

İki boyutlu genelleştirilmiş ayırıt saptayıcı

Binnur KURT*, **Muhittin GÖKMEN**

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilgisayar Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, daha önce Gökmen ve Jain (1997) tarafından geliştirilen $\lambda\tau$ -uzayında görüntü gösterimi ve ayırıt saptayıcı iki boyutlu uzaya genişletilmektedir. Bu genişletme özellikle iki açıdan önemlidir. Birinci olarak, görüntülerin $\lambda\tau$ -uzayındaki davranışları en iyi, iki boyutlu düzleştirme ve ayırıt saptama süzgeçleri ile modellenenir. İkincisi, genelleştirilmiş ayırıt saptayıcı (GAS) ile bilinen başarılı birçok ayırıt saptayıcısını üretebildiğinden, iki boyutlu GAS ile bu süzgeçlerin iki boyutlu biçimleri oluşturulabilir. Düzleştirme problemi, zar ve levha modellerinin doğrusal bileşiminden oluşan iki boyutlu karma enerji fonksiyonelinin en aza indirgenmesi olarak tanımlanmıştır. Gökmen ve Jain (1997) karma fonksiyoneli en aza indirgeyen denklemi, ayrıştırılabilir olduğu varsayımı altında tek boyutlu kısmi diferansiyel denklem olarak çözmüşlerdir. Ancak mevcut ayrıştırılabilir çözüm iki boyutlu özgün denklemi sağlamamaktadır. Bu çalışmada, karma fonksiyoneli en aza indirgeyen denklem takımı iki boyutlu uzaydaki çözümü sunulmaktadır. Türetilen süzgeçler önceki süzgeçlerle birinci ve ikinci tür hata karakteristiklerine göre karşılaştırıldığında gürültüye daha az duyar olduğu gözlenmiştir. Gerçek ve yapay görüntüler üzerinde yapılan deneysel sonuçlarla ayırıt saptayıcının performansı ve $\lambda\tau$ -uzayındaki davranışı sunulmuştur. Ayırıt saptayıcılar ile çalışırken ayarlanması gereken çok sayıda parametre bulunmaktadır. Verilen bir imge için en iyi parametre kümesini bulmanın genel geçer bir yöntemi bulunmamaktadır. Gerçekte, bir imge için en iyilenen bir ayırıt saptayıcının parametreleri başka bir imge için en iyi olmayacaktır. Bu çalışmada, en iyi GAS parametreleri, verilen bir imge için hesaplanan, alıcı işletim eğrisi üzerinden belirlenmiştir. Burada amaç GAS'ın başarımının sınırlarını göstermektir.

Anahtar Kelimeler: *Ayırıt saptama, düzenleme kuramı, ölçek-uzayı gösterilimi, yüzey kurma.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Binnur KURT. bkurt@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 36 08.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Bilgisayar Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Amaca yönelik ayırıt saptayıcı" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 25.10.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 15.01.2008 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.01.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Two dimensional generalized edge detector

Extended abstract

The aim of edge detection is to provide a meaningful description of object boundaries in a scene from intensity surface. These boundaries are due to discontinuities manifesting themselves as sharp variations in image intensities. There are different sources for sharp changes in images which are created by structure (e.g. texture, occlusion) or illumination (e.g. shadows, highlights). Extracting edges from a still image is certainly the most significant stage of any computer vision algorithm requiring high accuracy of location in the presence of noise. In many contour-based vision algorithms, such as shape-based query, curved-based stereo vision, and edge-based target recognition, their performance is highly dependent on the quality of the detected edges. Therefore, edge detection is an important area of research in computer vision. Despite considerable work and progress made on this subject, edge detection is still a challenging research problem due to the lack of a robust and efficient general purpose algorithm.

Most of the efforts in edge detection have been devoted to the development of an optimum edge detector which can resolve the tradeoff between good localization and detection performance. Furthermore, extracting edges at different scales and combining these edges have attracted a substantial amount of interest. In the course of developing optimum edge detectors that can resolve the tradeoff between localization and detection performances, several different approaches have resulted in either a Gaussian filter or a filter whose shape is very similar to a Gaussian. Furthermore, these filters are very suitable for obtaining scale space edge detection since the scale of the filter can be easily controlled by means of a single parameter. For instance, in classical scale-space the kernel is a Gaussian and the scale-space representation is obtained either by convolving the image by a Gaussian with increasing standard deviation or equivalently by solving the linear heat equation in time. This representation is causal, since the isotropic heat equation satisfies a maximum principle. However, the Gaussian scale-space suffers from serious drawbacks such as over-smoothing and location uncertainty along edges at large scales due to interactions between nearby edges and displacements. Although these filters are used widely, it is very difficult to claim that they can

provide the desired output for any specific problem. For instance, there are some cases where the improved localization performance is the primary requirement. In these cases, a sub-optimum conditions becomes more appropriate. It has been shown that the first order R-filter can deliver improved results on checkerboard and bar images as well as some real images for moderate values of signal-to-noise ratio (SNR).

