**itü**dergisi/*c*
**fen bilimleri**
Cilt:7, Sayı:1, 111-122
Kasım 2009

# Spin(7) holonomisine sahip warped çarpım manifoldlarının genelleştirilmesi

**Selman UĞUZ*, Ayşe H. BİLGE**

*İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul*

## Özet

*Riemann holonomi grupları teorisinde ayrıcalıklı iki grup yer almaktadır. Bunlar 7-boyutlu manifoldlar üzerinde* $G_2$ *ve 8-boyutlu manifoldlar üzerinde* $Spin(7)$ *holonomi gruplarıdır. Bu çalışmada, holonomi grubu* $Spin(7)$*'nin bir alt grubu olan Riemann manifoldlarının yapısı, özel bir durum için incelenmiştir.* $Spin(7)$ *holonomisine sahip manifoldlar, Bonan formu olarak adlandırılan bir 4-formun varlığı ile karakterize edilir. Bonan formu Hodge anlamında kendine eş,* $Spin(7)$ *invaryant ve kapalı bir 4-formdur. Çalışmada öncelikli olarak Bonan formunun oktonion çarpımı kullanılarak elde edilme yolu verilmiştir. Daha sonra, çoklu warped çarpım metriklerinin genellemeleri tartışılmış ve özel bir hal olan (3+3+2) warped-benzeri çarpım metriği tanımlanmıştır. Bu metrik, literatürde Yasui-Ootsuka tarafından verilen* $S^3 \times S^3 \times R^2$ *manifoldu üzerindeki metriğin bir soyutlaması olarak düşünülmüş olup, warped çarpımların lif-taban dekompozisyonunu korumakta, ancak lif uzayındaki metriğin blok köşegen olmadığı durumu da içermektedir. Çalışmada elde edilen ana sonuç, 2 boyutlu bir taban üzerinde, 3 boyutlu, tam, bağlantılı ve basit bağlantılı liflerden oluşan (3+3+2) warped-benzeri bir çarpım manifoldunda, eğer Yasui-Ootsuka çalışmasında kullanılan Bonan formu kapalı ise, liflerin* $S^3$ *'e isometrik olması gerektiğidir. Buradan, Yasui-Ootsuka çözümünün (3+3+2) warped-benzeri metrikler sınıfında, yukarıda belirlenmiş olan Bonan formuna karşılık gelen* $Spin(7)$ *yapıları içerisinde tek olduğunu göstermektedir.*

***Anahtar Kelimeler:*** *Holonomi, Spin(7) holonomi manifoldu, warped ve çoklu warped çarpım manifoldları, warped-benzeri çarpım manifoldu.*

*Yazışmaların yapılacağı yazar: Selman UĞUZ. uguzs@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 33 24.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Spin(7) holonomisine sahip (3+3+2) warped-benzeri çarpım manifoldları" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 21.11.2008 tarihinde dergiye ulaşmış, 14.01.2009 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2010 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

# Generalizations of warped product manifolds with *Spin(7)* holonomy


## Extended abstract

*The holonomy group of a Riemannian manifold was defined by Elie Cartan in 1923 and proved to be an efficient tool in the study of Riemannian manifolds (Kobayashi and Nomizu, 1969). Later, Berger (Berger, 1955) gave a list of the possible holonomy groups of irreducible, simply-connected and non-symmetric Riemannian manifolds. Berger's list (refined later by Alekseevski (1968) and Gray-Brown (1972)) includes the groups $SO(n)$ in n-dimensions, $U(n), SU(n)$ in 2n-dimensions, $Sp(n), Sp(n)Sp(1)$ in 4n-dimensions and two exceptional cases, the holonomy group $G_2$ in 7-dimensions and the holonomy group $Spin(7)$ in 8-dimensions. After Berger introduced his classi-fication list, the existence of manifolds with the specified holonomy groups was an open problem.*

*The existence of manifolds with exceptional holonomy was first demonstrated by Bryant (1987), complete examples were given by Bryant and Salamon (1989) and the first compact examples were found by Joyce (1996). The study of manifolds with exceptional holonomy and the construction of explicit examples is still an active research area in mathematics and physics.*

*In the present work, we investigate the structure of Riemannian manifolds whose holonomy group is a subgroup of $Spin(7)$, for a special case. Manifolds with $Spin(7)$ holonomy are characterized by the existence of a globally defined 4-form, called the Bonan form (Bonan, 1966) with the following properties*

*i- self-duality in the Hodge sense,*
*ii- $Spin(7)$ invariance,*
*iii- closedness.*

*We review the structure of the Bonan form and its explicit construction using the structure constants of the octonionic algebra.*

*The starting point of the present research was an explicit example of Spin(7) metric on $S^3 \times S^3 \times R^2$ given by Yasui and Ootsuka (2001). We looked whether one could obtain other solutions by relaxing some of their assumptions, in particular without requiring the three dimensional submanifolds to be $S^3$. The method used in (Yasui and Ootsuka, 2001) is based on the notion of "volume-preserving vector fields" and a specific tensor formula called the "2-vector condition". The construction of a metric with $Spin(7)$ holonomy starts with an ansatz for an orthonormal frame which is shown to satisfy the conditions given in (Yasui and Ootsuka, 2001), provided that certain first order differential equations are satisfied. Then the solution of these equations gives a metric with $Spin(7)$ holonomy on $S^3 \times S^3 \times R^2$ that we call the ``Yasui-Ootsuka solution".*

*Inspired by the metric ansatz of Yasui-Ootsuka, we discuss a generalization of warped product metrics (O'Neil, 1983), by allowing the fiber metric to be non block diagonal in a multiply-warped product (Flores and Sanchez, 2002). We work with a spesific case that we call (3+3+2) warped-like product manifold $M = F_1 \times F_2 \times B$ and a specific $Spin(7)$ structure.*

*We prove that, when the base B is two dimensional, the fibre F is a 6-manifold of the form $F = F_1 \times F_2$ such that $F_i$'s (i=1,2) are complete, connected and simply connected 3-manifolds and the metric is given by the (3+3+2) warped-like product, then the connection of the fibers is completely determined by the requirement that the Bonan 4-form given in the work by Yasui and Ootsuka (2001) be closed.*

*With the global assumptions given above, it is concluded that the fibers $(F_i, i=1,2)$ are isometric to $S^3$. It follows that the Yasui-Ootsuka solution is unique in the class of (3+3+2) warped-like product metrics admitting the $Spin(7)$ structure determined by the Bonan form given in the work by Yasui-Ootsuka (2001).*

*As the Bonan form $\Omega$ is a 4-form, then closedness of the Bonan form $(d\Omega = 0)$ gives 56 equations involving exterior derivatives of the basis 1-forms. In the case of the (3+3+2) warped-like product metric, there are 9 parameters on each 3-manifolds $(F_i, i=1,2)$. Hence there are totally 18 parameters and 56 equations mentioned above. Under some special conditions, it is not surprising to obtain a unique solution.*


***Keywords:*** *Holonomy, Spin(7) holonomy manifold, warped and multiply warped product manifolds, warped-like product manifolds.*

## Giriş

**M** herhangi bir Riemann manifoldu ve g bu manifold üzerindeki çizgi elemanı olsun. *(M,g)* manifoldunda, **g** metriğiyle uyumlu ve burulmasız tek bir bağlantının olduğu bilinmektedir (Kobayashi ve Nomizu, 1969). Levi-Civita bağlan-tısı olarak adlandırılan bu bağlantı yardımıyla vektör alanlarının manifolda bir eğri boyunca paralel taşınması tanımlanabilir. Eğer vektörler kapalı bir eğri boyunca paralel taşınırsa, vektörün başlangıç durumu ile paralel taşınmış son hali farklılık gösterebilir. Bu değişim *holonomi dönüşümü* olarak ifade edilir. Bu tür dönüşümlerin kümesi bir grup yapısına sahip olup, bu grup *holonomi grubu* olarak adlandırılır ve *Hol(g)* şeklinde gösterilir.

