094	0.062	0.063	0.031

DDN modelinin, bağ modeli bileşeni ile hesaplanan bağ modeli çıkış akım hacimleri (ÇAH)  $w^i(t)$ , giriş akım hacimleri (GAH) ile birlikte Şekil 1’de, DDN modeli ile hesaplanan ve ayrılan bağlara giren akım hacimleri  $u^r(t)$  Şekil 2’de gösterilmiştir.

Ayrılan bağların girişinde oluşan nokta kuyruklanmalar  $PQ^r(t)$ , Şekil 3 ile gösterilmiştir.

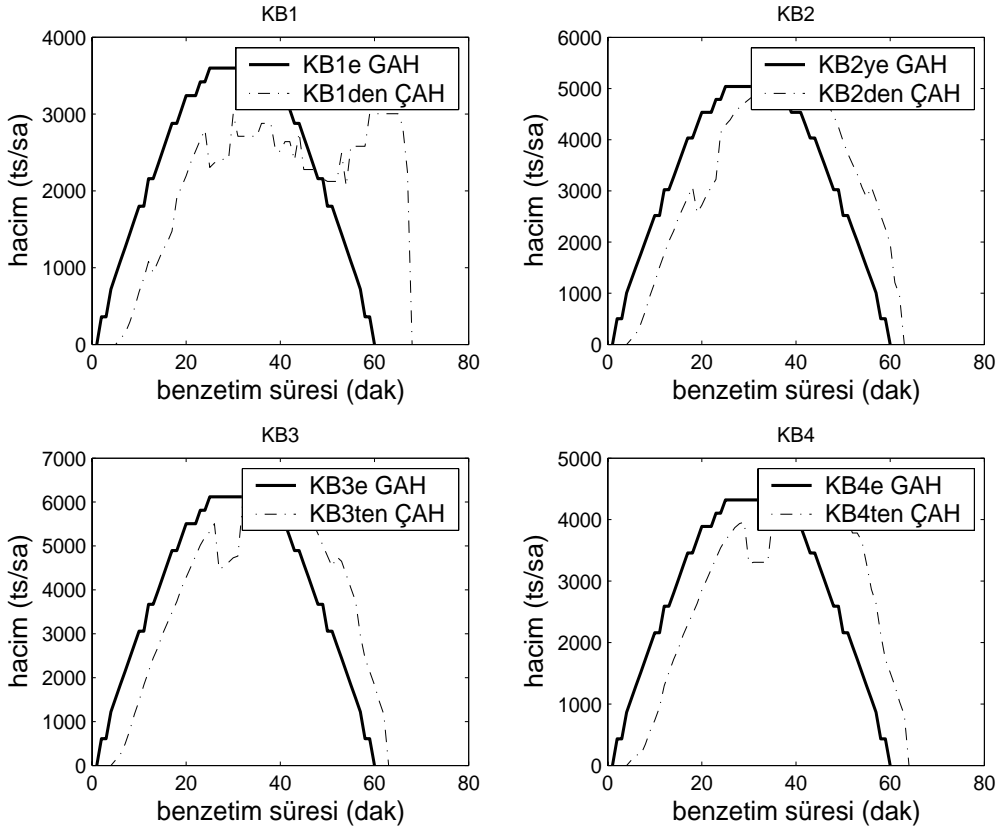
Ayrılan bağların (AB); ilişkin bazı özellikler Tablo 3’te ayrıntılı olarak verilmiştir.

Tablo 3. Ayrılan bağ özellikleri

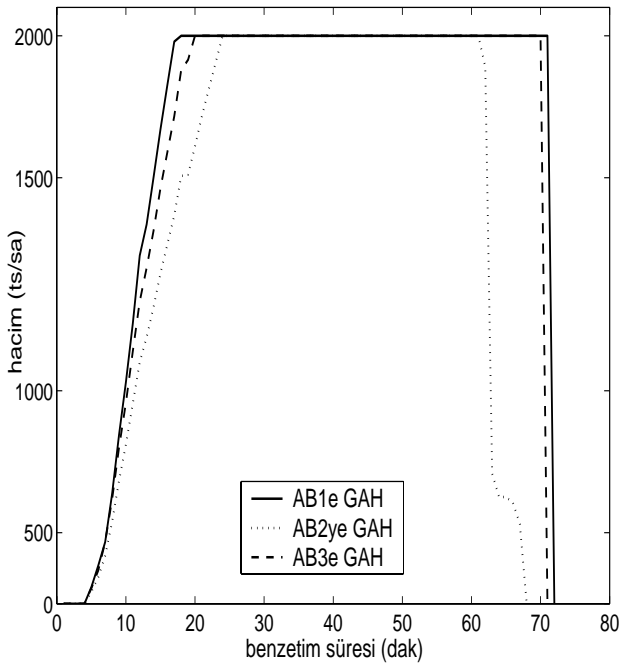
	AB1	AB2	AB3
Kapasite (tş/sa)	4000	4000	4000
$w_{eb}^{kr}$ (tş/sa)	7632	5112	6336
Benzetim zamanı (dak)	72	68	71

