itüdergisi/***c***
fen bilimleri
Cilt:1, Sayı:1, 32-36
Aralık 2002

Süpersimetrik alan teorileri ve kohomoloji

S. Kayhan ÜLKER*, Mahmut HORTAÇSU

İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Fizik Bölümü, 34469, Ayazağa, İstanbul

Özet

Bu çalışmada, genel anlamda süpersimetrik alan teorilerinin kohomolojik yapısı çalışılmıştır. Kohomoloji problemi süpersimetri cebri kullanılarak tanımlanmıştır. Süpersimetrik alan teorilerinin eylemlerinin ilgili çoklukların en üst elemanı olduğu kullanılarak elde edilen bu kohomoloji probleminin çözümleri yardımıyla bu eylemlerin düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu süpervaryasyonları olarak temsil edilebileceği gösterilmiştir. Bu yaklaşımın bir uygulaması olarak Wess-Zumino modelinin kohomolojik yapısı incelenmiştir. Elde edilen sonuçlardan modelin eyleminin kinetik, kütle ve etkileşme terimlerinin kabuk-dışı süpersimetrik durum için tam olarak düşük boyutlu alan polinomlarının kiral ve/veya anti-kiral çoklu süper varyasyonları ile yazılabileceği gösterilmiştir.
Anahtar Kelimeler: *Süpersimetri, süpersimetrik alan teorileri, kohomoloji.*

Supersymmetric field theories and cohomology

Abstract

In this work, the cohomological structure of supersymmetric field theories is studied in a general context. Cohomology problem is defined by using the off-shell structure of the supersymmetry algebra. In order to define a cohomology problem it is crucial to use the two component (Weyl) formalism of the supersymmetry algebra, since each individual component of chiral and anti-chiral supersymmetry generators are nilpotent operators. It is then possible to show that the actions of supersymmetric field theories belong to a class of solutions of this cohomology problem and can be represented as multiple supervariations of some lower dimensional field polynomials due to the fact that the actions of supersymmetric field theories can be viewed as the highest component of respective multiplets. It is also discussed that the aforementioned algebraic structure can be thought as the algebraic source of the well-known non-renormalization theorems of several supersymmetric field theories. As an application of our method, the cohomological structure of Wess-Zumino model is discussed. It is shown that the kinetic, mass and the interaction terms can be constructed from the chiral and/or anti-chiral supervariations of the lower dimensional field polynomials for off-shell supersymmetry. It is then found out that the well known non-renormalization theorems of Wess-Zumino model is related to the terms that can only be written as pure chiral or anti-chiral supervariations of (mass) dimension three fields.
Keywords: *Supersymmetry, supersymmetric field theories, cohomology.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: S. Kayhan ÜLKER. kulker@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 69 63.
Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Edebiyat Fakültesi'nde tamamlanmış "Süpersimetrik alan teorilerinin kohomolojik yapıları" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 14.06.2002 tarihinde dergiye ulaşmış, 29.11.2002 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2002 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

Giriş

Kuantum alan teorilerinin süpersimetrik genelleştirilmeleri (Wess ve Bagger, 1992; Weinberg, 2000) günümüz parçacık fizikçileri tarafından hem fenomenolojik ve hem de teknik açıdan pek çok fayda getirdiğinden yoğun olarak çalışılmaktadır.

Süpersimetri basitçe, bir teorideki fermiyonlar ve bozonlar arasında tanımlanan bir simetri olarak düşünülebilir. Dolayısıyla süpersimetri sayesinde birbirlerine dönüşen farklı spinli fermiyon ve bozonlar bir (süper) simetri çoklusunun elemanları olarak yazılabilir. Herhangi bir süperçokluda fermiyon ve bozon sayıları birbirlerine eşittir ve aynı süperçokluya ait olan tüm fermiyon ve bozon alanları aynı kütleye ve aynı bağlanma sabitine sahiptir.

Süpersimetrik bir teorinin eylemi süperçoklular yardımıyla yazılabilir. Bileşen alan formülasyonunda, eylemin sahip olması istenen süperçoklular belirlendikten sonra, eylem bu süperçokluların elemanlarının standart kuantum alan teorisinden bilinen kinetik terimleri ve D boyutta renormalize edilebilir en genel etkileşme ve kütle terimlerini içeren bir ifade ile verilir. Doğal olarak, eylemdeki bu terimlerin katsayılarının alabilecekleri değerler, eylemin süpersimetri altında değişmez kalma şartıyla kısıtlanmıştır.

