

# Birlikte çalışan kinematik yetersiz manipülatörlerin dinamik modellemesi

**Sıddık Murat YEŞİLOĞLU\***, **Hakan TEMELTAŞ**

*İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul*

## Özet

*Bir manipülatörün kinematik yeterliliği, o manipülatörün uç noktasının erişebildiği toplam küme olan çalışma uzayında keyfi seçilen her yönde öteleme ve yine keyfi seçilen her yönde dönme hareketi yapabilesidir. Diğer bir deyişle kinematik yetersiz manipülatörler, çalışma uzaylarında geçerli bütün konfigürasyonlara ulaşmak için gereken serbestlik derecelerinden (SD) daha azına sahip olan manipülatörlerdir. Üç boyutlu çalışma uzayı için bu durum, bir manipülatörün serbestlik derecesinin altından daha küçük olmasına karşı düşer. Çünkü üç boyutlu çalışma uzayına sahip kinematik yeterliliği olan bir manipülatörün uç noktası, üç boyutta dönme ve üç boyutta öteleme olmak üzere toplam altı boyutlu bir manifold tanımlar. Birlikte çalışan manipülatörlerden oluşan bir sistem üzerindeki kuvvet ve moment dağılımlarını hesaplayabilmek için sistemin Jakobiyen matrisinin sütunlarının bütün kombinasyonları bu manifoldu tamamıyla tarayabilmelidir. Bundan dolayı literatürde genellikle manipülatörlerin kinematik yeterliliği ve tekil durumda olmamaları bu problemin çözümüne ön koşul olarak getirilmektedir. Birlikte çalışan manipülatörlerin dinamik analizinde kinematik yeterlilik ön koşulunun kaldırılması amacıyla bu çalışmada, manipülatörlerin taşıdığı yükü bir mobil platform olarak modelleyerek sisteme altı serbestlik derecesi kazandırmak ve bunun yeterli olmadığı durumlarda sisteme "sözde eklem" eklemek olarak özetlenebilecek bir yöntem tanıtılmaktadır. Bu yöntemin holonomik olmayan sistemlere uygulaması da araç dinamiğinde tekerlek ve yol arasındaki kuvvetlerin hesaplanabilmesi anlamına geldiği için otomotiv endüstrisinde ayrıca önem taşır.*

**Anahtar kelimeler:** *Birlikte çalışan manipülatörler, kinematik yetersiz manipülatör, ortak yük yerine mobil platform, sözde eklem*

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Sıddık Murat YEŞİLOĞLU [smy@ieee.org](mailto:smy@ieee.org); Tel: (212) 285 3576.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Kontrol ve Otomasyon Programında tamamlanmış olan "High Performance Dynamical Modeling of Complex Topology Systems" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 26.06.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 27.08.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Dynamical modelling of kinematically deficient cooperating manipulators

### Extended abstract

*Precision and load capacity are among the reasons why more than one manipulator may be used to perform a common task. In such cooperation, propagating force and torque within and among manipulators cannot be computed unless the columns of the System-Jacobian matrix span the operational space completely. This can be made sure as long as the end-effector of each manipulator in the system independently move and rotate at any direction in the operational space. In order to have a three-dimensional task space for rotation and translation, a manipulator needs to have at least six Degrees of Freedom (DOF). Then the Jacobian of such manipulator is required to have columns that span a six-dimensional manifold provided that it is not at a singular configuration.*

*Many industrial applications do not require the full kinematic capability to move and rotate the tip point of the manipulator at any direction. In regards to cost, manufacturing, and compactness, any DOF not necessary for the task should be avoided unless redundancy is needed for both operational space and joint space controls such as obstacle or joint limit avoidance problems. With this motivation, kinematic deficiency is defined as the lack of ability of the end-effector to independently move towards and rotate around any vector in the operational space. Therefore, kinematically deficient manipulators are those that have fewer degrees of freedom than necessary to achieve any admissible configuration in their operational space.*

*This paper addresses the challenges associated with the computation of constrained forces at a cooperating manipulator system in the presence of kinematic deficiency. One may suggest eliminating the deficiency by reducing the size of the task space by removing the directions towards which the end-effector of the manipulator cannot move from the Jacobian. Considering that the range space of the Jacobian represents the space in which the end-effector of the manipulator is free to move. The space in which the tip of the manipulator cannot move is the one perpendicular to the range space. Therefore, it is the null space of the transpose of the Jacobian. The drawback of this method is that the computation of null space requires Singular*

*Value Decomposition (SVD), which introduces instability due to the fact that singular vectors are not unique, and may introduce discontinuity. This drawback alone makes this methodology impractical, not to mention the cost associated with the numerical computation of SVD. These are the disadvantages of the numerical methods in general addressing this issue. Consequently, there is a need for an analytical approach on which our work particularly concentrates.*

*We suggest two methods; “common load as mobile platform” and the “pseudo joint.” Common-load-as-mobile-platform method is essentially a modeling strategy. The basic idea behind it is to model the load carried by the manipulators as if it were the mobile platform carrying the manipulators. Hence, we need to re-label the body frames to reflect the new assignments of the end-effector and the base. The reason of this is to gain 6 DOF from the platform. In many cases, this additional 6 DOF together with appropriate constraint equations yield the constraint forces. For the other cases we propose the pseudo-joint method, which may be used in conjunction with the common-load-as-mobile-platform method.*

*The pseudo-joint method is used at a kinematically deficient system where additional 6 DOF introduced by the “common load as mobile platform” method is not sufficient. In this case, we first augment the system with additional joints called pseudo-joints and then remove them from the system by computed constraints, which actually correspond to stress along the pseudo-joints. Therefore, for the price of stress computation, we obtain full propagation of forces and torques including the constrained ones throughout the system.*

*These techniques can be applied to nonholonomic systems where the constraints are not integrable. We demonstrate the use of the algorithm on wheeled systems and show the constrained forces. In many applications it is critical to know the tire-road interaction forces, which determine how a vehicle turns, brakes and accelerates. Future work of this study includes multitrailer vehicle dynamics and control.*