## Sonuçlar

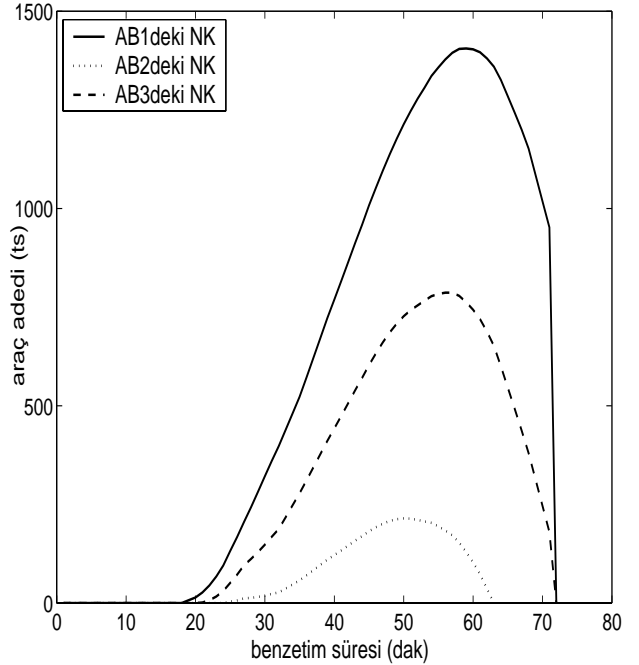
Bu çalışmada; trafik akım ilişkileri kullanılarak nokta kuyruk modellemesi için bir dinamik ağ yüklemi problemi çözülmüştür. Çözüm için önerilen dinamik düğüm noktası modeli, kuramsal tek bir düğüm noktası düzeni üzerinde sınanmıştır. Önerilen tümleşik düğüm noktası model yapısının bağ modeli bileşeni; ayrık taşıt kümesi varsayımı yapan, taşıt hareketlerini düzgün olarak ivmelendiren, çözüm için zaman boyutunda yapılan ayrıklaştırmayı kısa tutan ve bunlara bağlı olarak, değişken olan hız değerlerini ortalama tek bir değer olarak almayan karma yapıda bir modeldir. Dolayısıyla, bağdan çıkan trafik akımının dinamikleri daha gerçekçi biçimde temsil edilir. Temel olarak, akım koru-



Şekil 1. Bağ modeli bileşenince hesaplanan bağ çıkış akım hacimleri



Şekil 2. DDN modeli ile hesaplanan, ayrılan bağ giriş akım hacimleri



Şekil 3. Ayrılan bağ girişlerindeki nokta kuyruklanmalar

numu yasası ve hız ile yoğunluk arasında var olan bir ilişki varsayımı ile bağ çıkış fonksiyonu temelli oluşturulan bağ modeli döngüsel ve karma boyutta modelleme yaklaşımı içerisinde çözülmüştür. Bağ modeli çıktılarının, atanan kapasite kısıtına uyduğu ve yüklenen kuramsal hacim eğrilerine benzediği görülmüştür. Düğüm noktasına girdi oluşturan bağ modeli çıktıları, önceden belirlenmiş güzergah akımları ve kapasite kısıtları ile örnek düğüm noktası yapısına atanmıştır. Ayrılan bağlarda benzetimi yapılan kapasite aşımaları 1., 2. ve 3. bağlar için sırasıyla %91, %28 ve %58'dir. Açıkça görülmüştür ki, ayrılan bağlara girmek isteyen hacim aşırı-doymuş olmasına karşın, kapasite kısıtına uyum sağlamıştır. Ayrılan bağ girişlerinde kapasite aşımalarını ifade etmek için, nokta kuyruklanmalar ve gecikmeler hesaplanmıştır.

Çalışma sonuçları; önerilen modelin, nokta kuyruk sürecini ve ayrılan bağ akım dinamiklerini gerçekçi biçimde ifade ettiğini göstermektedir. Modelin benzetim yoluyla çözümünün kolay olduğu görülmüştür. Önerilen dinamik düğüm noktası modelinin bir ağ yapısı içerisinde kullanılarak dinamik ağ yükleme problemi çözülmesi, çalışmanın gelecekteki bir açılımı olacaktır.