Holonomi grubu kavramı ilk kez Elie Cartan tarafından, simetrik Lie grupları ve Lie cebirlerinin sınıflandırılması çalışmaları yürütülürken 1923 yılında tanımlanmış, daha sonra Riemann manifoldları için önemli bir sınıflandırma vasıtası olduğu anlaşılmıştır, (Schwachhöfer, 2000). Basit bağlantılı, çarpım olarak yazıla-mayan ve simetrik olan manifoldların holonomi sınıflandırması da Cartan tarafından verilmiştir. Cartan sınıflandırmasından yaklaşık 30 yıl sonra, 1955 yılında Marcel Berger basit bağlantılı, çarpım olarak yazılamayan ve simetrik olmayan manifoldlar için holonomi grubu sınıflandırmasını vermiştir (Berger, 1955). Literatürde *Berger listesi* olarak bilinen bu sınıflama Alekseevski (1968), Gray ve Brown (1972) tarafından bağımsız olarak düzeltilmiş ve simetrik bir uzayın holonomi grubu olduğu için, 16-boyutlu manifoldlardaki *Spin(9)* holonomi grubu liste dışına alınmıştır.

Berger'in listesi, n-boyutlu manifoldlarda $SO(n)$, 2n-boyutlu manifoldlarda $U(n)$ ve $SU(n)$, 4n-boyutlu manifoldlarda $Sp(n)$ ve $Sp(n)Sp(1)$ gruplarını ve özel olarak 7-boyutlu manifoldlar için $\mathrm{G}_2$ holonomi grubunu ve 8-boyutlu manifoldlar için $Spin(7)$ holonomi grubunu içerir. 7 ve 8-boyutlu uzaylar için verilen son iki grup *istisnai holonomi grupları* olarak adlandırılmıştır (Berger, 1955). Berger, listesinde yer alan holonomi gruplarına sahip manifoldların varlığı ile ilgili bir sonuç vermemiş, sadece mümkün olan grupların listesini sunmuştur. $G_2$ ve $Spin(7)$ holonomisine sahip manifoldların varlığı ilk kez Robert Bryant tarafından ispatlanmıştır, (Bryant, 1987). Bryant ve Salamon istisnai holonomiye sahip ilk tam metrik örneklerini vermişlerdir (Bryant ve Salamon, 1989). $\mathrm{G}_2$ ve $Spin(7)$ holonomisine sahip ilk kompakt manifold örnekleri ise Dominic Joyce tarafından verilmiştir (Joyce, 1996). $\mathrm{G}_2$ ve $Spin(7)$ holonomisine sahip metrik kurma çalışmaları, halen hem matematik hem de fizikte aktif bir araştırma alanı oluşturmaktadır.

Çalışmamızın başlangıç noktası, Yasui-Ootsuka tarafından verilen (Yasui ve Ootsuka, 2001) $Spin(7)$ holonomisine sahip $S^3 \times S^3 \times R^2$ manifoldu üzerindeki metriktir. İlk aşamada, verilen metriğin genelleştirilip genelleştirilemeyeceği ve bazı şartların değiştirilmesi sonucu $S^3$**'den** farklı 3-boyutlu manifoldlar için çözüm bulunup bulunamayacağı sorusu incelenmiştir. Bu çerçevede, Yasui-Ootsuka tarafından verilen metriğin, warped çarpım metriğinin (O'Neil, 1983) bir genelleştirilmesi olduğu gözlenmiş ve bundan hareketle (3+3+2) dekompozisyona sahip warped-benzeri çarpım metriği tanım-lanmıştır. Yasui-Ootsuka tarafından kullanılan Bonan formunun, (3+3+2) warped-benzeri bir çarpım manifoldunda kapalı olması koşulunun, lifler üzerindeki bağlantıyı belirlediği kanıt-lanmıştır. Buradan uygun kabuller altında, lif uzaylarının $S^3$ olduğu ispat edilmiştir.

## $\mathbf{R^8}$ üzerindeki Bonan formu

$Spin(7)$ holonomisine sahip manifoldların *kapalı*, *kendine eş (Hodge anlamında)* ve $Spin(7)$ *invaryant* bir 4-formu ile belirlendiği bilinmektedir. Literatürde bu 4-form Bonan formu (Cayley formu veya esas form) olarak adlandırılır, (Bonan, 1966). Aşağıda verilen önerme, $Spin(7)$ holonomisine sahip mani-foldların kurulumu için önemlidir.

**Önerme 1 (Bryant, 1987):** *Bonan formu* $\Omega$ *tarafından tanımlanan bir Riemann metriğinin* *holonomi grubunun Spin(7)'nin alt grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul Bonan formunun kapalı olması, yani $d\Omega = 0$ koşuludur.*

Bu önermeye göre, global tanımlı bir Bonan formunun varlığını biliyorsak, $Spin(7)$'nin alt grubu olan bir holonomi grubuna sahip metrik kurma problemi, Bonan formu $\Omega$'nın kapalı olması yerel problemine indirgenmiş olur. Bizim çalıştığımız "*(3+3+2) warped-benzeri çarpım*" manifoldları her zamam paralelleştirilebilir manifoldlar olduğu için üzerlerinde her zaman global tanımlı bir Bonan formu vardır ve problem bu yöntemle çözülebilir.

Bu çalışmada, yerel ortanormal tanjant ve kotanjant demetlerinin bazları sırasıyla $e_i$ ve $e^i$ (i=1,2,…n) olarak göstereceğiz. Buradan yerel k-formlarının dış çarpımlarını aşağıdaki şekilde yazılacaktır.

$$\begin{aligned} e^{ij} &= e^i \wedge e^j, \\ e^{ijk} &= e^i \wedge e^j \wedge e^k, \\ e^{ijkl} &= e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l, \ldots. \end{aligned} \tag{1}$$

Ancak bundan sonraki kısımda, formların dış çarpımlar için "$\wedge$" sembol işareti kullanılmayacaktır. Bir n-boyutlu M manifoldu üzerinde yerel bir ortanormal baz $e^i$ (i=1,2,…n) olarak verildiğinde, metrik

$$g = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e^i, \tag{2}$$

şeklinde yazılır. Şimdi 8-boyutlu, birleşme özelliğine sahip olmayan oktonion cebri yardımı ile $R^8 = \{x^1, x^2, \ldots, x^8\}$ üzerindeki Bonan formunun $\left(\Omega = \frac{1}{4!}\Omega_{abcd}\, dx^{abcd}\right)$ kurulumuna bakalım. Notasyon kolaylığı için $dx^i$ ile $e^i$'yi özdeşleştirelim ve oktonion cebrinin ortanormal bazını $\{1, e_a \mid a = 1,2,\ldots,7\}$ olacak şekilde ele alalım. Bu durumda Bonan formu'nda yer alan sıfırdan farklı indeks elemanları $\Omega_{abcd}$, aşağıda verilen oktonion baz elemanlarının çarpımı ile verilir (Harvey, 1990):

$$\Omega_{abc8} = \alpha_{abc}, \quad \Omega_{abcd} = \frac{1}{3!}\varepsilon_{abcdefg}\alpha_{efg}. \tag{3}$$