**Keywords:** *Cooperating manipulators, kinematically deficient manipulators, common-load-as-mobile-platform, pseudo-joint.*

## **Giriş**

Kinematik yetersiz manipulatörler, çalışma alanlarında geçerli bütün konfigürasyonlara ulaşmak için gereken serbestlik derecelerinden daha azına sahip olan manipulatörlerdir. Birçok endüstriyel uygulama, manipulatörün uç noktasını herhangi bir yönde hareket ettirmek ve döndürmek için gerekli kinematik yeterlilik gerektirmez. Genellikle, istenen yörünge altı boyutlu işlemsel uzayın alt kümesinde yer alır. Kinematik artıklık, engel sakınımı veya eklem sınırı sakınımı gibi çalışma uzayı ve eklem uzayı kontrolleri gerekmedikçe, kinematik yetersiz manipulatörler çok serbestlik dereceli manipulatörlere göre maliyet, üretim kolaylığı ve kapladığı yer açısından üstünlük kazanır. Ayrıca, birlikte çalışan manipulatörler seri manipulatörlere göre doğruluk, yük dengesi ve yüksek yük kapasitesi gibi özelliklerle de avantaj sağlar. Bunlardan dolayı, belli uygulamalar, ortak bir görevi yerine getirmek için birlikte çalışan ve kinematik yetersiz çoklu manipulatörlerden faydalanmayı gerektirir.

Birlikte çalışan manipulatörlerin dinamik denklemini çözebilmek için öncelikle birbirleriyle etkileştikleri uç noktalarındaki kısıt kuvvetleri ve momentlerini çözmemiz gerekir. Bunu yapabilmek için de sisteme ilişkin Jakobiyen matrisinin sütunları, toplam çalışma uzayını tam olarak tarıyor olmalıdır. Bundan dolayı, manipulatörlerden birinin tekilliğe girmesi halinde sistemin dinamik modeli çalışmayacaktır. Kinematik yetersizlik ise bir anlamda bu tekilliğin sürekli olduğu durumdur.

Birlikte çalışan ve kinematik yetersizliği olan çoklu manipulatör kavramını aslında genel anlamıyla dinamik modelleme yöntemi olarak ele alıyoruz. Diğer bir deyişle, burada bahsettiğimiz yöntemler sadece manipulatörlerle sınırlı kalmayıp daha genel olarak rijit cisimler dinamiği için geliştirilmiştir. Örneğin araba veya daha basit olarak bisiklet gibi tekerlekli kara taşıtları bu sınıfın elemanlarıdır. Bisikletin tekerleklerini kinematik yetersiz birer manipulatör olarak modelleyebiliriz. Tekerleklerin bisikletin gövdesini tutması da modelde kinematik çevrimi kapayan ortak yük olarak ele alınabilir.

Birlikte çalışan manipulatörler robotik uygulamalarda dikkate değer bir önem taşır. Bu önem literatüre de yansımış ve Deo ve Walker (1996), Rodriguez, Jain ve Kreutz (1992), Anderson ve Critchley (2003) gibi daha pekçok araştırmacılar bu problem üzerinde çalışmışlar ve kendi yöntemlerini geliştirmişlerdir.

Kısıtlı manipulatörler Bruyninckx ve Khatib (2000) gibi araştırmacılar tarafından geniş çalışma alanı bulmasına rağmen özel olarak kinematik yetersiz manipulatörler bilimsel çevreler tarafından gereken ilgiyi görmemiştir. Abdel-Malek ve diğerleri (1999), kinematik yetersiz manipulatörlerde çalışma uzayı üzerine araştırma yapmıştır. Kinematik yetersiz manipulatör olan iki parmaklı tutaçların dinamik modeli Prattichizzo ve Bicchi (1996) tarafından çalışılmıştır. Ameliyat robotlarının kinematik yetersiz durumlarındaki modelleri diğer durumlardakiyle beraber Funda ve diğerleri (1996) tarafından değerlendirilmiştir. Manipulatörlerin dinamik modellemesinde kullanılmak üzere kinematik yeterlilik ölçütü üzerinde de çalışmalar vardır (Rico vd., 2006).

Holonomik olmayan sistemlere ilişkin çok detaylı bilgi ve araştırma (Bloch, 2003)'de bulunabilir. Özel olarak tekerlekli araç dinamiğiyle ilgili olarak robotik formalizmini kullanan az sayıdaki çalışmaya da (Holmberg vd., 2000) ve (Venture vd., 2006) örnek verilebilir. Gerek Holmberg'in ve gerekse Venture'nin kullandıkları tekerlek modeliyle bu makalede tanıtılan model arasında önemli farklar vardır.

Makalenin organizasyonu kısaca şöyledir: Kullanılan notasyon hakkında bilgi verildikten sonra birlikte çalışan manipulatörlerin dinamik modeli açıklanmaktadır. Sonra kinematik yetersiz manipulatörlerde karşılaşılan zorluklardan bahsedilmiş ve önerilen yöntemler tanıtılmıştır. Son olarak da, holonomik olmayan sistemler üzerinde uygulama yapılmış ve sonuçlar verilmiştir.