Diğer taraftan süpersimetri sayesinde farklı özelliklere sahip alanların tek bir süpersimetri çoklusunun elemanları olarak yazılabilmesinin sonucu, süpersimetrik bir teoriden elde edilen hareket denklemleri, (süper) akımlar v.b. gibi fiziksel ifadeler de bu ifadelerle ilgili bir çoklunun elemanları olarak yazılabilir. Dolayısıyla, süpersimetrik bir teorinin eyleminin tamamı ya da ayrı ayrı kinetik, kütle ve etkileşme terimleri de bir süperçoklunun elemanı olarak düşünülebilir. Üstelik, bu terimler süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kaldıklarından, dahil oldukları çoklunun en yüksek (boyutlu) elemanı olmalıdır ve prensip olarak çoklunun en düşük (boyutlu) elemanının çoklu süpervaryasyonu olarak elde edilebilmelidirler.

Bu amaçla, aşağıdaki bölümde N-genişletilmiş süpersimetri cebri kullanılarak bir kohomoloji problemi tanımlanacaktır. Bu kohomoloji probleminin çözümleri ile süpersimetrik bir teorinin eylemi arasındaki ilişki incelenerek, eylemin genelde düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu süpervaryasyonları ile temsil edilebileceği gösterilecektir. Bu yöntemin bir uygulaması olarak elde edilen sonuçlar, Wess-Zumino modeli için kullanılarak, modelin (kabuk-dışı) süpersimetrik eylemi düşük boyutlu alan polinomlarından elde edilecektir.

Süpersimetri kohomolojisi

Bir teorideki fermiyon ve bozonlar arasında tanımlanan süpersimetri dönüşümleri için bir süpersimetri üreteci, şematik olarak:

$$\delta(\text{fermiyon})=\text{bozon}\,,\ \delta(\text{bozon})=\text{fermiyon} \qquad (1)$$

şeklinde gösterilebilir. N-genişletilmiş süpersimetri için dört boyutta spinörler Weyl formülasyonu kullanılırsa, süpersimetri üreteci:

$$\delta=\theta^{i\alpha}Q_{i\alpha}+\overline{\theta}_{i\dot{\alpha}}\overline{Q}^{i\dot{\alpha}} \qquad (2)$$

şeklinde yazılabilir (Bu çalışma boyunca Wess ve Bagger (1992)'de verilen notasyon kullanılmıştır). Burada, θ ve $\overline{\theta}$ Grassmann değerli süpersimetri parametreleri, Q ve $\overline{Q}$ sırasıyla anti-komüt eden kiral ve anti-kiral süpersimetri üreteçleri, $\alpha,\dot{\alpha}=1,2$ spinör indisleri ve $i,j=1,2,...,N$ süpersimetri indisleridir.

Bu formülasyonda, N genişletilmiş süpersimetri cebri:

$$\left\{Q_{i\alpha},\overline{Q}_{j\dot{\alpha}}\right\}=-2i\delta_{ij}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\beta}}\partial_{\mu}+\delta_{ayar}(\Phi) \qquad (3)$$

$$\left\{Q_{i\alpha},Q_{j\beta}\right\}=\varepsilon_{\alpha\beta}Z_{ij}\,,\ \left\{\overline{Q}_{i\dot{\alpha}},\overline{Q}_{j\dot{\beta}}\right\}=\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{Z}_{ij} \qquad (4)$$

$$\varepsilon_{12}=-\varepsilon_{21}\ ,\ Z_{ij}=-Z_{ji}\ ,\ \overline{Z}_{ij}=-\overline{Z}_{ji} \qquad (5)$$