Verilen formülasyonda

$$\alpha_{abc} = -(e_a e_b) e_c, \tag{4}$$

oktonion çarpımı ile hesaplanan katsayılar olup $\varepsilon_{abcdefg}$ tüm indekslerine göre antisimetrik ve $\varepsilon_{12345678} = 1$ koşulu ile belirlenir. Bu durumda Bonan formunun sıfırdan farklı indeks elemanları $\Omega_{abcd} = 1$ olacak şekilde aşağıdaki gibi verilebilir (Yasui ve Ootsuka, 2001),

$$\begin{aligned} abcd = \{&1238, 5168, 2468, 4358, 1478, 3678, \\ &2578, 4567, 3247, 1357, 2167, 2356, \\ &1245, 1346\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Buradan $R^8$ üzerindeki Bonan formunun Yasui-Ootsuka tarafından kullanılan aşağıdaki ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned} \Omega = {} & e^{1238} + e^{5168} + e^{2468} + e^{4358} + e^{1478} \\ & + e^{3678} + e^{2578} + e^{4567} + e^{3247} + e^{1357} \\ & + e^{2167} + e^{2356} + e^{1245} + e^{1346}, \end{aligned} \tag{6}$$

Bu ifadeyi manifoldun 3+3+2 şeklinde parçalanmasına uygun olarak aşağıdaki gibi yazıp

$$\begin{aligned} \Omega = {} & (e^{14} + e^{25} + e^{36})e^{78} + e^{1245} + e^{1346} + e^{2356} \\ & + (e^{123} - e^{156} + e^{246} - e^{345})e^8 \\ & + (e^{456} - e^{234} + e^{135} - e^{126})e^7. \end{aligned} \tag{7}$$

yine 3+3+2 parçalanmasına uygun olarak $e^4 \to e^{\hat{1}}$, $e^5 \to e^{\hat{2}}$, $e^6 \to e^{\hat{3}}$, indeks değişimi yaparsak

$$\begin{aligned} \Omega = {} & (e^{1\hat{1}} + e^{2\hat{2}} + e^{3\hat{3}})e^{78} - (e^{1\hat{1}2\hat{2}} + e^{1\hat{1}3\hat{3}} + e^{2\hat{2}3\hat{3}}) \\ & + (e^{123} - e^{1\hat{2}\hat{3}} - e^{\hat{1}2\hat{3}} - e^{\hat{1}\hat{2}3})e^8 \\ & + (e^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}} - e^{\hat{1}23} - e^{1\hat{2}3} - e^{12\hat{3}})e^7, \end{aligned} \tag{8}$$

ifadesini elde ederiz. Eğer yeni değişkenler

$$\beta = e^{1\hat{1}} + e^{2\hat{2}} + e^{3\hat{3}},$$
$$\mu = e^{123} - e^{1\hat{2}\hat{3}} - e^{\hat{1}2\hat{3}} - e^{\hat{1}\hat{2}3}, \qquad (9)$$
$$\nu = e^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}} - e^{\hat{1}23} - e^{1\hat{2}3} - e^{12\hat{3}},$$

olacak şekilde seçilirse, Bonan formu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\Omega = \beta e^{78} + \mu e^{8} + \nu e^{7} - \frac{1}{2}\beta^{2}. \qquad (10)$$

## Warped ve çoklu-warped çarpım manifoldları

Bu bölümde, warped çarpım metriğini ve bir genelleştirmesi olan çoklu-warped çarpım metriğinin tanımlarını verip, bu yapılar yardımıyla (3+3+2) warped-benzeri çarpım metriğimizi tanımlayacağız. *$(F, g_F)$ ve $(B, g_B)$* iki Riemann manifoldu ve *f, B* üzerinde pozitif bir fonksiyon olsun. Warped çarpım manifoldu $M=F\times B$ aşağıdaki metrik yapı ile donatılmış bir çarpım manifoldudur:

$$g = \pi_B^* g_B + (f\circ\pi_B)^2 \pi_1^* g_F \,. \qquad (11)$$

Burada, $\pi_1 : F\times B \to F$ ve $\pi_B : F\times B \to B$ doğal projeksiyonlardır. Eğer bu tanım manifoldun açık bir alt kümesi için geçerli ise, manifolda "*yerel warped çarpım"* manifoldu denir. Warped çarpım manifoldunun temel özellikleri için O'Neil (1983) kaynak olarak verilebilir.

Warped çarpım metrik kavramının "*çoklu-warped çarpım"* olarak adlandırılan bir genellemesi vardır (Flores ve Sanchez, 2002). Bu yapının kurulumunda, $(F_i, g_i)$, i=1,2,…,k ve *$(B, g_B)$* Riemann manifoldları ve *B* manifoldu üzerinde $f_i$>0 olacak şekilde tanımlı bir fonksiyon kullanılır. Çoklu-warped çarpım manifoldu $F_1\times F_2\times\ldots\times F_k\times B$ şeklinde bir çarpım manifoldu olup, $\pi_B : F_1\times\ldots\times F_k\times B \to B$ ve $\pi_i : F_1\times\ldots\times F_k\times B \to F_i$ doğal projeksiyonlar olmak üzere aşağıda verilen metrik ile tanımlanır.

$$g = \pi_B^* g_B + \sum_{i=1}^{k} (f_i\circ\pi_B)^2 \pi_i^* g_i. \qquad (12)$$

Warped çarpımlarda ve bunların genelleştirilmelerinde $F_i$'ler *lif manifoldu, B* ise *taban manifoldu* olarak adlandırılır (O'Neil, 1983).

**(3+3+2) Warped-benzeri çarpım manifoldları**

*Spin*(7) holonomisine sahip $S^3\times S^3\times R^2$ manifoldu üzerindeki Yasui-Oosuka metriği aşağıdaki ortanormal baz elemanları ile tanımlanmıştır.

$$e^{i} = \frac{1}{2} b^{\frac{3}{4}} \sec h(y)\theta^{i}, \qquad \text{i=1,2,3}$$
$$e^{\hat{i}} = \frac{1}{2} a b^{-\frac{1}{4}} \left(1-\tanh(y)\right)\theta^{i} + a b^{-\frac{1}{4}}\theta^{\hat{i}}, \ \text{i=1,2,3}$$
$$e^{7} = a b^{\frac{3}{4}} dx,$$
$$e^{8} = b^{\frac{3}{4}} \sec h(y) dy. \qquad (13)$$

Burada $\theta^{i}$ ve $\theta^{\hat{i}}$ sırası ile 3-kürelerin kotanjant demetlerinin yerel bazları ve *a, b* fonksiyonları *x*'e bağlı

$$\frac{da}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{b} - ab\right), \frac{db}{dx} = -2a^2, \qquad (14)$$

diferansiyel denklem şartlarını sağlayan ifadelerdir. Bu ortanormal baz kullanılarak metrik

$$g = \underbrace{\sqrt{a^4 b^3}\,dx^2 + \sqrt{b^3}\sec h^2(y) dy^2}_{\pi_B^* g_B}$$
$$+ \frac{1}{4}[\sqrt{b^3}\sec h^2(y) + \sqrt{\frac{a^4}{b}}\left(1-\tanh(y)\right)^2] \underbrace{\sum_{i=1}^{3}(\theta^{i})^2}_{\pi_1^* g_{S^3}}$$
$$+ \sqrt{\frac{a^4}{b}} \underbrace{\sum_{i=1}^{3}(\theta^{\hat{i}})^2}_{\pi_2^* g_{S^3}} + \sqrt{\frac{a^4}{b}}[1-\tanh(y)] \sum_{i=1}^{3}\theta^{i}\theta^{\hat{i}}, \qquad (15)$$

şeklinde yazılır. Bu ifadede $\pi_B : S^3\times S^3\times R^2 \to R^2$ ve $\pi_i : S^3\times S^3\times R^2 \to S^3$

doğal projeksiyonlardır. Böylece $f_i$ ve $h$ fonksiyonlarını

$$f_1 = \frac{1}{4}\left[\sqrt{b^3}\sec h^2(y) + \sqrt{\frac{a^4}{b}}\left(1-\tanh(y)\right)^2\right],$$

$$f_2 = \sqrt{\frac{a^4}{b}}, \quad h = \sqrt{\frac{a^4}{b}}\left[1-\tanh(y)\right], \tag{16}$$

olacak şekilde ve $\omega$ 2-formunu

$$\omega = \sum_{i=1}^{3}\theta^i\theta^{\hat{i}}, \tag{17}$$

olarak tanımladığımızda, metrik

$$g = \pi_B^* g_B + \sum_{i=1}^{2}(f_i \circ \pi_B)^2 \pi_i^* g_i + h\omega, \tag{18}$$