## **Notasyon**

Bu çalışmada uzaysal vektör notasyonu kullanılmıştır. Uzaysal hız vektörü, açısal hız vektör uzayı ve doğrusal hız vektör uzayının birleşme-

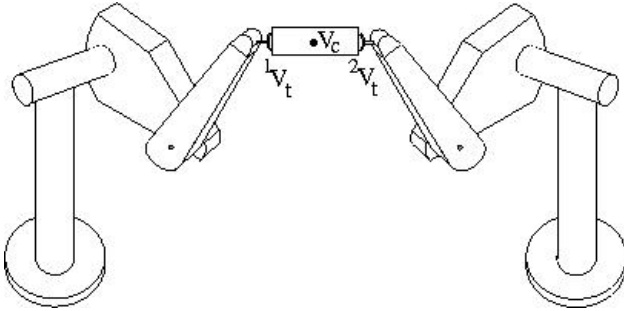
siyle oluşur. Aynı şekilde, uzaysal kuvvet vektörü, moment vektör uzayı ve kuvvet vektör uzayının birleşmesiyle oluşur. Bunlar şu şekilde gösterilirler:

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{v} \end{bmatrix} \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} \vec{\tau} \\ \vec{f} \end{bmatrix}$$

Yukarıda da görüldüğü gibi, uzaysal vektör  $\vec{X}$  örneğinde olduğu gibi iki okla, fiziksel vektör  $\vec{x}$  ise standart notasyon olan bir okla gösterilmiştir. Bunun dışındaki matematiksel tanımlı bütün vektörler  $\underline{X}$  şeklinde alt çizgili olarak ve ayrıca "i" numaralı manipülatöre ilişkin değişkenler de  ${}^i X$  olarak gösterilmiştir.

### Birlikte çalışan manipülatörlerin dinamiği

Şekil 1'de iki puma kolunun birlikte çalışarak ortak yükü kaldırdıkları görülmektedir.



Şekil 1. Birlikte çalışan manipülatörler

Her bir kolun ters dinamik denklemini yazarak başlayalım.

$${}^i \underline{\tau} = {}^i \mathbf{M}^i \underline{\ddot{\theta}} + {}^i \underline{C} + {}^i J^T {}^i \vec{F}_t \quad (1)$$

burada  $i=1,2$  olup  $\underline{\tau}$  eklemlere uygulanan momentleri,  $\mathbf{M}$  genelleştirilmiş kütle matrisini,  $\underline{C}$  koryolis ve yerçekimi terimini,  $J$  Jakobiyen operatörünü,  $\underline{\ddot{\theta}}$  eklem ivmelerini ve  $\vec{F}_t$  uç noktasındaki uzaysal kuvveti temsil etmektedir. Her iki kol için (1)'i alt alta yazar ve buradaki terimleri tek matris olacak şekilde düzenlersek

$$\underline{\tau} = \mathbf{M} \underline{\ddot{\theta}} + \underline{C} + J^T \underline{F}_t \quad (2)$$

elde ederiz. Şekil 1'de görüldüğü üzere, manipülatörlerin uç noktaları arasında, ortak yükün rijit olmasından dolayı, doğrusal bir ilişki vardır. Bunu şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\underline{V}_t = \mathbf{A} \vec{V}_c \quad (3)$$

Buna karşılık gelen dinamik bağıntı

$$\mathbf{A}^T \underline{F}_t = \vec{F}_c \quad (4)$$

şeklinindedir. Jakobiyen tanımından ve (3)'ten biliniyor ki

$$\underline{V}_t = J \underline{\dot{\theta}} = \mathbf{A} \vec{V}_c \quad (5)$$

(5)'in zamana göre türevi alınırsa

$$\underline{\alpha}_t = J \underline{\ddot{\theta}} + \dot{J} \underline{\dot{\theta}} = \mathbf{A} \vec{\alpha}_c + \underline{a}_c \quad (6)$$

olur. Burada  $\underline{a}_c$  ortak yükün koryolis ve santrifüj uzaysal ivmesini temsil etmektedir.

Öte yandan (4)'e ortak yükün dinamiği eşitlenebilir.

$$\mathbf{A}^T \underline{F}_t = \vec{F}_c = \mathbf{M}_c \vec{\alpha}_c + \vec{b}_c \quad (7)$$

burada  $\vec{b}_c$  ortak yükün jiroskobik uzaysal kuvvetini temsil etmektedir. Şimdi (2)'yi kullanarak elde edilen ileri dinamik denklemi  $J$  ile soldan çarpılırsa

$$J \underline{\ddot{\theta}} = \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} (\underline{\tau} - \underline{C}) - \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} J^T \underline{F}_t \quad (8)$$

bulunur. (6) ve (7)'den

$$J \underline{\ddot{\theta}} = \mathbf{A} \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{A}^T \underline{F}_t - \underline{a}' \quad (9)$$

burada  $\underline{a}' = \mathbf{A} \mathbf{M}_c^{-1} \vec{b}_c \underline{F}_t - \underline{a}_c + \dot{J} \underline{\dot{\theta}}$ . (8) ve (9) eşitlenirse

$$\Omega_a \underline{F}_t = \mathbf{J} \mathbf{M}^{-1} (\underline{\tau} - \underline{C}) + \underline{a}' \quad (10)$$

ve

$$\Omega_a = \mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T + \mathbf{A}\mathbf{M}_c^{-1}\mathbf{A}^T \quad (11)$$

olarak bulunur.

### Ortak yük yerine mobil platform yöntemi

Uzayda (ağırlıksız ortamda) serbestçe duran platform üzerinde birlikte çalışan manipülatörlerden oluşan sistemi modellemekle başlayalım. Öncelikle  $\underline{\dot{\theta}}$ 'ın tanımının genişletilmesi gerekiyor.

$$\underline{\dot{\theta}} = \begin{bmatrix} \ddot{V}_b \\ \dot{\theta}^1 \\ \dot{\theta}^2 \end{bmatrix}$$

Buna bağlı olarak  $\mathbf{M}$  genelleştirilmiş kütle matrisinin,  $\underline{C}$  koriolis ve yerçekimi teriminin ve  $J$  Jakobiyeen operatörünün tanımlarının da genişletilmesi gerekiyor. Bunlarla ilgili detaylar Yeşiloğlu, (2007)'de verilmiştir.