şeklindedir. Burada, $\delta_{ayar}(\Phi)$ parametresi teorinin alanları cinsinden yazılabilen ayar dönüşümleri ve Z de merkezcil yüklerdir. Kullanılacak hesaplamaların daha basit ve açık gösterilmesi için yukarıdaki cebirde spinör ve süpersimetri indis ikilileri tek bir indis olarak tanımlanabilir:

$$(i,\alpha)=A\ ,\ (i,\dot{\alpha})=\dot{A}\ ,\ A,\dot{A}=1,2,...,2N \qquad (6)$$

ve denklem (3)'ten görüldüğü gibi indislerin $i=j$, $\alpha=\beta$ ve $\dot{\alpha}=\dot{\beta}$ değerleri için:

$$Q_A Q_A=0\ ,\ \overline{Q}_{\dot{A}}\overline{Q}_{\dot{A}}=0 \tag{7}$$

elde edilir. Burada, tekralanan indisler üzerinden toplam alınmamaktadır. Görüldüğü gibi Q_A ve $\overline{Q}_{\dot{A}}$ karesi alındığında sıfırdır (nilpotenttir) ve K, L herhangi bir alan polinomu olmak üzere:

$$Q_A K=0\ ,\quad K\neq Q_A L \tag{8}$$
$$\overline{Q}_{\dot{A}}\overline{K}=0\ ,\quad \overline{K}\neq\overline{Q}_{\dot{A}}L \tag{9}$$

şeklinde Q_A ve $\overline{Q}_{\dot{A}}$ üreteçleri için bir kohomoloji problemi tanımlanabilir.

Süpersimetrik eylemler doğal olarak süpersimetri dönüşümleri altında değişmez kaldığından:

$$\delta S=(\theta^A Q_A+\overline{\theta}^{\dot{A}}\overline{Q}_{\dot{A}})S=0 \tag{10}$$

aynı zamanda ayrı ayrı Q_A ve $\overline{Q}_{\dot{A}}$ altında da değişmez kalır:

$$Q_A S=0\ ,\ \overline{Q}_{\dot{A}}S=0\ . \tag{11}$$

Başka bir deyişle, eylem yukarıda tanımlanan kohomoloji probleminin belirli boyut ve simetrilere sahip çözümlerine aittir.

Diğer taraftan, eylemin kendisi ya da ayrı ayrı kinetik, kütle ve etkileşme terimleri bir süper çoklunun en yüksek elemanı olarak düşünülebileceğinden, eylem bu çokluların en düşük boyutlu elemanı ile ilişkili olduğu varsayılırsa, en genelde integre edilmiş alan polinomları cinsinden eylem:

$$S=\overline{Q}^{2N}Q^{2N}\int dxY+Q^{2N}\int dxX+\overline{Q}^{2N}\int dx\overline{X} \tag{12}$$

şeklinde yazılabilir. Burada, Q^{2N} (ve benzer şekilde $\overline{Q}^{2N}$), E_{2N} gerekli indis kontraksiyonlarını sağlaması için gerekli sabit tensörler olmak üzere:

$$Q^{2N}:=E_{2N}^{A_1\ldots A_{2N}}Q_{A_1}\ldots Q_{A_{2N}} \tag{13}$$

ile tanımlanmıştır. X, $\overline{X}$ ve Y alan polinomları ise, (12)'den görüldüğü gibi eylemin sahip olduğu boyut ve simetriler (ayar simetrisi, R-simetrisi, v.b.) ile kısıtlanmıştır.

Eylem, (10)'u sağladığından ve (13) ile verilen tanımdan, spinör cebri kullanılarak:

$$Q^{2N+1}=Q^{2N+1}=0 \tag{14}$$

özdeş olarak elde edileceğinden, düşük boyutlu alan polinomları yukarıda verilen kohomoloji problemi ile ilişkilendirilebilir. Bu amaçla süpersimetri cebri integre edilmiş ayar değişmez polinomları uzayına kısıtlandığında, (3) anti-komütatörü bir yüzey integrali verir:

$$\left\{Q_A,\overline{Q}_{\dot{A}}\right\}=\int dx\partial_\mu(\ldots)^\mu\approx 0\,, \tag{15}$$

ve (12) formunda verilen bir eylemin süpersimetri altında değişmez kalma şartı:

$$\overline{Q}_{\dot{A}}X=0\ ,\ Q_A\overline{X}=0 \tag{16}$$

şartlarına indirgenmiş olur.

