

# Bose-Einstein yoğuşuk maddesinde optik bilgi kapasitesinin arttırılması

Devrim TARHAN\*, Nazmi POSTACIOğLU, Özgür MÜSTECAPLIOğLU

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

*Bose-Einstein yoğuşuk maddesini uyumlu optik bilgi işlemleri için dinamik hafıza aleti olarak araştırdık. Özellikle, yoğuşuk maddede depolama zamanı içinde çok yavaş optik darbeler (vurumlar) analiz edildi. Yüksek dereceden dağınım özelliklerini hesaba katarak yoğuşuk maddede optik darbelerin ilerlemesini modelledik. Bu çalışmada atomik sistemin konuma bağlı olarak değişen yoğunluğu, sıcaklık ve atomik çarpışmaların şiddetine göre değişen yoğunluk profili de dikkate alındı. Yapılan analitik hesaplar ile kısa darbenin genişlemesini sıcaklığa, konuma ve atomik çarpışmalara göre analiz ettik. Bir optik darbe yoğuşuk madde içinde rezonans frekansında elektromanyetik olarak indüklenmiş saydamlık etkisi ile çok yavaş ilerletilebilir. Hızı son derece yavaş olduğundan sistem, optik bilgiyi saklama için kullanılabilir. Sınırlı parametreler için eşevreli optik bilgi hafıza kapasitesi bulundu. Ek olarak, radyal yöndeki yoğunluk profilini dikkate alan ve fiber optikte eğimli indeks fiber profili adı ile bilinen model ile yoğuşuk maddenin kırılma indisini modelledik. Yoğunlaşmış maddenin taşıyabileceği mod sayısını analitik olarak irdeledik. Ayrıca optik vurumların Bose-Einstein yoğuşuk maddesinde ilerlemesinde üç boyutlu etkileri ve optik modların sayısındaki bağ koşulları incelendi. Kırılma indisinin arttırılması durumunda daha çok optik modun Bose-Einstein yoğuşuk maddesinde taşınabileceğini gösterdik. Mod sayısının sıcaklığa bağlı değişimini inceledik. Kuantum eşevrelik sayesinde, deneysel parametreleri kullanarak mod sayısının kontrol edilebileceğini gösterdik. Ayrıca tek ve çok mod koşulları analitik olarak bulundu. Analitik sonuçlar, sayısal sonuçlarla karşılaştırıldı.*

**Anahtar Kelimeler:** Optik hafıza, eşevreli optik etkiler, darbe şekli, Bose-Einstein yoğuşması.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Devrim TARHAN. tarhand@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 18.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Mühendisliği Programı'nda tamamlanmış olan "Dispersion and waveguiding of ultraslow light in atomic bose-einstein condensates" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 09.01.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 09.01.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.05.2008 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Enhancing capacity of optical information storage in a Bose-Einstein condensate

### Extended abstract

*Bose-Einstein condensates (BECs) have potential to be used in attractive applications. In particular, they have been thought to be suitable for being quantum optical dynamic memories to store coherent quantum optical information. In order to assess and enhance practical value of this proposal, we have performed various realistic examinations using detailed numerical and analytical methods. Firstly, propagation of short pulses of widths in microsecond to nanosecond range through the BEC has been considered. In this part, the influence of dispersion on the temporal characteristics and on the coherent optical information storage capacity is discussed. By modeling ultra-slow short pulses in the condensate under electromagnetically induced transparency (EIT) conditions, taking into account pulse broadening, we have determined optimum optical information storage capacity. Secondly, we have investigated conditions limiting the optimum number of optical modes that can be supported by an atomic BEC. In this part, in addition to EIT, a refractive index enhancement scheme was also considered, as it allows for accommodating many numbers of modes in the condensate. Furthermore, we have shown that multi-mode pulses, though less in number can also be realized at the cost of tolerable absorption in the case of EIT scheme. Secondly, we determine the number of optical modes supported by a wave guide in which refractive index enhancement is produced by an atomic BEC. Some analytical approximations have been made neglecting the spatial inhomogeneity. More accurate results have been obtained using a numerical model where the spatial inhomogeneity is taken into account. In the refractive index enhancement model, the predictions of (WKB) theory have been compared with those of fully numerical simulations.*