Genişletilmiş tanımları kullanarak ters dinamik denklemi (2)'de verilen formda olacaktır

$$\underline{\tau} = \mathbf{M}\underline{\ddot{\theta}} + \underline{C} + \mathbf{J}^T \underline{F}_t \quad (12)$$

Şekil 1'de verilen sistem yeniden ele alınıp, ortak yük mobil platform olarak modellenir. Diğer tarafta da uç noktası için

$$\underline{V}_t = \mathbf{J}\underline{\dot{\theta}} = \underline{0} \quad (13)$$

yazarız. (13)'ün türevinden

$$\mathbf{J}\underline{\ddot{\theta}} = -\dot{\mathbf{J}}\underline{\dot{\theta}} \quad (14)$$

bulunur. (12)'den  $\underline{\ddot{\theta}}$  çekilip soldan  $J$  ile çarpılırsa (8)'deki forma benzeyen yapı elde edilir. Bu (14) ile eşitlendiğinde

$$\underline{F}_t = \mathbf{A}^T \ddot{\underline{F}}_c \quad (15)$$

$$\Omega_b \underline{F}_c = \mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}(\underline{\tau} - \underline{C}) + \mathbf{A}\dot{\mathbf{J}}\underline{\dot{\theta}} \quad (16)$$

ve

$$\Omega_b = \mathbf{A}\mathbf{J}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{J}^T \mathbf{A}^T \quad (17)$$

olarak bulunur.

$\underline{F}_t$ 'nin çözümü ancak (11)'de verilen  $\Omega_a$ 'nın veya (17)'de verilen  $\Omega_b$ 'nin tam rank olmasına bağlıdır.  $\Omega_a$ 'nın tam rank olması için sistemdeki her manipülatörün Jakobiyeenin rankının 6 olması gerekir. Bu oldukça kısıtlayıcı bir durumdur. Kinematik yetersiz manipülatörlere hiçbir zaman uygulanamaz. Kinematik yeterliliği olan manipülatörlerde de tekillik oluştuğunda çözüm elde edilemez. Oysa  $\Omega_b$ 'nin tanımında mobil platformdan dolayı sisteme 6 serbestlik derecesi eklenmiştir. Bu durum  $\Omega_b$ 'nin tam rank olması için pek çok pratik uygulamada yeterlidir.

$\underline{F}_t$  (12)'de yerine konulacak olursa, hareket denklemi

$$\underline{\ddot{\theta}} = \mathbf{D}\underline{\tau}_c + \underline{E} \quad (18)$$

halini alır. Burada  $\underline{\tau}_c = \underline{\tau} - \underline{C}$  dir.

### Birlikte çalışan kinematik yetersiz manipülatörlerin dinamiği

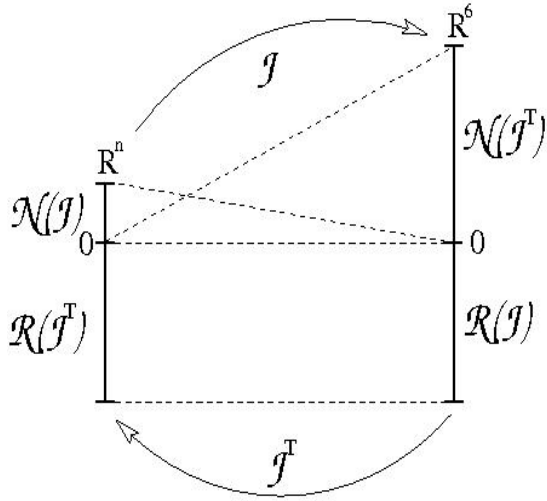
Birlikte çalışan kinematik yetersiz manipülatörlerin dinamiği için aşağıda iki yöntem tanıtılacaktır.

#### Sayısal yöntem

Tekil konfigürasyon durumundaki jakobiyeenin rank eksikliği problemine veya altı serbestlik derecesinden az manipülatörlere değinmek için, çalışma uzayının boyutunu düşürmek önerilebilir. Bunu yapabilmek için, öncelikle manipülatörlerin uç noktasının gidemeyeceği yönlerin bulunması gerekir. Jakobiyeenin transpozunun null uzayı bize bu yönleri verir. Bunu temel alarak, indirgenmiş iş uzayının koordinat dönüşümü aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$R = N(N(J^T)^T)^T \quad (19)$$

Burada  $N$  null uzay operatörüdür.



Şekil 2. Jakobiyen operatörü eklem uzayı ile çalışma uzayı arasında eşleme yapar

Şekil 2'den de görüleceği üzere,  $N(J^T)$  manipülatörün uç noktasının gidemeyeceği uzayın baz vektörlerini verir. Bu uzaya  $N$  denilsin. Bu uzayın baz vektörlerinin transpozunu null uzay operatörüne uygulandığında ise  $N$  uzayına dik olay uzayın baz vektörlerine ulaşılır. Bu da manipülatörün uç noktasının gidebildiği uzaydır.  $R$  burada uzay indirgeme operatörüdür ve şu şekilde kullanılır:

$$J_r = RJ \quad (20)$$

Ortogonalite özelliğinden dolayı

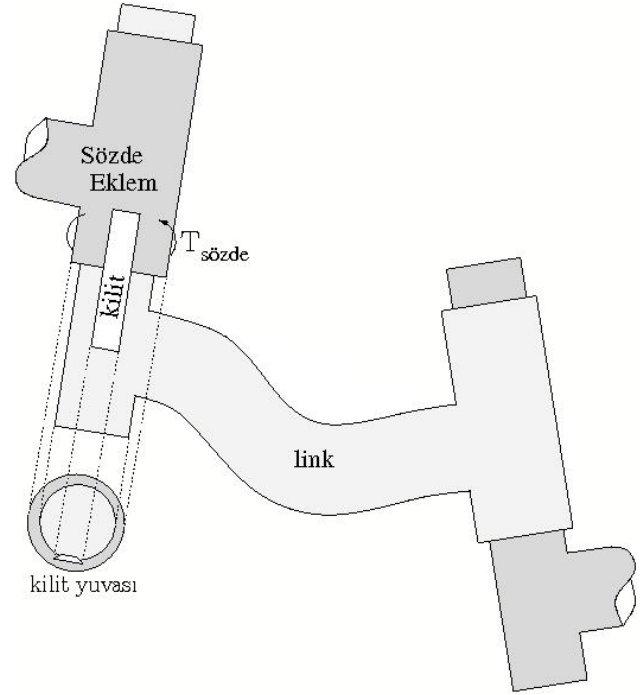
$$J = R^T J_r \quad (21)$$

eşitliği de geçerlidir.