In many vision applications, there is a great demand for a general-purpose edge detector which can produce edge maps with very different characteristics in nature, so that one of these edge maps may meet the requirements of the problem under consideration. Detecting edges in images is one of the most challenging issues in computer vision and image processing due to lack of a robust detector. Gökmen (1997) obtained an edge detector called Generalized Edge Detector (GED), capable of producing most of the existing edge detectors. The original problem was formulated on two-dimensional Hybrid model comprised of the linear combination of membrane and thin-plate functionals. Smoothing problem was then reduced to the solution of two-dimensional partial differential equation (PDE). The filters were obtained for one dimensional case assuming a separable solution. This study extends edge detection of images in $\lambda\tau$ -space to two-dimensional space.

Two-dimensional extension of the representation is important since the properties of images in the space are best modeled by two dimensional smoothing and edge detector filters. Also since GED filters encompass most of the well-known edge detectors, two-dimensional version of these filters could be obtained. The derived filters are more robust to noise when compared to the previous one dimensional scheme in the sense of missing and false alarm characteristics. There are several parameters to tune when dealing with edge detectors. Usually there is no easy way to find the optimal edge detector parameters for an image. In fact, one set of optimal parameters may not be optimal for another image. In this study, we find optimal GED parameters using receiver operator characteristics for an image when its ideal edges are available using exhaustive search to see how best it achieves.

Keywords: Edge detection, regularization theory, scale-space representation, surface reconstruction.

Giriş

Ayrıt saptamada amaç, yoğunluk yüzeylerinden nesnelerin sınırlarına karşı düşen ayırıtın üretilmesidir. Üretilen bu ayırıt görüntü yüzeyindeki keskin değişimlerin neden olduğu süresizlikler olarak kendini göstermektedir. Görüntü yüzeyindeki bu ani değişimin kaynağı nesnenin dış yüzeyinin yapısal özellikleri (örneğin, örtme) ya da aydınlatma özellikleri (örneğin, gölgeler, parlaklık) olabilir. Kaynağı ne olursa olsun, durağan bir görüntüdeki ayırıtın saptanması, yüksek doğruluk gerektiren herhangi bir ayırıt temelli bilgisayarla görü algoritmasının en önemli aşamasını oluşturmaktadır. Birçok çevrit temelli görü algoritmasında (örneğin şekil tabanlı sorgulama, çevrit-temelli görüntü çifti, çevrit-temelli görüntü sıkıştırma, ayırıt-temelli yüz tanıma ve ayırıt-temelli hedef tanıma) başarımlar büyük oranda saptanan ayırıtın doğruluğuna bağlıdır. Bu nedenle, ayırıt saptama bilgisayarla görüde önemli araştırma konularından birini oluşturmaktadır. Mevcut çözümlerin amaçla yönelik ayırıt üretmekten uzak olmaları, araştırmacıları genel amaçlı bir ayırıt saptayıcı tasarımına yöneltmektedir. Herhangi bir ayırıt saptayıcı, yüksek doğruluk ile gürültüyü bastırma özellikleri arasındaki ödünleşimi çözmelidir. Ne varki, bir ön bilgi olmaksızın en iyi ödünleşimi belirlemek mümkün değildir. Gerçekten, bir beneğin ayırıt üzerinde bulunup bulunmadığına karar verme problemi kötü konumlandırılmış bir problemdir. Karar verme süreci, yoğunluk yüzeyinin çeşitli derecelerden türevinin hesabını gerektirmektedir. Bilindiği gibi, türev alma işlevi gürültüyü kuvvetlendirmektedir. Bu problemin önüne geçmek için türev işlevinden önce düzleştirme işlemi uygulanır. Bu görüntüye alçak geçiren bir süzgeç uygulanması ile sağlanır. Mevcut ayırıt saptayıcıların çoğunluğu (Canny (1986), Deriche (1987), Shen ve Castan (1986)) bu ödünleşimin eniyilenmiş çözümünü hedeflemişlerdir. Ancak, eniyilenmiş çözümün tek bir ölçekte saptanan ayırıtlardan elde edilemeyeceği gösterilmiş ve farklı ölçeklerdeki ayırıt saptanarak (Canny (1986), Witkin (1983)) tümleştirilmesine dayanan çözümler (Canny (1986), Gökmen ve Li (1992)) önerilmiştir. Bu çalışmaların çoğu ya Gauss süzgeci ya da şekli Gauss süzgecine çok benze-