Görüldüğü gibi eylemin süpervaryasyonlar ile elde edilebileceği düşük boyutlu alan polinomlarından X ve $\overline{X}$ sırasıyla $\overline{Q}_{\dot{A}}$ ve Q_A'nın kohomolojisine aittir. Y polinomu ise, eğer sıfır değilse ne Q_A'nın ne de $\overline{Q}_{\dot{A}}$'nın kohomolojisine aittir:

$$Q_A Y\neq 0\ ,\ \overline{Q}_{\dot{A}}\neq 0\ . \tag{17}$$

Burada (12) formunda verilen eylemde $\overline{Q}^{2N}Q^{2N}Y$ teriminin bir Q_A-tam ya da $\overline{Q}_{\dot{A}}$-tam terim olarak yazılabileceği hatırlanmalıdır.

Wess-Zumino modelinin kohomolojik yapısı

Bu bölümde, süpersimetrik teoriler için yukarıda verilen yaklaşıma bir örnek olması açısından Wess-Zumino (WZ) modelini inceleyeceğiz.

Bilindiği gibi, dört boyutta yazılabilen en basit süpersimetrik model olan WZ modeli, kiral

$\Phi=(\phi,\psi_\alpha,F)$ ve anti-kiral $\overline{\Phi}=(\overline{\phi},\overline{\psi}_{\dot\alpha},\overline{F})$ çokluların elemanları ile verilir (Wess ve Bager,1992). Kiral çoklunun N=1 kabuk-dışı süpersimetri dönüşümleri:

$$Q_\alpha\phi=\sqrt{2}\psi_\alpha \quad , \quad \overline{Q}_{\dot\alpha}\phi=0 \tag{18}$$

$$Q_\alpha\psi^\beta=\sqrt{2}\delta^\beta_\alpha F \quad , \quad \overline{Q}^{\dot\alpha}\psi^\beta=-i\sqrt{2}\overline{\sigma}^{\dot\alpha\beta}_\mu\partial^\mu\phi \tag{19}$$

$$Q_\alpha F=0 \quad , \quad \overline{Q}^{\dot\alpha}F=i\sqrt{2}\overline{\sigma}^{\dot\alpha\beta}_\mu\partial^\mu\psi_\beta \tag{20}$$

ile verilmiştir. Anti-kiral çoklunun süpersimetri dönüşümleri kiral çoklu için verilen dönüşümlerin hermitsel eşleniği alınarak bulunabilir.

N=1 süpersimetri için modelin eylemi (12) kullanılarak:

$$S_{WZ}=\overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}Q^\alpha Q_\alpha\int d^4xY$$
$$+Q^\alpha Q_a\int d^4xX+\overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\int d^4x\overline{X} \tag{21}$$

formunda yazılabilir. Eylem boyutsuz olduğundan ve Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ etki ettiği büyüklüklerin boyutunu ½ artırdığından (21)'in boyutsuz olması için dört boyutta:

$$\text{Boyut}(Y)=2\,,\ \text{Boyut}(X)=\text{Boyut}(\overline{X})=3 \tag{22}$$

olmalıdır. Modelin sahip olduğu alanlar incelendiğinde ise, bu boyutlara sahip olan ve (16), (17) denklemlerini sağlayan X, $\overline{X}$ ve Y alan polinomlarının sadece:

$$Y\propto\overline{\phi}\phi \tag{23}$$

$$X\propto\phi^3,m\phi^2 \quad , \quad \overline{X}\propto\overline{\phi}^3,m\overline{\phi}^2 \tag{24}$$

ile orantılı olabileceği görülür.

Dolayısıyla, biraz işlemden sonra katsayıların elde edilmesiyle, (21) ile verilen düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu süpervaryasyonları:

$$S_{WZ}=\int d^4x\frac{1}{16}\overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}Q^\alpha Q_\alpha\overline{\phi}\phi$$
$$-\int d^4x\left[Q^\alpha Q_a\left(\frac{1}{8}m\phi^2+\frac{1}{16}\phi^3\right)+h.e.\right] \tag{25}$$
$$=\int d^4x(-\partial^\mu\overline{\phi}\partial_\mu\phi-i\overline{\psi}\overline{\sigma}_\mu\partial^\mu\psi+\overline{F}F$$
$$+[m(\phi F-\frac{1}{2}\psi\psi)+g(\phi\phi F-\psi\psi\phi)+h.e.]) \tag{26}$$