Bu yöntem, sayısal olarak null uzayın hesabını gerektirdiği için problemlidir. Tekil vektörlerin tek olmaması süreklilik garanti etmez ve bu durum algoritmada sayısal kararsızlığa yol açabilir. Ayrıca, Tekil Değer Ayrıştırması (SVD) sayısal hesaplama anlamında oldukça pahalı bir yöntemdir.

### Sözde Eklem Yöntemi

Gerçekleşmesi kolay ve nümerik olarak verimli alternatif yaklaşım, linklerin burkulma momentlerini hesaplamaktır. Önce, gerçekte olmayan eklemler olduğu varsayılır ve sonra Şekil 3'de gösterildiği üzere bu eklemlerin açılma momentlerini sıfır yapacak momentler hesaplanır.



Şekil 3. Sözde eklem

Öncelikle, eklem uzayını gerçek ve sözde eklem olmak üzere iki alt uzaya bölen lineer bir operatör bulmamız gerekiyor. Bu  $S$  olsun.  $S$ ,  $n \times n$  lik bir birim matrisin satırları yer değiştirilerek elde edilir. Burada  $n$  sözde eklemlerin toplam serbestlik derecesidir. (18)'deki ileri dinamik denklemini yeniden düzenlersek, denklem şu hale gelir:

$$S\ddot{\theta}_{augmented} = (SDS^T)S\tau_{augmented} + SE \quad (22)$$

(22)'de verilen denklem gerçek ve sözde eklem uzaylarına ayrıştırılırsa

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\theta}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 & \mathbf{d}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_c \\ \tau_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

elde edilir.  $\ddot{\theta}_p = \mathbf{0}$  olduğundan

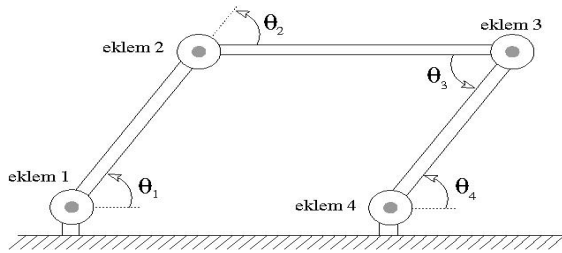
$$\ddot{\theta} = \mathbf{D}_r \tau_c + \mathbf{E}_r \quad (24)$$

dinamik denkleminde ulaşılır. Burada

$$\mathbf{D}_r = \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_4^{-1} \mathbf{d}_3 \quad (25)$$

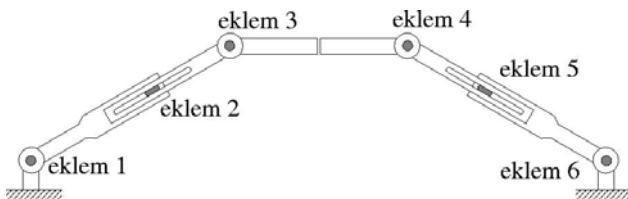
$$\underline{E}_r = \underline{e}_1 - \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_4^{-1} \underline{e}_2 \quad (26)$$

olarak bulunur. Bu denklemlerde  $d_4$ 'ün nasıl tam rank yapılacağı, açıklanması gereken bir tasarım konusudur. Diyelim ki Şekil 4'de gösterilen düzlemsel dört kollu link yapısında  $\ddot{\theta}_2 = 0$  ve  $\ddot{\theta}_3 = 0$  olacak şekilde 2 ve 3 numaralı eklemleri kısıtlansın ve bu eklemler sözde eklem olarak atansın. Öte yandan, Şekil 4'de görülen  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  ve  $\theta_4$  açıları birbirlerine eşittir. Bu yüzden de herbiri bir diğerine bağımlıdır. Dolayısıyla, sistemde dört eklem olmasına rağmen sadece bir tanesi bağımsızdır. Sonuç olarak, gerekli momenti uygulayarak  $\ddot{\theta}_2$ 'in her zaman sıfır kalması sağlanırsa, bu zaten  $\ddot{\theta}_3$ 'in de sıfır olmasını zorunlu kılar. Buradan,  $d_4$ 'ün rank kaybetmesinin sözde eklemler arasındaki bağımlılıktan kaynaklandığı anlaşılır.



Şekil 4. Dört-kollu düzlemsel link

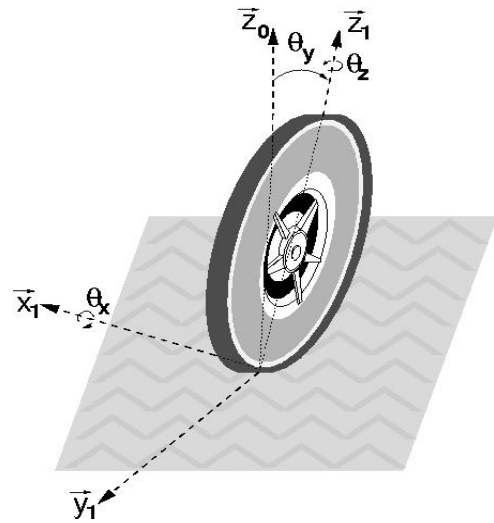
Sözde eklem yöntemini Şekil 4'de gösterilen dört kollu link yapısına uygulamak için öncelikle sistem, birlikte çalışan iki kola bölünür. Örneğin, yere paralel olan link ortasından kesilebilir. Sonra, her kola ekstra eklemler ekleyerek her biri istenilen serbestlik derecesine getirilir ki böylece  $\Omega$  matrisi tersi alınabilir olsun. Şekil 5'de 2 ve 5 numaralı eklemlerin sözde eklem seçilmesi halindeki olası konfigürasyon görülmektedir.