şeklinde elde edilir. $\{\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^{\hat{1}}, \theta^{\hat{2}}, \theta^{\hat{3}}, e^7, e^8\}$ (global) baz takımında metriğin matrisi

$$g = \begin{pmatrix} f_1 I_3 & \frac{h}{2} I_3 & 0 \\ \frac{h}{2} I_3 & f_2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

şeklindedir. Burada $I_3$ ve $I_2$ sırası ile $3\times 3$ ve $2\times 2$ birim matrisler ve 0 ise uygun boyutlu sıfır matrisini temsil etmektedir. Eğer denklem (18)'de verilen $h$ fonksiyonu sıfır olsa idi, verilen metrik bir çoklu-warped çarpım metriği olacak idi (denklem (12)'ye bakınız). Şimdi bu yapının bir genellemesini tartışacağız. $M$ manifoldunu topolojik çarpım manifoldu $M = F_1 \times F_2 \times ... \times F_k \times B$ olarak alalım. Çarpım manifoldundaki her bir manifold Riemann metriğine sahip olsun ve boyutları $boyut(F_a) = n_a$, (a=1,2,…,k), $boyut(B)=n$ şeklinde verilsin. Her bir $F_a$'nın kotanjant demetinin yerel ortanormal bazlarını $\{\theta_a^i\}_{i=1}^{n_a}$ ve $B$ taban manifoldunun yerel koordinatlarını $x^1, x^2, ..., x^n$ olarak gösterelim. $M$ manifoldu üzerindeki bir metriği, M'nin kotanjant demeti üzerindeki baz elemanlarını lineer bağımsız seçerek ve onları ortanormal ilan ederek tanımlayabiliriz.

Lif-baz dekompozisyonuna karşılık gelen en genel yerel ortanormal baz elemanlarını şu şekilde verelim.

$$e_a^i = \sum_{b=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_b} A_{aj}^{bi}\theta_b^j, \quad i=1,2,...,n_a,\ a=1,2,...,k$$

$$e_B^i = \sum_{j=1}^{n} a_{Bj}^i dx^j, \quad i=1,2,...,n. \tag{20}$$

Verilen ortanormal bazdaki fonksiyonlar $A_{aj}^{bi} = A_{aj}^{bi}(x^1, x^2, ..., x^n)$ ve $a_{Bj}^i = a_{Bj}^i(x^1, x^2, ..., x^n)$ şeklinde tanımlıdır. Öncelikli olarak

$$\sum_{i=1}^{n} e_B^i \otimes e_B^i = \pi_B^* g_B, \tag{21}$$

şeklinde yazılabilir ve $\pi_B : F_1 \times ... \times F_k \times B \to B$ bir doğal projeksiyon dönüşümüdür. O zaman $M$ üzerindeki metrik

$$\begin{aligned} g &= \pi_B^* g_B + \sum_{a=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_a} e_a^i \otimes e_a^i \\ &= \pi_B^* g_B + \sum_{a=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_a}\left[\left(\sum_{b=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_b} A_{aj}^{bi}\theta_b^j\right)\otimes\left(\sum_{c=1}^{k}\sum_{l=1}^{n_c} A_{al}^{ci}\theta_c^l\right)\right] \\ &= \pi_B^* g_B + \sum_{b,c=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_b}\sum_{l=1}^{n_c}\left(\sum_{a=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_a} A_{aj}^{bi}A_{al}^{ci}\right)\theta_b^j \otimes \theta_c^l, \end{aligned} \tag{22}$$

olacak şekilde yazılır. İndeks c üzerindeki toplam, $b=c$ ve $b \neq c$ için ayrı toplamlar şeklinde yazılır ise

$$\begin{aligned} g &= \pi_B^* g_B + \sum_{b=1}^{k}\sum_{j,l=1}^{n_b}\left(\sum_{a=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_a} A_{aj}^{bi}A_{al}^{ci}\right)\theta_b^j \otimes \theta_b^l \\ &+ \sum_{b=1}^{k}\sum_{c=b+1}^{k}\sum_{j=1}^{n_b}\sum_{l=1}^{n_c}\left(\sum_{a=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_a} A_{aj}^{bi}A_{al}^{ci}\right)\left(\theta_b^j \otimes \theta_c^l + \theta_b^l \otimes \theta_c^j\right), \end{aligned} \tag{23}$$

olarak bulunur. $\left\{\tilde{\theta}_b^j\right\}_{j=1}^{n_b}$ eğer $F_b$ lif manifoldu üzerinde farklı bir ortanormal baz ise, o zaman

$$\theta_b^j = \sum_{r=1}^{n_b} P_{br}^j \tilde{\theta}_b^r, \tag{24}$$

olarak yazılır. Burada $P_{br}^j$ dönüşüm matrisini temsil etmektedir. Bu baz dönüşümü altında metrik

$$\begin{aligned} g &= \pi_B^* g_B + \sum_{b,c=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{l=1}^{n_c} \left( \sum_{a=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_a} A_{aj}^{bi} A_{al}^{ci} \right) \left( \sum_{r=1}^{n_b} P_{br}^j \tilde{\theta}_b^r \otimes \sum_{s=1}^{n_s} P_{cs}^l \tilde{\theta}_c^s \right) \\ &= \pi_B^* g_B + \sum_{b=1}^{k} \sum_{r,s=1}^{n_b} \left( \sum_{a=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j,l=1}^{n_b} A_{aj}^{bi} A_{al}^{bi} P_{br}^j P_{bs}^l \right) \tilde{\theta}_b^r \otimes \tilde{\theta}_b^s \\ &+ \sum_{b=1}^{k} \sum_{c=b+1}^{k} \sum_{r=1}^{n_b} \sum_{s=1}^{n_c} \left( \sum_{a=1}^{k} \sum_{i=1}^{n_a} \sum_{j=1}^{n_b} \sum_{l=1}^{n_c} A_{aj}^{bi} A_{al}^{ci} P_{br}^j P_{cs}^l \right) \tilde{\theta}_b^r \otimes \tilde{\theta}_b^s, \end{aligned} \tag{25}$$

olacak şekilde dönüşür. Yukarıda verilen metrikte, $\tilde{\theta}_b^r \otimes \tilde{\theta}_b^s$'nin katsayıları, en genel halde, baz manifoldu B ile lif manifoldları $F_a$ ve $F_b$'nin koordinatlarına bağlı bir fonksiyondur.

3+3+2 şeklinde modellemeye çalıştığımız 8-boyutlu manifold $M = F_1 \times F_2 \times B$ için, yani 3-boyutlu lif uzayları ve 2-boyutlu taban uzayı için warped-benzeri çarpım metrik yapımızın tanımını aşağıdaki gibi vereceğiz.

**Tanım 2:** 8-boyutlu $M = F_1 \times F_2 \times B$ manifoldu için $F_1, F_2$ 3-boyutlu ve $B$ 2-boyutlu Riemann manifoldu olsun. $F_1$ ve $F_2$'nin kotanjant demetlerinin yerel ortanormal bazları sırasıyla $\theta^i$ ve $\theta^{\hat{i}}$, $B$'nin yerel koordinatlarını $x$ ve $y$ olarak seçelim. $M$ üzerindeki metrik aşağıdaki ortanormal baz ile tanımlanırsa,

$$\begin{aligned} e^i &= A(x,y)\theta^i + B(x,y)\theta^{\hat{i}}, \quad \text{i=1,2,3} \\ e^{\hat{i}} &= \hat{A}(x,y)\theta^i + \hat{B}(x,y)\theta^{\hat{i}}, \quad \text{i=1,2,3} \\ e^{i+6} &= a_{i1}(x,y)dx + a_{i2}(x,y)dy, \quad \text{i=1,2} \end{aligned} \tag{26}$$

$(M, e^i)$ manifoldunu "*(3+3+2) warped-benzeri çarpım*" manifoldu olarak adlandıracağız.