yen (Canny (1986), Poggio ve arkadaşları (1985)) süzgeçlerle sonuçlanmıştır. Ayrıca bu süzgeçler tek bir parametre ile kontrol edilebilen ölçek uzayı gösterimine oldukça uygundur.

Çalışma Karma modelin ve $\lambda\tau$ -uzayının kısa bir tanıtımı ile başlamaktadır. üçüncü bölümde iki boyutlu R - ve G -süzgeçlerinin karma modelden türetimi tanıtılacaktır. Son bölümde deneysel sonuçlar sunulmaktadır.

Karma model ve $\lambda\tau$ -uzayı gösterimi

Genelleştirilmiş ayırıt saptayıcı geliştirilirken, Gökmen ve Jain (1997) düzenleme ve süzgeçlerle evriştirme arasındaki ilişkiden yararlanmışlardır. Düzenleme teorisinde, çözüm üzerindeki düzlük koşutu, çözümün türevlerini içeren enerji fonksiyonelinin en aza indirgenmesi şeklinde sağlanır. Gürültülü veri $d(x,y)$ 'den, düzenlenilmiş çözüm, $f(x,y)$, zar fonksiyoneli $E_z(f)$ 'nin

$$E_z(f) = \iint_{\Omega} \|f - d\|^2 + \lambda \|\nabla f\|^2 d\Omega \quad (1)$$

en aza indirgenmesiyle elde edilir. Diğer bir düzenlenilmiş çözüm levha fonksiyoneli $E_l(f)$ 'nin

$$E_l(f) = \iint_{\Omega} \|f - d\|^2 + \lambda \|\nabla^2 f\|^2 d\Omega \quad (2)$$

en aza indirgenmesiyle elde edilebilir. Bu fonksiyonelerde, ilk terim çözümün $f(x,y)$, veriye $d(x,y)$ 'ye yakınlığının bir ölçütü ve ikinci terim düzlüğün bir ölçütüdür. Bu iki terim arasındaki ödünleşim düzenleme parametresi (λ) tarafından kontrol edilmektedir. Düzenleme ile süzgeçleme arasındaki bağlantı, fonksiyonele ilişkin Euler-Lagrange denklemi ile kurulmaktadır. Zar modeli için Euler-Lagrange denklemi

$$f - \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) = d \quad (3)$$

sınır koşulları $\lim_{x,y \rightarrow \infty} f(x,y) = 0$ ile birlikte verilmektedir. Kısmi diferansiyel denklemin $f(x,y) = \delta(x,y)$ için çözümünü $R(x,y)$ ile

gösterelim. Verilen herhangi bir $d(x,y)$ için çözüm $f(x,y)=R(x,y)*d(x,y)$ şeklinde yazılabilir. Zar ve levha fonksiyonelleri için R-süzgeçlerinin özelliklerini Gökmen ve Jain (1997) vermiştir. Karma modelin amacı bu iki farklı özelliklere sahip süzgeç grubu arasındaki ara çözümleri elde etmektir. Bu amaçla, karma enerji fonksiyoneli, zar ve levha fonksiyonellerinin doğrusal bileşiminden

$$E_k(f) = \iint_{\Omega} \|f - d\|^2 + \lambda \left[\begin{array}{l} (1 - \tau) \|\nabla f\|^2 \\ + \tau \|\nabla^2 f\|^2 \end{array} \right] d\Omega \quad (4)$$

oluşturulmaktadır. Burada λ düzenleme parametresi olarak adlandırılan gerçel bir sayıdır. $\tau \in [0,1]$ ise sürekliliği kontrol eden bir parameter. Dikkat edilirse, $\tau=0$ için karma enerji fonksiyoneli zar modeline ve $\tau=1$ için ise levha modeline dönüştüğü görülebilir. τ parametresinin ara değerleri için ise karma yüzeyler elde edilmektedir. Bu yüzeylerin elde edilebilmesi için karma modele karşı düşen Euler-Lagrange denkleminin çözülmesi gerekmektedir. Bir sonraki bölümde, karma modele karşı düşen $R(x,y)$ süzgecinin türetilmesi ve özellikleri sunulacaktır.