Şekil 5. Sürgülü dört-kollu düzlemsel link

## Holonomik olmayan sistemler üzerinde uygulama

Kaymadan yuvarlanma hareketi, genelleştirilmiş hızların fonksiyonu olarak ifade edilen fakat konumların fonksiyonuyla ifade edilemeyen kısıtlara bağlı olduğu için kaymadan yuvarlanan tekerlek holonomik olmayan sistemler kümesinin bir elemanıdır. Holonomik sistemler tanım itibarıyla Lagrange mekaniği, Hamilton Mekaniği ve momentumun korunumu yasalarına uyan sistemlerdir. Holonomik olmayan sistemler için ise Lagrange d'Alembert mekaniği, holonomik olmayan Hamilton mekaniği ve momentum denklemleri geçerlidir.



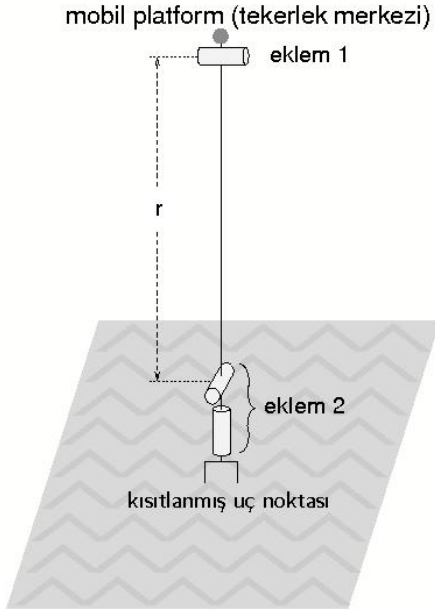
Şekil 6. Kaymadan yuvarlanma hareketi yapan tekerlek

Bu yüzden kısıt kuvvetleri genellikle dinamik denklem çözümünden elimine edilir. Oysa tekerlek ile yol arasındaki kuvvetler araç dinamiği ve kontrolü için çok önemlidir.

## Tek tekerlek modeli

Kaymadan yuvarlanan bir tekerlek üç serbestlik derecesine sahiptir. Genellikle, bu serbestlik derecelerinin Şekil 6'da görüldüğü gibi tekerlek ile yol arasındaki temas noktasında olduğu düşünülür. Tekerlek dinamiğini robotik formalizmiyle çözmeye çalışan az sayıdaki yayında da hep bu eğilim vardır, örneğin (Venture vd., 2006) ve (Holmberg vd., 2000). Oysa, tekerliğin hareketi gerçekte iki alt harekete bölünmelidir; kendi merkezi etrafında dönme ve temas noktasında da dönmeye bağlı öteleme yapması şek-

linde. Bunun sembolik gösterilimi Şekil 7’de verilmiştir.



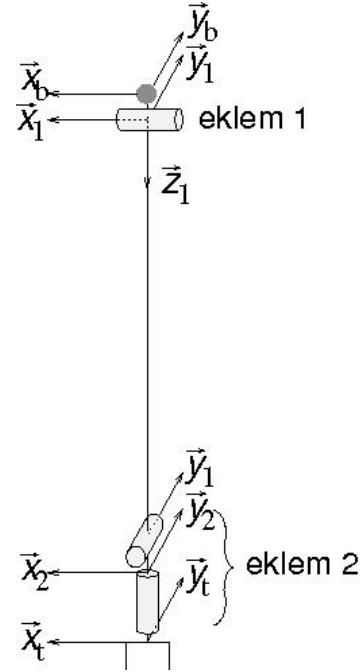
Şekil 7. Tekerlek için önerilen eklem atamasını gösteren sembolik model

Burada yönelim ve devrilme serbestlik dereceleri yerdeki temas noktasında tanımlanmış 2 serbestlik dereceli (SD) eklem üzerinden, dönme hareketi ise tekerlek merkezine yerleştirilmiş 1 SD’li eklem ile yapılmaktadır. Tekerleğin kütlesi ve eylemsizliği, Şekil 7’de mobil platform olarak gösterilen merkezde noktasal olarak tanımlanmıştır. Bu şekilde gösterilen r tekerleğin yarıçapıdır. Şekil 8’de gösterilen monosikleti düşünelim.



Şekil 8. Monosiklet ve onun sembolik gösterilimi

Bununla ilgili eksen ataması da Şekil 9’da gösterildiği gibi olsun.



Şekil 9. Monosiklet için eksen takımı ataması

Burada dikkat çekilmesi gereken bir konu, 2 numaralı eklem için SD’lerinden devrilme SD’nin dönme eksenini kendi linki üzerinde tanımlı eksen takımına göre değil, 1 numaralı linkin eksen takımına göre tanımlanmıştır.

Kısıt analizi ile başlayalım. Uç noktasında iki yönde kayma kısıtı vardır; yanal yönde ve hareket yönünde. Önce yanal yöndeki kısıtı  $f(x)\dot{x} = 0$  olarak ifade edilen Pfaffian kısıtı formuna indirgenebilecek şekilde yazalım.

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{V}}_t = 0 \quad (27)$$

Burada

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{x}_1 \end{bmatrix} \quad (28)$$

$\tilde{\mathbf{A}}$ ,  $\mathbf{A}$ ’nın anihilatörü, yani null uzayının baz vektörlerinden oluşmuş olsun. Dolayısıyla;

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{A}} = 0 \quad (29)$$



$\mathbf{A}$ 'nın seçimi tek olmamakla beraber aşağıdaki şekilde tanımlanabilir

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1^T & \bar{0}^T \\ \bar{y}_1^T & \bar{0}^T \\ \bar{z}_1^T & \bar{0}^T \\ \bar{0}^T & \bar{y}_1^T \\ \bar{0}^T & \bar{z}_1^T \end{bmatrix} \quad (30)$$

Dikkat edilirse burada  $\mathbf{A}$  ortogondur ve bundan dolayı:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad (31)$$