Denklem (26)'da verilen ortanormal baz kullanılarak, metrik

$$\begin{aligned} g &= \sum_{i=1}^{3} \left( e^i \otimes e^i + e^{\hat{i}} \otimes e^{\hat{i}} \right) + \sum_{i=1}^{2} e^{i+6} \otimes e^{i+6} \\ &= (a_{11}^2 + a_{21}^2) dx \otimes dx + (a_{12}^2 + a_{22}^2) dy \otimes dy \\ &+ (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22}) dx \otimes dy + (A^2 + \hat{A}^2) \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \theta^i \otimes \theta^i}_{\pi_1^* g_{F_1}} \\ &+ (B^2 + \hat{B}^2) \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \theta^{\hat{i}} \otimes \theta^{\hat{i}}}_{\pi_2^* g_{F_2}} + 2(AB + \hat{A}\hat{B}) \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \theta^i \otimes \theta^{\hat{i}}}_{\pi_{12}^* \omega} \\ &= \pi_B^* g_B + \sum_{i=1}^{2} (f_i \circ \pi_B)^2 \pi_i^* g_{F_i} + (h_{12} \circ \pi_B) \pi_{12}^* \omega, \end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde yazılır. Burada

$$\begin{aligned} & f_1 = A^2 + \hat{A}^2, \; f_2 = B^2 + \hat{B}^2, \; h_{12} = 2(AB + \hat{A}\hat{B}), \\ & \omega = \sum_{i=1}^{3} \theta^i \otimes \theta^{\hat{i}}, \end{aligned} \tag{28}$$

olarak verilir. $\pi_B, \pi_i$ ve $\pi_{12}$ sırası ile B, $F_i$ ve $F_1 \times F_2$ üzerindeki doğal projeksiyon dönüşümleridir.

**Açıklama 3:** Tüm 3-boyutlu manifoldlar paralelleştirilebilir olduğu için (Hempel, 1976), 6-boyutlu lif manifoldu $F = F_1 \times F_2$'de paralelleştirilebilirdir. $F_1$ ve $F_2$'nin kotanjant demetinin yerel ortanormal bazları sırasıyla $\theta^i$ ve $\theta^{\hat{i}}$ olduğunda, lif manifoldu $F$ üzerindeki 3-formlar, iki tane kapalı 3-form içerir. Bunlar $F_1$ ve $F_2$ üzerindeki hacim formlarıdır. $F_1$ ve $F_2$'nin ortanormal bazlarını sabitledikten sonra, hemen hemen kompleks bir yapı $J$'yi $\theta^i \to \theta^{\hat{i}}, \theta^{\hat{i}} \to -\theta^i$ olacak şekilde tanımlayalım. Lif manifoldu $F$ üzerindeki kompleks hacim formu $\Psi$ ve Kahler formu $\omega$

$$\begin{aligned} & \Psi = \Psi^+ + \Psi^- = (\theta^1 + iJ\theta^1)(\theta^2 + iJ\theta^2)(\theta^3 + iJ\theta^3) \\ & \omega = \sum_{i=1}^{3} \theta^i \wedge J\theta^i, \end{aligned} \tag{29}$$

olarak tanımlanır. $J\theta^i = \theta^{\hat{i}}$ kullanılarak

$$\Psi^{+} = \theta^{123} - \theta^{1\hat{2}\hat{3}} - \theta^{\hat{1}2\hat{3}} - \theta^{\hat{1}\hat{2}3},$$
$$\Psi^{-} = \theta^{\hat{1}23} + \theta^{1\hat{2}3} + \theta^{12\hat{3}} - \theta^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}}, \omega = \theta^{1\hat{1}} + \theta^{2\hat{2}} + \theta^{3\hat{3}},$$

olarak elde edilir.

**(3+3+2) Warped-benzeri çarpım metriği ve Bonan formu**

Bu bölümde $F \times R^2$ üzerindeki (3+3+2) warped-benzeri çarpım metrik ile Bonan formunun elde edilmesini sunacağız.

**Önerme 4:** *6-boyutlu bir F manifoldunu $F = F_1 \times F_2$ şeklinde iki 3-manifoldun çarpımı şeklinde seçelim. $F_1$ ve $F_2$'nin kotanjant demetinin yerel ortanormal bazları sırasıyla $\theta^i$ ve $\theta^{\hat{i}}$ olsun. 8-boyutlu $M = F \times R^2$ üzerinde $(3+3+2)$ warped-benzeri çarpım metriğini alalım. (10) numaralı denklem ile verilen Bonan formu*

$$\Omega = -\frac{1}{2} f^2 \omega^2 + \phi_1^+ m_1 + \phi_2^+ m_2 + \phi_1^- n_1 + \phi_2^- n_2 + f\omega e^{78},$$

*olacak şekilde yazılır. Burada,*

$$\omega = \theta^{1\hat{1}} + \theta^{2\hat{2}} + \theta^{3\hat{3}}, \phi_1^+ = \theta^{123}, \phi_1^- = \theta^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}},$$
$$\phi_2^+ = \theta^{1\hat{2}\hat{3}} + \theta^{\hat{1}2\hat{3}} + \theta^{\hat{1}\hat{2}3}, \phi_2^- = \theta^{\hat{1}23} + \theta^{1\hat{2}3} + \theta^{12\hat{3}},$$

*ve 1-formlar $m_i$ ve $n_i$ (i=1,2)*

$$m_1 = [A^3 - 3A\hat{A}^2]e^8 + [\hat{A}^3 - 3A^2\hat{A}]e^7,$$
$$m_2 = [AB^2 - 2B\hat{A}\hat{B} - A\hat{B}^2]e^8 + [\hat{A}\hat{B}^2 - 2AB\hat{B} - B^2\hat{A}]e^7,$$
$$n_1 = [B^3 - 3B\hat{B}^2]e^8 + [\hat{B}^3 - 3B^2\hat{B}]e^7,$$
$$n_2 = [A^2B - 2A\hat{A}\hat{B} - B\hat{A}^2]e^8 + [\hat{A}^2B - 2AB\hat{A} - A^2\hat{B}]e^7,$$

*olarak verilir.*

**İspat:** Denklem (26)'da verilen ortanormal baz elemanlarını $\beta, \mu$ ve $\upsilon$ ifadelerinde yerine yerleştirirsek,

$$f = A\hat{B} - B\hat{A},\ \omega = \theta^{1\hat{1}} + \theta^{2\hat{2}} + \theta^{3\hat{3}}, \tag{30}$$

olmak üzere aşağıdaki eşitlikler bulunur,

$$\beta = f\omega,$$
$$\mu = [A^3 - 3A\hat{A}^2]\theta^{123} + [AB^2 - 2B\hat{A}\hat{B} - A\hat{B}^2](\theta^{1\hat{2}\hat{3}} + \theta^{\hat{1}2\hat{3}} + \theta^{\hat{1}\hat{2}3}) + [B^3 - 3\hat{B}B^2]\theta^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}} + [A^2B - 2A\hat{A}\hat{B} - B\hat{A}^2](\theta^{\hat{1}23} + \theta^{1\hat{2}3} + \theta^{12\hat{3}}),$$
$$\upsilon = [\hat{A}^3 - 3A^2\hat{A}]\theta^{123} + [\hat{A}\hat{B}^2 - 2AB\hat{B} - B^2\hat{A}](\theta^{1\hat{2}\hat{3}} + \theta^{\hat{1}2\hat{3}} + \theta^{\hat{1}\hat{2}3}) + [\hat{B}^3 - 3B^2\hat{B}]\theta^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}} + [\hat{A}^2\hat{B} - 2AB\hat{A} - A^2\hat{B}](\theta^{\hat{1}23} + \theta^{1\hat{2}3} + \theta^{12\hat{3}}). \tag{31}$$