İki boyutlu R ve G süzgeçlerinin türetilmesi

Bu bölümde karma modeli en aza indirgeyen $f(x,y)$ fonksiyonunu ve aşağıda verilen Euler-Lagrange denklemini ele alacağız.

$$f - B \Delta f + A \Delta^2 f = d \quad (5)$$

Burada $A=\lambda(1-\tau)$ ve $B=\lambda\tau$ olarak tanımlıdır. Sınır koşulları ise $\lim_{x,y \rightarrow \infty} f(x,y) = 0$,

$$\lim_{x,y \rightarrow \infty} f_x(x,y) = 0, \quad \lim_{x,y \rightarrow \infty} f_y(x,y) = 0,$$

$$\iint_{\Omega} f(x,y) d\Omega = 1, \Omega = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0\},$$

olmak üzere (5) ile verilen diferansiyel denklem, diferansiyel operatörleri cinsinden diferansiyel operatörü L

$$L = AL_1L_2, L_1 = (\Delta - s_1), L_2 = (\Delta - s_2)$$

biçiminde yazılabilir. Burada s_1 ve s_2 , As^2-Bs+1 polinomunun kökleridir. L_1 ve L_2 operatörleri Helmholtz tipinden kısmi diferansiyel denklemlerdir. Helmholtz kısmi diferansiyel denkleminin çözümü Renardy ve Rogers (1983) tarafından verilmiştir. $\Delta=B^2-4A$ 'nın işaretine ve $A=0$ ve $B=0$ 'a göre beş durum oluşmaktadır. s_1 ve s_2 'nin bu beş durum için aldığı değerler Tablo 1'de verilmiştir. Bu durumlara karşı düşen çözümler (R -süzgeçleri) ise Tablo 3'de verilmiştir. G -süzgeçleri ise R -süzgeçlerinin x 'e ve y 'ye göre türevleri alınarak elde edilmektedir. x doğrultusundaki G -süzgeçleri $G^{(x)}(x,y)$ ile gösterilmektedir ve Tablo 4'de verilmiştir. R -süzgeçleri bakışımı, ancak G -süzgeçleri ters bakışımıdır. Her iki süzgeçte, Gauss süzgecinin aksine dairesel bakışımılık özelliğine sahip değildir. Bu nedenle, R - ve G -süzgeç cevabı, görüntüye ait ayrıt, köşe ve doğru gibi yerel özelliklerin doğrultuya bağlı olarak değişmektedir. Şekil 1'de Tablo 2'de belirtilen λ ve τ değerleri için $R_{\lambda\tau}(x,y)$ süzgeçlerinin grafiği ve Şekil 2'de ise aynı değerler için $G^{(x)}(x,y)$ süzgeçlerinin grafiği verilmiştir.