özelliğine sahiptir. (27)'yi ve (29)'u kullanarak, beş boyutlu bir manifoldda tanımlı öyle bir  $\underline{V}_c$  vardır ki;

$$\bar{V}_t = \mathbf{A}^T \underline{V}_c \quad (32)$$

olsun. Öte yandan hareket yönündeki kayma kısıtı da şu şekilde ifade edilebilir:

$$\underline{V}_c = \mathbf{B}\dot{\underline{\theta}} \quad (33)$$

Burada ortak-yük-yerine-mobil-platform yöntemini kullandığımızdan dolayı  $\dot{\underline{\theta}}$ , 9 boyutlu uzayın bir vektörüdür. Daha açık olarak:

$$\dot{\underline{\theta}} = \begin{bmatrix} \bar{V}_b \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

ve  $\mathbf{B}$  matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdiye kadar kısıtların kinematik analizi yapıldı. Kısıtlardan kaynaklanan kuvvetleri yazabilmek için tekerleğin yerle yaptığı temas noktasında yapılan iş yazılır ve (32)'de verilen denklem kullanılır.

$$\bar{F}_t^T \bar{V}_t = \bar{F}_t^T \mathbf{A}^T \underline{V}_c = (\mathbf{A}\bar{F}_t)^T \underline{V}_c = \underline{F}_c^T \underline{V}_c \quad (36)$$

(36)'da tanımlandığı üzere;

$$\underline{F}_c = \mathbf{A}\bar{F}_t \quad (37)$$

Öte yandan  $\mathbf{A}^T$ 'un hedef (range) uzayı ile  $\tilde{\mathbf{A}}$ 'un hedef uzayının birbirine dik uzaylar olduğu gerçeğinden hareketle  $\bar{F}_t$  iki bileşene ayrılabilir:

$$\bar{F}_t = \underline{F}_m + \underline{F}_s \quad (38)$$

Daha açık olarak:

$$\bar{F}_t = \mathbf{A}^T \underline{\xi} + \tilde{\mathbf{A}}\eta \quad (39)$$

(39)'da verilen denklem, (31)'i de kullanarak (37)'de yerine konursa;

$$\underline{F}_c = \underline{\xi} \quad (40)$$

olduğu çıkar. (40)'ı (39)'da kullanarak;

$$\bar{F}_t = \mathbf{A}^T \underline{F}_c + \tilde{\mathbf{A}}\eta \quad (41)$$

ifadesini elde ederiz. Burada  $\eta$  terimi iş görme-yen kuvvettir.  $\bar{F}_t$ 'nin minimum norm çözümü  $\eta$ 'yı sıfır almaktır. Sonuç olarak:

$$\bar{F}_t = \mathbf{A}^T \underline{F}_c \quad (42)$$

elde edilir. Şimdi, uç noktasında yapılan işi tekrar değerlendirmek üzere ve bu sefer sırasıyla (42), (32), (31) ve (33) kullanılsın.

$$\bar{F}_t^T \bar{V}_t = (\mathbf{A}^T \underline{F}_c)^T \mathbf{A}^T \underline{V}_c = \underline{F}_c^T \underline{V}_c = \underline{F}_c^T \mathbf{B}\dot{\underline{\theta}}$$

$$= (\mathbf{B}^T \underline{F}_c)^T \dot{\underline{\theta}} = \underline{\tau}_t^T \dot{\underline{\theta}} \quad (43) \quad \underline{F}_c = \Omega^{-1} (\mathbf{A}\Phi_t \Phi_a + (\mathbf{A}\mathbf{J} - \mathbf{B})\mathbf{M}^{-1} \underline{\tau}_c - \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{B}\dot{\underline{\theta}}) \quad (53)$$

(43)'ten

$$\underline{\tau}_t = \mathbf{B}^T \underline{F}_c \quad (44)$$

olarak tanımlanan  $\underline{\tau}_t$  kısıt kuvvetlerinden dolayı oluşan moment büyüklüğü elde edilir. Bunu dahil ederek ters dinamik denklemi yazılırsa:

$$\underline{\tau}_a + \underline{\tau}_t = \mathbf{M}\ddot{\underline{\theta}} + \underline{\mathbf{C}} + \mathbf{J}^T \ddot{\underline{F}}_t \quad (45)$$

ve (44) kullanılırsa:

$$\underline{\tau}_c = \mathbf{M}\ddot{\underline{\theta}} + (\mathbf{A}\mathbf{J} - \mathbf{B})^T \underline{F}_c \quad (46)$$

elde edilir. Burada

$$\underline{\tau}_c = \underline{\tau}_a - \underline{\mathbf{C}} \quad (47)$$

(46)'dan elde edilen ileri dinamik denklemi

$$\ddot{\underline{\theta}} = \mathbf{M}^{-1} (\underline{\tau}_c - (\mathbf{A}\mathbf{J} - \mathbf{B})^T \underline{F}_c) \quad (48)$$

olur. Şimdi kinematiğe geri dönerek (32), (33) ve Jakobiyen tanımı kullanılırsa;

$$\ddot{\underline{V}}_t = \mathbf{A}^T \mathbf{B}\dot{\underline{\theta}} = \mathbf{J}\dot{\underline{\theta}} \quad (49)$$

elde edilir. Bunun zamana göre türevi alınırsa;

$$\dot{\underline{V}} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}\ddot{\underline{\theta}} + \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{B}\dot{\underline{\theta}} = \mathbf{J}\ddot{\underline{\theta}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\underline{\theta}} \quad (50)$$

olur. (50)'yi düzenlersek

$$(\mathbf{J} - \mathbf{A}^T \mathbf{B})\ddot{\underline{\theta}} = \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{B}\dot{\underline{\theta}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\underline{\theta}} \quad (51)$$

bulunur. (51) soldan  $\mathbf{A}$  ile çarpılınsın

$$(\mathbf{A}\mathbf{J} - \mathbf{B})\ddot{\underline{\theta}} = \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{B}\dot{\underline{\theta}} - \mathbf{A}\dot{\mathbf{J}}\dot{\underline{\theta}} \quad (52)$$

(48) de soldan  $(\mathbf{A}\mathbf{J} - \mathbf{B})$  ile çarpılır ve bu (50) ile eşitlenirse

$$\Omega = (\mathbf{A}\mathbf{J} - \mathbf{B})\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{A}\mathbf{J} - \mathbf{B})^T \quad (54)$$

elde edilir.