Notasyonu basitleştirmek için yeni değişkenler $\phi_i^{\pm}$'yi $(i = 1,2)$

$$\phi_1^+ = \theta^{123}, \phi_1^- = \theta^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}}, \phi_2^+ = \theta^{1\hat{2}\hat{3}} + \theta^{\hat{1}2\hat{3}} + \theta^{\hat{1}\hat{2}3},$$
$$\phi_2^- = \theta^{\hat{1}23} + \theta^{1\hat{2}3} + \theta^{12\hat{3}}, \tag{32}$$

olacak şekilde seçelim, bu durumda

$$\mu e^8 + \upsilon e^7 = \phi_1^+[(A^3 - 3A\hat{A}^2)e^8 + (\hat{A}^3 - 3A^2\hat{A})e^7] + \phi_2^+[(AB^2 - 2B\hat{A}\hat{B} - A\hat{B}^2)e^8 + (\hat{A}\hat{B}^2 - 2AB\hat{B} - B^2\hat{A})e^7] + \phi_1^-[(B^3 - 3B\hat{B}^2)e^8 + (\hat{B}^3 - 3B^2\hat{B})e^7] + \phi_2^-[(A^2B - 2A\hat{A}\hat{B} - B\hat{A}^2)e^8 + (\hat{A}^2B - 2AB\hat{A} - A^2\hat{B})e^7],$$

olarak bulunur. Daha sade halde yazmak için daha önce verilen $m_i$ ve $n_i$ kullanılarak

$$\mu e^8 + \upsilon e^7 = \phi_1^+ m_1 + \phi_2^+ m_2 + \phi_1^- n_1 + \phi_2^- n_2, \tag{33}$$

biçiminde yazabilir. Böylece $M$ üzerindeki Bonan formu

$$\Omega = -\frac{1}{2} f^2 \omega^2 + \phi_1^+ m_1 + \phi_2^+ m_2 + \phi_1^- n_1 + \phi_2^- n_2 + f\omega e^{78}, \tag{34}$$

olacak şekilde yazılır.

Böylelikle Bonan formunun $M = F \times R^2$ manifoldu üzerinde, katsayıları taban uzayının dış cebri elemanlarından olmak üzere, lif uzayının dış cebri form elemanlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazıldığı görülür. 8-boyutlu manifoldun taban ve lif şeklinde dekompozisyonu, dış cebri için

$$\Lambda^p(M) = \oplus_{a+k=p}\Lambda^{(a,k)}(M),\ a=1,\ldots,6,\ k=1,2$$

olacak biçimde bir direkt toplam dekompozisyonu verir. Dış türevin bu alt uzaylara etkisi

$$d:\Lambda^{(a,k)}(M)\to\Lambda^{(a+1,k)}(M)\oplus\Lambda^{(a,k+1)}(M), \quad (35)$$

şeklinde verilir. Yukarıdaki dekompozisyon, ayrıntılandırılarak

$$\Lambda^p(M) = \oplus_{a+b+k=p}\Lambda^{(a,b,k)}(M),\ a,b=1,2,3,\ k=1,2$$

şeklinde ifade edilebilir ve dış türevi

$$\begin{aligned} d:\Lambda^{(a,b,k)}(M)\to\Lambda^{(a+1,b,k)}(M)&\oplus\Lambda^{(a,b+1,k)}(M)\\ &\oplus\Lambda^{(a,k+1)}(M), \quad (36)\end{aligned}$$

olarak verilir.

## Spin(7) holonomisine sahip (3+3+2) warped-benzeri çarpım manifoldları

Bu bölümde 8-boyutlu $M$ manifoldu için $3+3+2$ şeklindeki parçalanmayı ele alacağız. İşlem kolaylığı için taban manifoldunu $R^2$ olarak seçeceğiz. Uygun global kabuller altında, lif manifoldlarının $S^3$'e isometrik olduğunu ispatlayacağız.

**Teorem 5:** *6-boyutlu bir $F$ manifoldunu, $F = F_1\times F_2$ şeklinde ve $F_1, F_2$ manifoldlarını bağlantılı, basit bağlantılı, tam Riemann 3-manifoldlar olarak seçelim. $M$ manifoldu $F\times B$'ye difeomorfik bir manifold ve 2-boyutlu taban manifoldu $B$ $R^2$'ye difeomorfik bir Riemann manifoldu olsun. $M$ üzerinde (3+3+2) warped-benzeri çarpım metriği aşağıdaki ortanormal sistem ile verilmiş olsun,*

$$e^i = A\theta^i + B\theta^{\hat{i}}, \qquad i=1,2,3$$
$$e^{\hat{i}} = \hat{A}\theta^i + \hat{B}\theta^{\hat{i}}, \qquad i=1,2,3$$
$$e^{i+6} = a_{i1}dx + a_{i2}dy. \qquad i=1,2.$$

*$M$ üzerindeki Bonan formu*

$$\Omega = -\frac{1}{2}f^2\omega^2 + \phi_1^+ m_1 + \phi_2^+ m_2 + \phi_1^- n_1 + \phi_2^- n_2 + f\omega e^{78},$$

*olacak şekilde verilsin. Burada,*

$$\omega = \theta^{1\hat{1}} + \theta^{2\hat{2}} + \theta^{3\hat{3}},\ \ f = A\hat{B} - B\hat{A},$$
$$\phi_1^+ = \theta^{123},\ \ \phi_1^- = \theta^{\hat{1}\hat{2}\hat{3}},$$
$$\phi_2^+ = \theta^{1\hat{2}\hat{3}} + \theta^{\hat{1}2\hat{3}} + \theta^{\hat{1}\hat{2}3},\ \ \phi_2^- = \theta^{\hat{1}23} + \theta^{1\hat{2}3} + \theta^{12\hat{3}},$$

*ve 1-formlar $m_i$ ve $n_i$ ( i=1,2)*

$$m_1 = [A^3 - 3A\hat{A}^2]e^8 + [\hat{A}^3 - 3A^2\hat{A}]e^7,$$
$$\begin{aligned} m_2 &= [AB^2 - 2B\hat{A}\hat{B} - A\hat{B}^2]e^8\\ &\quad + [\hat{A}\hat{B}^2 - 2AB\hat{B} - B^2\hat{A}]e^7,\end{aligned}$$
$$n_1 = [B^3 - 3B\hat{B}^2]e^8 + [\hat{B}^3 - 3B^2\hat{B}]e^7,$$
$$\begin{aligned} n_2 &= [A^2B - 2A\hat{A}\hat{B} - B\hat{A}^2]e^8\\ &\quad + [\hat{A}^2B - 2AB\hat{A} - A^2\hat{B}]e^7,\end{aligned}$$

*olarak verilir. Eğer $d\Omega = 0$ ise, $F_1$ ve $F_2$ $S^3$'e isometriktir.*

Teorem 5'in ispatına geçmeden önce bir önerme ve bir yardımcı teorem vereceğiz.