Tablo 1. Denklemin beş durumu için s_1 ve s_2 'nin aldığı değerler

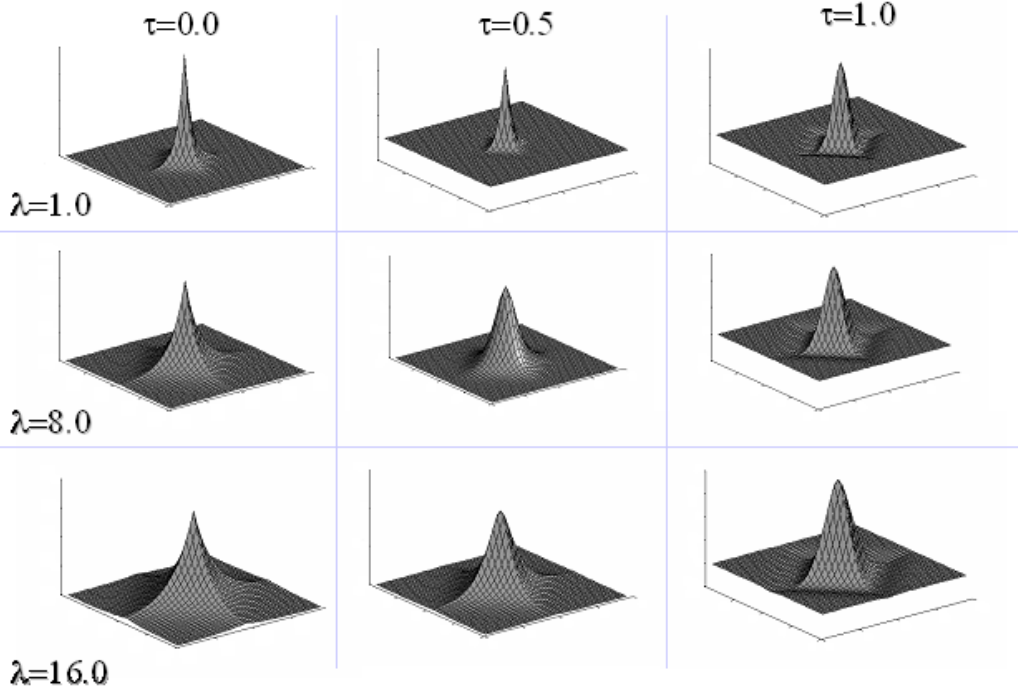
Durum		s_1	s_2
I	$\Delta > 0$	$\frac{B + \sqrt{\Delta}}{2A}$	$\frac{B - \sqrt{\Delta}}{2A}$
II	$\Delta = 0$	$\frac{B}{2A}$	$\frac{B}{2A}$
III	$\Delta < 0$	$\frac{B + i\sqrt{\Delta}}{2A}$	$\frac{B - i\sqrt{\Delta}}{2A}$
IV	$A = 0$	$\frac{1}{B}$	-
V	$B = 0$	$\frac{i\sqrt{\Delta}}{2A}$	$\frac{-i\sqrt{\Delta}}{2A}$

Tablo 2. Parametre (λ ve τ) değerlerine karşı düşen süzgeç tipleri

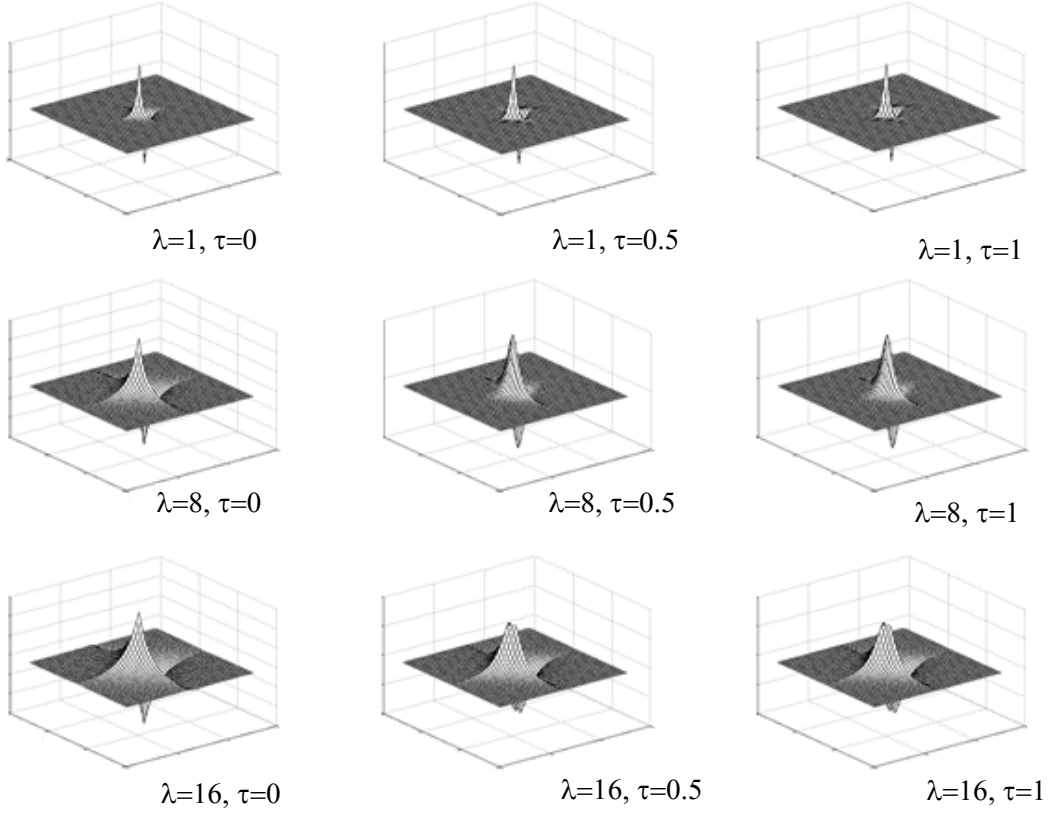
τ			
λ	0.0	λ	0.0
1.0	IV	1.0	IV
8.0	IV	8.0	IV
16.0	IV	16.0	IV