WZ modelinin kabuk-dışı süpersimetrik eylemini verir. Bu eylemin kinetik, kütle ve etkileşme terimlerini ise sırasıyla:

$$S_{kin}=\int d^4x\frac{1}{16}\overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}Q^\alpha Q_\alpha\overline{\phi}\phi \tag{27}$$

$$S_m=-\frac{m}{8}\int d^4x\left[Q^\alpha Q_a\phi^2+h.e.\right] \tag{28}$$

$$S_{etk}=-\frac{g}{12}\int d^4x\left[Q^\alpha Q_a\phi^3+h.e.\right] \tag{29}$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Sonuçlar ve tartışma

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlardan görüldüğü gibi, (kabuk-dışı) süpersimetri cebri kullanılarak tanımlanabilen bir kohomoloji problemi ile süpersimetrik eylemlerin düşük boyutlu alan polinomlarının çoklu süpervaryasyonu olarak yazılabileceği anlaşılabilir. Kabuk-üstü süpersimetrik durum içinse, kabuk-dışı durumda elde edilenlere benzer bağıntılar kullanılarak eylemin tam olarak bulunması mümkün değildir (Ülker, 2001). Bu problem süper Yang-Mills teorilerinde, teorinin genişletilmiş BRST kohomolojisi kullanılarak çözülmüştür (Ülker, 2002).

Bu çalışmada elde edilen sonuçların olası bir uygulaması ise yukarıda tartışılan yöntemin süpersimetrik teorilerin renormalize olmama teoremlerinin elde edilmesi için kullanılmasıdır. Bilindiği gibi, bu çalışmada incelenen WZ modelinde renormalize olmama teoremi modelde kütle ve bağlanma sabiti renormalizasyonunun olmadığını söyler. Başka bir deyişle modelde yalnızca eylemin kinetik terimi ile ilgili olan logaritmik dalga fonksiyonu renormalizasyonu vardır.

WZ modeli için bu renormalize olmama teoremi, eylemin etkileşme teriminin (21) formunda olması kullanılarak, süpersimetrinin bileşen alan formülasyonunda gösterilebilmiştir (Flume ve Kraus, 2000).

Diğer taraftan süpersimetrinin süper uzay formülasyonu kullanılarak, Seiberg (1993) tarafından, bu renormalize olmama teoremi Feynman diyagramları kullanılmadan elde edilmiştir. Bahsedilen bu yaklaşımda renormalize olmama teoreminin ispatı tamamen modelin etkileşme terimlerinin analitik ve holomorfik olmasına dayanmaktadır.

Bu çalışmada verdiğimiz yaklaşımda görüldüğü gibi, WZ modelinde renormalize edilmesi gereken S_{kin} terimi bir Q ya da $\overline{Q}$-tam terim olarak yazılmaktadır ve bu terimin elde edildiği düşük boyutlu alan polinomu Y, Q ve $\overline{Q}$'nin kohomolojisine ait değildir. Dolayısıyla, renormalize olmama teoremleri ile bu çalışmada verilen süpersimetri kohomolojisi arasında bir ilişki bulunmalıdır. Böyle bir ilişkinin anlaşılmasının yukarıda kısaca bahsedilen nedenlerden dolayı ilginç olacağını düşünüyoruz.

Kaynaklar

Flume, R. ve Kraus, E., (2000). Non-renormalization Theorems Without Supergraphs, *Nucl. Phys. B*, **569,** 625-642.

Seiberg, N., (1993). Naturalness Versus Supersymmetric Nonrenormalization Theorems, *Phys. Lett. B*, **318**, 469-475.

Ülker, K., (2001). On the Cohomological Structure of Supersymmetric Lagrangeans with and without Auxiliary Fields, *Mod. Phys. Lett. A,* **16**, 881-889.

Ülker, K., (2002) N=1 SYM Action and BRST Cohomology, *Mod. Phys. Lett. A*, **17,** 739–749.

Weinberg, S., (2000). *The Quantum Theory of Fields, Vol. III: Supersymmetry*, 419 pp, Cambridge Univ. Press, UK.

Wess, J. ve Bagger, J., (1992). *Supersymmetry and Supergravity*, 260 pp, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, USA.