**Önerme 6:** $(M, e^i)$ *Teorem 5'de olduğu gibi (3+3+2) warped-benzeri çarpım manifoldu olsun. Eğer $d\Omega = 0$ ise aşağıdaki üç koşul sağlanır.*

$i)\ \ \omega d\omega = 0$

$ii)\ \ fdf\omega^2 = d\phi_2^+ m_2 + d\phi_2^- n_2,$

$iii)\ fd\omega e^{78} = \phi_1^+ dm_1 + \phi_2^+ dm_2 + \phi_1^- dn_1 + \phi_2^- dn_2,$

**İspat:** Denklem (26)'da verilen ortanormal baz elemanlarını $\beta, \mu$ ve $\upsilon$ ifadelerinde yerine yerleştirirsek, Bonan formu Önerme 4'deki gibi

$$\Omega = \left[ -\frac{1}{2} f^2 \omega^2 \right] + \left[ \phi_1^+ m_1 + \phi_2^+ m_2 + \phi_1^- n_1 + \phi_2^- n_2 \right]$$
$$+ \left[ f \omega e^{78} \right], \qquad (37)$$

şeklinde elde edilir. Köşeli parantez içerisindeki terimler sırası ile $\Lambda^{(4,0)}$, $\Lambda^{(3,1)}$ ve $\Lambda^{(2,2)}$ alt uzaylarının elemanlarıdır. Taban uzayımız iki boyutlu olduğu için $d(e^{78}) = dfe^{78} = 0$ 'dır. Benzer olarak lif manifoldlarımız üç boyutlu ve böylelikle hacim formları kapalıdır, yani $d\phi_1^+ = d\phi_1^- = 0$ 'dır. O zaman $d\Omega$ şu şekilde yazılabilir,

$$d\Omega = \left[ -f^2 \omega d\omega \right] + \left[ -fdf\omega^2 + d\phi_2^+ m_2 + d\phi_2^- n_2 \right]$$
$$+ [fd\omega e^{78} - \phi_1^+ dm_1 - \phi_2^+ dm_2 - \phi_1^- dn_1 - \phi_2^- dn_2]. \qquad (38)$$

Köşeli parantez içerisindeki terimler sırası ile $\Lambda^{(5,0)}$, $\Lambda^{(4,1)}$ ve $\Lambda^{(3,2)}$ alt uzaylarının elemanlarıdır. Sonuç olarak Bonan formun kapalılığı $(d\Omega = 0)$, bize Önerme 6'da verilen üç koşulu verir ve ispat tamamlanır.

Önerme 6'da verilen üçüncü şartın lif uzayının Lie cebrini belirlediğini göstereceğiz.

**Yardımcı Teorem 7:** *M manifoldu Teorem 5'de olduğu gibi (3+3+2) warped-benzeri çarpım manifoldu olsun. Eğer*

$$fd\omega e^{78} - \phi_1^+ dm_1 - \phi_2^+ dm_2 - \phi_1^- dn_1 - \phi_2^- dn_2 = 0,$$

*sağlandığı zaman $c_1$ ve $c_2$ herhangi katsayılar olmak üzere, $\theta^i$ ve $\theta^{\hat{i}}$ 'lerin dış türevleri*

$$d\theta^1 = c_1 \theta^{23}, \quad d\theta^2 = -c_1 \theta^{13}, \quad d\theta^3 = c_1 \theta^{12},$$
$$d\theta^{\hat{1}} = c_2 \theta^{\hat{2}\hat{3}}, \quad d\theta^{\hat{2}} = -c_2 \theta^{\hat{1}\hat{3}}, \quad d\theta^{\hat{3}} = c_2 \theta^{\hat{1}\hat{2}}, \qquad (39)$$

*olarak belirlenir.*

**İspat:** $m_i$ ve $n_i$ (i=1,2) 1-formların dış türevlerini

$$dm_1 = u_1 e^{78}, \quad dm_2 = u_2 e^{78},$$
$$dn_1 = v_1 e^{78}, \quad dn_2 = v_2 e^{78}, \qquad (40)$$

$u_i$ ve $v_i$ 'ler taban manifoldu üzerinde fonksiyonlar olacak şekilde seçelim. Dış türevleri verilen koşulda yerine yazıp $e^{78}$ ile sadeleştirdiğimizde,

$$[fd\omega] - [\phi_1^+ u_1] - [\phi_2^+ u_2] - [\phi_1^- v_1] - [\phi_2^- v_2] = 0,$$

elde edilir. Yukarıda köşeli parantez içerisinde verilen terimler sırasıyla $\Lambda^{(2,1,0)} \oplus \Lambda^{(1,2,0)}$, $\Lambda^{(3,0,0)}$, $\Lambda^{(1,2,0)}$, $\Lambda^{(0,3,0)}$ ve $\Lambda^{(2,1,0)}$ alt uzaylarına aittir. Buradan $u_1 = v_1 = 0$ olduğu görülür, yani $dm_1 = dn_1 = 0$ bulunmuş olur. Böylelikle verilen denklem

$$fd\omega = \phi_2^+ u_2 + \phi_2^- v_2, \qquad (41)$$

şeklinde elde edilir. Son denklemde $w, \phi_2^+$ ve $\phi_2^-$ açık ifadeleri yerine konulursa,

$$fd(\theta^{1\hat{1}} + \theta^{2\hat{2}} + \theta^{3\hat{3}}) = (\theta^{1\hat{2}\hat{3}} + \theta^{\hat{1}2\hat{3}} + \theta^{\hat{1}\hat{2}3})u_2$$
$$+ (\theta^{\hat{1}23} + \theta^{1\hat{2}3} + \theta^{12\hat{3}})v_2, \qquad (42)$$

olarak bulunur. Eşitliği tekrar düzenlediğimizde

$$(fd\theta^1 - v_2\theta^{23})\theta^{\hat{1}} - (fd\theta^{\hat{1}} + u_2\theta^{\hat{2}\hat{3}})\theta^1$$
$$+ (fd\theta^2 + v_2\theta^{13})\theta^{\hat{2}} - (fd\theta^{\hat{2}} - u_2\theta^{\hat{1}\hat{3}})\theta^2 \qquad (43)$$
$$+ (fd\theta^3 - v_2\theta^{12})\theta^{\hat{3}} - (fd\theta^{\hat{3}} + u_2\theta^{\hat{1}\hat{2}})\theta^3 = 0,$$

olur ve buradan

$$d\theta^1 = \frac{v_2}{f}\theta^{23}, \; d\theta^2 = -\frac{v_2}{f}\theta^{13}, \; d\theta^3 = \frac{v_2}{f}\theta^{12},$$
$$d\theta^{\hat{1}} = -\frac{u_2}{f}\theta^{\hat{2}\hat{3}}, \; d\theta^{\hat{2}} = \frac{u_2}{f}\theta^{\hat{1}\hat{3}}, \; d\theta^{\hat{3}} = -\frac{u_2}{f}\theta^{\hat{1}\hat{2}},$$

elde ederiz. Eğer $d\theta^1 = \frac{v_2}{f}\theta^{23}$ eşitliğinin dış türevini aldığımızda

$$d(\frac{v_2}{f})\theta^{23} + \frac{v_2}{f} d\theta^2 \theta^3 - \frac{v_2}{f}\theta^2 d\theta^3 = 0, \qquad (44)$$

olarak bulunur ve $d\theta^2$, $d\theta^3$ yerine yazıldığında $d(\frac{v_2}{f})=0$ ve benzer şekilde $d(\frac{u_2}{f})=0$ olduğu görülür. Yani $\frac{v_2}{f}$ ve $\frac{u_2}{f}$ sabit sayılardır. Bu sabit sayılar $c_1$ ve $c_2$ olarak seçilir ise, ispat tamamlanmış olur.

Teorem 5'in ispatını aşağıdaki klasik sonucu kullanarak tamamlayacağız.

**Teorem 8 (Kobayashi ve Nomizu, 1969):** *Herhangi iki bağlantılı, basit bağlantılı ve tam Riemann manifoldlarının kesitsel eğrilikleri k ise manifoldlar birbirine isometriktir.*

**Teorem 5'in ispatı:** Denklem (39) kullanılarak $F_1$ ve $F_2$ manifoldlarının kesitsel eğriliklerinin pozitif olduğu $\left(K(F_i)=\frac{c_i^2}{2}\right)$ gösterilir. Teorem 8 kullanılarak, $F_1$ ve $F_2$'nin $S^3$'e isometrik olduğu ve bu sonuç ile de Teorem 5'in ispatını elde etmiş oluruz.