Tablo 3. $R(m, n)$ süzgeçleri

Durum	$R(m, n)$
$\Delta > 0$	$R(m, n) = H_{00}(ae^{-b(m + n)} - be^{-a(m + n)})$ $H_{00} = \frac{a(1-e^{-a})^2(1+e^{-b})^2 - b(1+e^{-a})^2(1-e^{-b})^2}{(1-e^{-a})^2(1-e^{-b})^2}$ $a = \sqrt{\frac{B + \sqrt{\Delta}}{4A}}, b = \sqrt{\frac{B - \sqrt{\Delta}}{4A}}$
$\Delta < 0$	$R(m, n) = H_{00} \left(\frac{\cos(\theta) \cos(\varphi(m + n)) + \sin(\theta) \sin(\varphi(m + n))}{\sqrt{4A}} \right) \exp\left(-\frac{\cos(\theta)(m + n)}{\sqrt{4A}}\right)$ $H_{00} = \frac{4}{\sqrt{A} \cos^3(\theta) \sin^2(2\theta)}, 2\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{B}}{A}\right), \varphi = \frac{1}{\sqrt{4A}} \sin(\theta)$
$\Delta = 0$	$R(m, n) = \frac{\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{B}}\right)\right)^4}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{B}} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{B}}\right) - \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{B}}\right)\right)}$ $\times \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^{ m +1} \left(\frac{1}{\sqrt{B}}\right)^{ n +1} \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{B}}(m + n)\right)$
$A = 0$	$R(m, n) = \left(\frac{1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{2B}}}}{1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{2B}}}} \right)^2 e^{-\left(\frac{ m + n }{\sqrt{2B}}\right)}$



Şekil 1. İki boyutlu R süzgeçleri



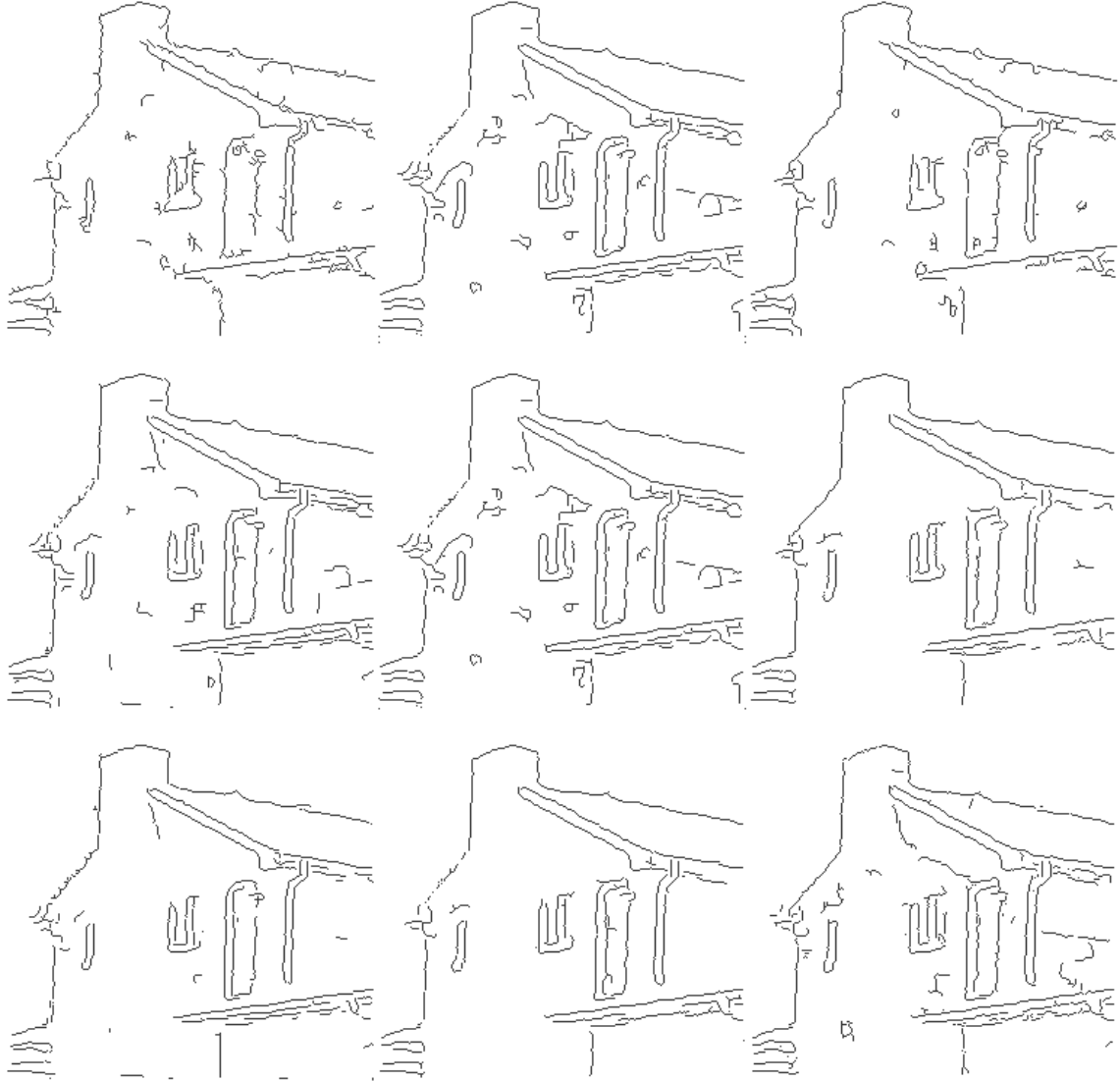
Şekil 2. İki boyutlu $G^{(x)}$ süzgeçleri