## Kaynaklar

- Astarita, V., (1995). Flow propagation description in dynamic network loading models, *Proceedings*, 4<sup>th</sup> International Conference on Applications of Advanced Technologies in Transportation Engineering, 599-603, Capri, Italy.
- Astarita, V., (1996). A continuous time link model for dynamic network loading based on travel time function, *Proceedings*, 13<sup>th</sup> International Symposium on Transportation and Traffic Theory, 87-102, Lyon, France.
- Carey, M., (1987). Optimal time-varying flows on congested network, *Operations Research*, **35**, 1, 58-69.
- Carey, M., (1990). Extending and solving a multi-period congested network flow model, *Computers and Operations Research*, **17**, 5, 495-507.
- Carey, M., Ge, Y.E. ve McCartney, M., (2003). A whole-link travel time model with desirable properties, *Transportation Science*, **37**, 1, 83-96.
- Cascetta, E., (2001). *Transportation systems engineering: theory and methods*, Applied Optimization Series, Kluwer Academic Publishers.
- Celikoglu, H.B., (2006a). A dynamic node model with a quadratic travel time function based link model, *Proceedings*, 11<sup>th</sup> EWGT Meeting, 658-666, Bari, Italy.
- Çelikoğlu, H.B., (2006b). A dynamic node model for highway networks, Doktora tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Daganzo, C.F., (1995). The cell transmission model, part II: network traffic, *Transportation Research*, **29B**, 2, 79-93.
- Dell'Orco, M., (2006). A dynamic network loading model for mesosimulation in transportation systems, *European Journal of Operational Research*, **175**, 3, 1447-1454.
- Dell'Orco, M., Gedizlioglu, E. ve Celikoglu, H.B., (2005). Introduction to a node management model for traffic networks: a mesoscopic approach, *Proceedings*, 10<sup>th</sup> EWGT Meeting, 435-440, Poznan, Poland.
- Friesz, T.L., Bernstein, D., Mehta, N.J., Tobin, R.L. ve Ganjalizadeh, S., (1989). Dynamic network traffic assignment considered as a continuous time optimal control problem, *Operations Research*, **37**, 6, 893-901.
- Friesz, T.L., Bernstein, D.H., Smith, T.E., Tobin, R.L. ve Wie, B.W., (1993). A variational inequality formulation of the dynamic network user equilibrium problem, *Operations Research*, **41**, 1, 179-191.
- Greenshields, B.D., (1935). A study in highway capacity, *Highway Research Board Proceedings*, **14**, 448-477.
- Kuwahara, M. ve Akamatsu, T., (2001). Dynamic user optimal assignment with physical queues for a many-to-many OD pattern, *Transportation Research*, **35B**, 5, 461-479.
- Lam, W.H.K. ve Huang, H.J., (1995). Dynamic user optimal traffic assignment model for many to one travel demand, *Transportation Research*, **29B**, 4, 243-259.
- Leonard, D.R., Gower, P. ve Taylor, N.B., eds. (1989). CONTRAM: Structure of the model, TRRL Research Report 178, Crowthorne.
- Lo, H. ve Szeto, W.Y., (2002). A cell-based variational inequality formulation of the dynamic user optimal assignment problem, *Transportation Research*, **36B**, 5, 421-443.
- Merchant, D.K. ve Nemhauser, G.L., (1978a). A model and an algorithm for the dynamic traffic

- assignment problem, *Transportation Science*, **12**, 3, 183-199.
- Merchant, D.K. ve Nemhauser, G.L., (1978b). Optimality conditions of a dynamic traffic assignment model, *Transportation Science*, **12**, 3, 200-207.
- Ran, B. ve Boyce, D., (1996). *Modeling dynamic transport networks: An intelligent transportation system oriented approach*, Second revised edition, Springer Verlag, Heidelberg.
- Ran, B., Boyce, D.E. ve LeBlanc, L.J., (1993). A new class of instantaneous dynamic user-optimal traffic assignment models, *Operations Research*, **41**, 1, 192-202.
- Rubio-Ardanaz, J.M., Wu, J.H. ve Florian, M., (2003). Two improved numerical algorithms for the dynamic network loading problems, *Transportation Research*, **37B**, 2, 171-190.
- Spiess, H., (1990). Conical volume-delay functions, *Transportation Science*, **24**, 2, 153-158.
- Wie B.W., Tobin R.L. ve Friesz, T.L., (1994). The augmented lagrangian method for solving dynamic network traffic assignment models in discrete time, *Transportation Science*, **28**, 3, 204-220.
- Wu, J.H., Chen, Y. ve Florian, M., (1998). The continuous dynamic network loading problem: A mathematical formulation and solution method, *Transportation Research*, **32B**, 3, 173-187.
- Xu, Y., Wu, J.H., Florian, M., Marcotte, P. ve Zhu, D.L., (1999). New advances in the continuous dynamic network loading problem, *Transportation Science*, **33**, 4, 341-353.
- Yang, H. ve Huang, H.J., (1997). Analysis of the time-varying pricing of a bottleneck with elastic demand using optimal control theory, *Transportation Research*, **31B**, 6, 425-440.
- Zhu, D. ve Marcotte, P., (2000). On existence of solutions to the dynamic user equilibrium problem, *Transportation Science*, **34**, 4, 402-414.