### İki tekerlekli araç modeli

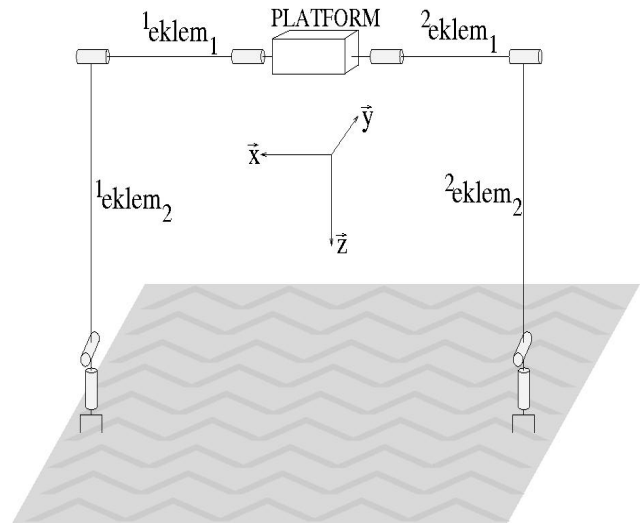
Yukarıda verilen monosiklet dinamik denklemi bütün tekerlekli araçlarda uygulanabilecek kadar geneldir.  $\tilde{\mathbf{A}}$ 'nın tanımını değiştirmek gibi ufak değişikliklerle diğer tekerlekli araçlara uyarlanabilir.

Yukarıda verilen formülasyon Şekil 10'da görülen iki tekerlekli araca uygulanacaktır.



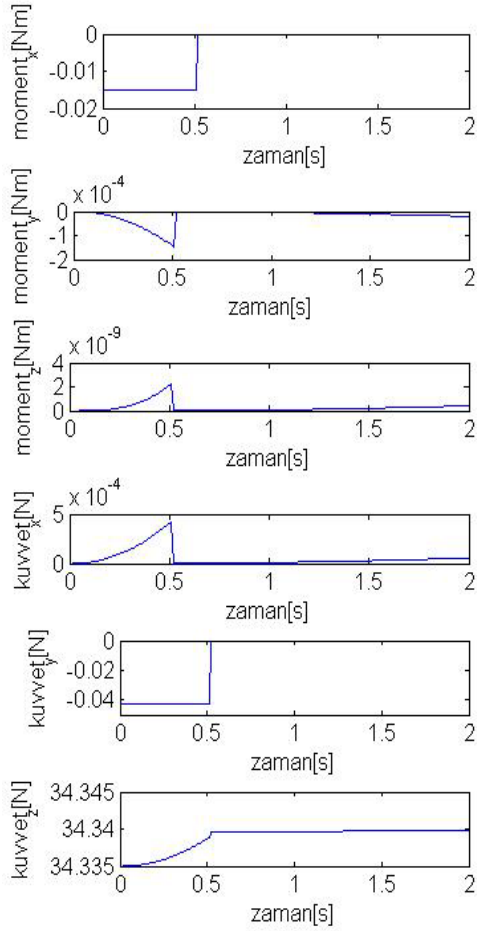
Şekil 10. İki tekerlekli araç

İki tekerlekli aracın sembolik gösterilimi Şekil 11'de verilmiştir. Burada her iki kolda da bir numaralı link havada dönen tekerleğe karşı düşmektedir. Uç noktası olarak gösterilen yerle temas noktaları ise kaymama kısıtı altında hareket etmektedir.



Şekil 11. Aracın sembolik gösterilimi





Şekil 14. Sağ tekerleğin yerle temas noktasındaki kuvvet ve momentler

## Kaynaklar

- Abdel-Malek, K., Yeh, H., ve Khairallah, N., (1999). Workspace, void, and volume determination of the general 5 dof manipulator. *Mechanics of Structures and Machines*, **27**, 1, 91–117.
- Anderson, K.S. ve Critchley, J.H., (2003). Improved order-n performance algorithm for the simulation of constrained multi-rigid-body systems. *Multi-body Systems Dynamics*, **9**, 185–212.

- Bloch, A., (2003) *Nonholonomic Mechanics and Control*. Springer, New York.
- Bruyninckx, H., ve Khatib, O., (2000). Gauss' principle and the dynamics of redundant and constrained manipulators. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics & Automation*, 2563–2568, San Francisco, CA.
- Deo, A.S. ve Walker I.D., 1996. Dynamics and control of multiple cooperating manipulators with rolling contacts. *Journal of Robotic Systems*, **13**, 10,619–648.
- Funda, J., Taylor, R., Eldridge, B., Gomory, S., ve Gruben, K., (1996). Constrained cartesian motion control for teleoperated surgical robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **12**, 3, 453–465.
- Holmberg, R., ve Khatib., O., (2000). Development and control of a holonomic mobile robot for mobile manipulation tasks. *International Journal of Robotics Research*, **19**, 11, 1066–1074.
- Prattichizzo, D., ve Bicchi., A., (1996). Specifying consistent control goals for kinematically defective manipulation systems. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 3532–3537, Mineapolis, MN, USA.
- Rico, J.M., Aguilera, L.D., Gallardo, J., Rodriguez, R., Orozco, H., ve Barrera, J.M., (2006). A more general mobility criterion for parallel platforms. *Journal of Mechanical Design*, **128**, 207–219.
- Rodriguez, G., Jain, A., ve Kreutz K., 1992. Spatial operator algebra for multibody systems dynamics. *The Journal of the Astronautical Sciences*, **40**, 1, 27–50.
- Venture, G., Ripert, P., Khalil, W., Gautier, M., ve Bodson, P., (2006). Modeling and identification of passenger car dynamics using robotics formalism. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **3**, 349–359.
- Yeşiloğlu, S.M. (2007). *High performance dynamical modeling of complex topology systems. Doktora tezi*. Fen Bilimleri Enstitüsü, İTÜ.