Tablo 4. $G^{(x)}(m, n)$ süzgeçleri

Durum	$G^{(x)}(m, n)$
$\Delta > 0$	$H_{00}(ae^{-b(m + n)} - be^{-a(m + n)})$
$\Delta < 0$	$K \operatorname{sgn}(m) \exp\left(-\frac{\cos(\theta)(m + n)}{\sqrt[4]{4A}}\right) \left(\begin{array}{l} \left(\sin(\theta)\varphi - \cos(\theta)\frac{1}{\sqrt[4]{4A}} \right) \cos(\varphi(m + n)) - \\ \left(\cos(\theta)\varphi + \sin(\theta)\frac{1}{\sqrt[4]{4A}} \right) \sin(\varphi(m + n)) \end{array} \right)$
$\Delta = 0$	$\frac{-1}{4B^2} m \operatorname{sgn}(m) \left(\frac{1}{\sqrt{B}} n + 1 \right) \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{B}} (m + n)\right)$
$A = 0$	$-\sqrt{2B} \operatorname{sgn}(m) \exp\left(-\sqrt{\frac{1}{2B}} (m + n)\right)$

Tablo 5. Kurulmuş ve özgün imgeler arasındaki ortalama karesel hata

		SNR=12dB			SNR=8.5dB			SNR=5.5dB			
		τ	0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
Checker	λ	1.0	31.0	26.8	29.5	31.8	28.7	31.5	32.7	30.9	33.6
		8.0	54.5	48.5	35.9	54.8	48.6	36.3	54.9	48.8	36.9
		16.0	64.2	54.5	39.5	65.3	54.5	39.9	75.6	54.7	40.2
Bar	λ	1.0	47.5	35.7	38.7	48.0	37.2	39.8	48.6	38.9	41.5
		8.0	77.2	74.8	54.6	77.3	74.8	55.0	77.3	74.8	55.5
		16.0	84.2	77.7	60.3	84.2	77.7	60.5	84.2	77.8	60.9



Şekil 3. Gürültülü ev imgesine ait ayrıtların $\lambda\tau$ -uzayı gösterimi (τ soldan sağa 0.0, 0.5 ve 1.0, λ yukarıdan aşağıya 1.0, 8.0 ve 16.0 değerlerini almaktadır)

Deneysel sonuçlar

Karma modelin zar ve levha modelleri ile karşılaştırabilmek amacıyla gürültülü dama görüntüsü ele alınmıştır ve sonra $\tau=0, 0.5$ ve 1 için kurulan yüzeylerin ortalama karesel hatası hesaplanmıştır (Tablo 5). Tablodan karma modelin özgün görüntüye daha yakın yüzeyler ürettikleri görülebilir. Diğer taraftan, $\tau=0.5$ için elde edilen karma çözümler zar modelindeki aşırı düzleme ya da levha modelindeki aşım problemlerini içermemektedir.