**Açıklama 9:** Çözümün varlığı için, $A, B, \hat{A}, \hat{B}$ ve $a_{ij}$ (i=1,2) ifadelerini Önerme 6'nın ilk iki şartını sağlayacak şekilde bulmamız gerekir. Baz 1-formlarının ($\theta^i$ ve $\theta^{\hat{i}}$) dış türevlerini kullanarak, ilk şart otomatik sağlanır. İkinci şartı çözmek yerine Yasui-Ootkusa çözümünü kullanacağız.

## Yasui-Ootsuka metrik tahmini(ansatz) ile karşılaştırma

Bütün 2-boyutlu Riemann metrikleri köşegenleştirilebilir olduğu için, Yasui-Ootsuka tahmininde olduğu gibi, denklem (26)'da verilen $e^7, e^8$ ortanormal baz elemanlarını

$$e^7=\tilde{a}_{11}dx,\ e^8=\tilde{a}_{22}dy, \tag{45}$$

olacak şekilde yazabiliriz. Ortogonal bir baz dönüşümü ile denklem (26)'da verilen $B$'nin sıfır yapılabileceğini ve tam olarak Yasui-Ootsuka metrik yapısının elde edileceğini göstereceğiz. Ortanormal kotanjant demeti bazı $\{e^i, e^{\hat{i}}\}$ için ortogonal baz dönüşümünü

$$\begin{aligned}\tilde{e}^i &= P^i_j e^j + Q^i_j e^{\hat{j}},\\ \tilde{e}^{\hat{i}} &= \hat{P}^i_j e^j + \hat{Q}^i_j e^{\hat{j}},\ i=1,2,3\end{aligned} \tag{46}$$

aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde verelim,

$$PP^t+QQ^t=I,\ P\hat{P}^t+Q\hat{Q}^t=0,\ \hat{P}\hat{P}^t+\hat{Q}\hat{Q}^t=I.$$

O zaman yeni baz takımı

$$\tilde{e}^i=\tilde{A}\theta^i+\tilde{B}\theta^{\hat{i}},\ \tilde{e}^{\hat{i}}=\tilde{\hat{A}}^i\theta^i+\tilde{\hat{B}}\theta^{\hat{i}}, \tag{47}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}&\tilde{A}=AP+\hat{A}Q, \tilde{B}=BP+\hat{B}Q,\\ &\tilde{\hat{A}}=A\hat{P}+\hat{A}\hat{Q}, \tilde{\hat{B}}=B\hat{P}+\hat{B}\hat{Q},\end{aligned} \tag{48}$$

şartlarını sağlayacak şekilde yazabiliriz. Bu durumda ortogonal dönüşüm matrisi

$$\begin{pmatrix} P & Q\\ \hat{P} & \hat{Q}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{B^2+\hat{B}^2}}\begin{pmatrix}\mp\hat{B} & \pm B\\ \varepsilon B & \varepsilon\hat{B}\end{pmatrix},\ \varepsilon^2=1, \tag{49}$$

ve yeni ortanormal baz katsayıları

$$\begin{aligned}&\tilde{A}=\mp\frac{f}{\sqrt{B^2+\hat{B}^2}},\quad \tilde{B}=0,\\ &\tilde{\hat{A}}=\varepsilon\frac{AB+\hat{A}\hat{B}}{\sqrt{B^2+\hat{B}^2}},\ \tilde{\hat{B}}=\varepsilon\sqrt{B^2+\hat{B}^2},\end{aligned} \tag{50}$$

olacak şekilde bulunur. Spin(7) holonomisine sahip $S^3\times S^3\times R^2$ manifoldu üzerinde Yasui-Oosuka tarafından denklem (13) ile verilen yerel ortanormal baz elemanları kullanılarak,

$$\begin{aligned}&A=\frac{1}{2}b^{\frac{3}{4}}\sec h(y), \qquad B=0,\\ &\hat{A}=\frac{1}{2}ab^{-\frac{1}{4}}\left(1-\tanh(y)\right),\ \hat{B}=ab^{-\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

$$a_{11} = ab^{\frac{3}{4}}, \; a_{12} = 0,$$
$$a_{21} = 0, \quad a_{22} = b^{\frac{3}{4}} \sec h(y), \tag{51}$$

şeklinde seçebileceğimiz fonksiyonlar, Önerme 6'da verilen üç şartı sağlar ve metriğin Spin(7) holonomisine sahip olduğunu direkt gösteren bir ispatı elde etmiş oluruz. Böylelikle aşağıdaki yardımcı teoremi elde ederiz.

**Yardımcı Teorem 10:** *M manifoldu (3+3+2) warped-benzeri bir çarpım manifoldu olsun. O zaman (3+3+2) warped-benzeri metrikler sınıfında, denklem (6) ile verilen Bonan formuna karşılık gelen Spin(7) yapıları içerisinde, ayar dönüşümlerine kadar denklem (15)'de verilen şekilde tek bir metrik vardır.*

## Sonuç

Bu çalışmada, Yasui-Ootsuka tarafından açık olarak verilen metriğin bir genellemesi olarak, *(3+3+2) warped-benzeri çarpım metrik* tanımlanmış ve denklem (6) ile verilen Bonan formunun kapalı olması durumunda lif manifoldlarının bazı global şartlar altında 3-kürelere isometrik olduğu ispat edilmiştir. Bu yolla Yasui-Ootsuka çözümünün, (3+3+2) warped-benzeri metrikler sınıfında, denklem (6) ile belirlenmiş olan Bonan formuna karşılık gelen Spin(7) yapıları içerisinde tek olduğu gösterilmiştir.

## Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK Araştırma Projesi (No:106T558) tarafından desteklenmiştir.

## Kaynaklar

Alekseevski, D., (1968). Riemannian spaces with unusual holonomy groups, *Functional Analysis and Applications,* **2**, 97-105.

Berger, M., (1955). Sur les groupes d'holonomie des varietes a conexion affine et des varietes Riemanniennes, *Bulletin de la Soci'et'e Math'ematique de France,* **83**, 279-330.

Bilge, A.H. ve Uğuz, S., (2008). A generalization of warped product manifolds with Spin(7) holonomy, *Proceedings*, 16th International Geometry Physics Workshop, Lisbon (Yayına kabul edildi).

Bonan, E., (1966). Sur les varietes Riemanniennes a groupe d'holonomie $G_2$ ou Spin(7), *Comptes Rendus Math'ematique, Acad'emie des Sciences, Paris,* **262**, 127-129.

Bryant, R., (1987). Metrics with exceptional holonomy, *Annals of Mathematics*, **126**, 525-576.

Bryant, R., ve Salamon, S., (1989). On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy, *Duke Mathematical Journal*, **58**, 829-850.

Flores, J.L. ve Sanchez, M., (2002). Geodesic connectedness of multiwarped spacetimes, *Journal of Differential Equations*, **186**, 1-30.

Gray, A., ve Brown, R.B., (1972). Riemannian manifolds with holomony group Spin(9), *Differential Geometry in honor of K. Yano,* 41-59.

Harvey, F.R., (1990). *Spinors and calibrations,* Academic Press, New York.

Hempel, J., (1976). *3-manifolds,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Joyce, D., (1996). Compact 8-manifolds with holonomy Spin(7), *Inventiones Mathematicae,* **123**, 507-552.

Joyce, D., (2000). *Compact manifolds with special holonomy groups,* Oxford University Press, London.

Kobayashi, S. ve Nomizu, K., (1969). *Foundations of Differential Geometry*, Vol I, Interscience.

O'Neil, B., (1983). *Semi Riemannian Geometry,* Academic Press, London.

Schwachhöfer, L.J., (2000). Riemannian, symplectic and weak holonomy, *Annals of Global Analysis and Geometry*, **18**, 291-308.

Yasui, Y. ve Ootsuka, T., (2001). Spin(7) holonomy manifold and superconnection, *Classsical and Quatum Gravity,* **18**, 807-816.