Genelleştirilmiş ayrıt saptayıcının ayrıt yerini saptama performansını incelemek için gürültülü

dama ve bar imgeleri ele alınmıştır. Bu yapay imgeler saptayıcının özellikle saptama ve yöresellik başarımını ölçmede yararlıdır. Nicel değerler olarak koşullu olasılıklar, $Pr\{DE|IE\}$, $Pr\{IE|DE\}$, Pratt'in FOM (Figure Of Merit) ölçütü ve özgün ve saptanan ayrıt haritaları arasındaki ortalama karesel uzaklık (OKU) hesaplanmıştır. Bu hesaplanan nicel değerler Tablo 6'da verilmiştir. Ayrıt yerini saptamanın önemli olduğu bu tip görüntüler için $\tau=0$ en iyi sonucu verirken, gürültü oranı yüksek olan ev görüntüsü için en iyi sonuç $\tau=0.5$ için elde edilmiştir (Şekil 3).

Tablo 6. Dama imgesine ait ayrıtların sayısal değerlendirilmesi

λ	$\tau=$	SNR=12dB			SNR=8.5dB			SNR=5dB		
		0	0.5	1	0	0.5	1	0	0.5	1
1.0	Pr(DE/IE)	0.58	0.51	0.52	0.56	0.48	0.47	0.51	0.46	0.46
	Pr(IE/DE)	0.59	0.50	0.52	0.57	0.49	0.48	0.58	0.52	0.48
	OKH	0.64	0.77	0.75	0.66	0.77	0.77	0.64	0.69	0.75
	FOM	0.60	0.52	0.53	0.58	0.51	0.50	0.53	0.48	0.48
8.0	P(DE/IE)	0.79	0.73	0.46	0.73	0.57	0.46	0.62	0.57	0.45
	P(IE/DE)	0.81	0.79	0.47	0.75	0.64	0.47	0.63	0.62	0.45
	OKH	0.45	0.49	0.82	0.53	0.72	0.86	0.70	0.82	0.88
	FOM	0.80	0.74	0.49	0.74	0.58	0.49	0.63	0.58	0.47
16.0	P(DE/IE)	0.79	0.45	0.44	0.79	0.47	0.44	0.73	0.44	0.42
	P(IE/DE)	0.90	0.50	0.48	0.88	0.50	0.46	0.83	0.45	0.45
	OKH	0.36	0.71	0.83	0.34	0.77	0.89	0.57	0.89	0.88
	FOM	0.79	0.47	0.46	0.79	0.49	0.46	0.74	0.47	0.44

Sonuç

Bu çalışmada karma fonksiyoneli en aza indirgeyen denklem takımının iki boyutlu uzaydaki çözümü sunulmuştur. Türetilen süzgeçler önceki süzgeçlerle birinci ve ikinci tür hata karakteristiklerine göre karşılaştırıldığında gürültüye daha az duyar olduğu gözlenmiştir. Böylece iki boyutlu genelleştirilmiş ayrıtların farklı ölçek parametreleri için değişik özellikte ve zengin ayrıtlar üretebildiği gösterilmiştir.

Kaynaklar

Canny, J.F., (1986). A Computational Approach to Edge Detection, *IEEE Transactions On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **8**, 679-698.
 Deriche, R., (1987). Optimal Edge Detection using Recursive Filtering, *Proceedings of IEEE First International Conference on Computer Vision*, 501-505, Arlington, ABD.

Gökmen, M. ve Jain, A.K., (1997). $\lambda\tau$ -Space Representation of Images and Generalized Edge Detector, *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **9**, 545-563.

Gökmen, M. ve Li, C., (1992). Multiscale Edge Detection using First-order R-filter, *Proc. Int. Conf. Pattern Recognition*, 307-310, Hawaii, ABD.

Poggio, T., Voorhees, H. ve Yuille, A., (1985). *A Regularized Solution to Edge Detection*, Technical Report, MIT AI Lab., AI Memo 833.

Renardy, M. ve Rogers, R.C., (1983). *An Introduction to Partial Differential Equations*, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York.

Shen, J. ve Castan, S., (1986). An Optimal Linear Operator for Edge Detection, *Proceedings of IEEE First Conference on Pattern Recognition*, 109-114, Miami, ABD.

Witkin, A.P., (1983). Scale-space Filtering, *Proc. 8th Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence*, 1019-1022, California, ABD.