*In this study, we investigate potential of atomic Bose-Einstein condensates as dynamic memory devices for coherent optical information processing. Specifically, the number of ultra-slow pulses that can be simultaneously present within the storage time in the condensate has been analyzed. By modeling short pulse propagation through the condensate, taking into account high-order dispersive properties, constraints on the information storage capacity has*

*been discussed. The roles of temperature, spatial inhomogeneity, the interatomic interactions and the coupling laser on the pulse shape have been pointed out. For a restricted set of parameters, it has been found that coherent optical information storage capacity would be optimized. Coherent optical information storage capacity of an atomic Bose-Einstein condensate is examined. Theory of slow light propagation in atomic clouds is generalized to short pulse regime by taking into account group velocity dispersion. It is shown that the number of stored pulses in the condensate can be optimized for a particular coupling laser power, temperature and interatomic interaction strength. Analytical results are derived for semi-ideal model of the condensate using effective uniform density zone approximation. Detailed numerical simulations are also performed. It is found that axial density profile of the condensate protects the pulse against the group velocity dispersion.*

*We examine the conditions determining the number of optical modes that can be supported by an atomic Bose-Einstein condensate. We show that under the conditions of refractive index enhancement via quantum coherence, it is possible to control the number of modes by means of experimentally accessible parameters including trap size, temperature, condensate number density and scattering lengths. Analytical results for the single and two-mode conditions are found. In order to slow down the group velocity we use electromagnetically induced transparency and find detuning parameter corresponding to number of modes. Results of numerical simulations are compared with analytical calculations of the propagation constants for a parabolic-refractive index profile.*

*Furthermore, taking into account finite radial size of the condensate, multi-mode light propagation in atomic Bose-Einstein condensate is investigated. The number of modes that can be supported by a condensate is found. Single mode condition is determined as a function of experimentally accessible parameters including trap size, temperature, condensate number density and scattering length. Quantum coherent atom-light interaction schemes are proposed for enhancing multi-mode light propagation effects.*

**Keywords:** Optical memories, Coherent optical effects, Pulse shaping, and Bose-Einstein condensate.

## Giriş

Işık, atomik ortam içinde elektromanyetik indüklenmiş saydamlık (EİS) sayesinde yavaşlatılabilir. Bu yavaş ışık değişik uygulamalarda kullanılabilir. Liu ve diğerleri (2001) yavaş ışığı kullanarak atomik ortam içinde optik bilgi depolamasını deneysel olarak gösterdiler. Bu çalışmanın bir bölümü, Bose-Einstein yoğuşuk maddesi içinde ilerleyen optik darbenin, ortamın dağınım özelliklerini hesaba katarak optik bilgi depolama kapasitesinin optimize edilmesini içerir.

Hau ve diğerleri (1999) ışığın yavaşlatılmasını soğuk atomlar için gerçekleştirdiler. EİS için deneysel düzeneklerinde, üç-seviyeli atomik bulut üzerine zayıf bir optik darbe gönderilir. Rezonans halinde atomik ortam, gelen darbeye karşı soğurma özelliği göstermez. Daha güçlü farklı bir laser kullanılarak kuantum eşevrelik oluşturulur (Harris, 1997).

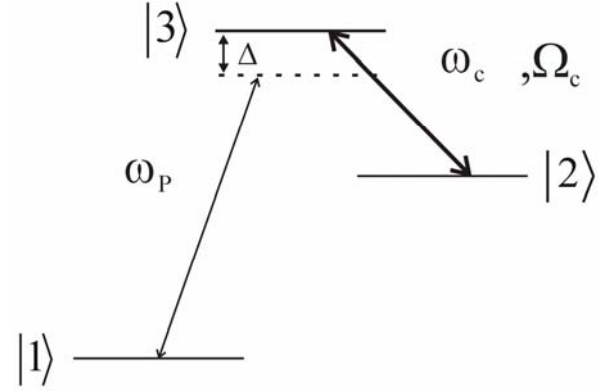
Yavaş ışık bir çok uygulamada kullanılabilir. Kash vd., (1999) sıcak atomik gazlarda geliştirilmiş nonlineer optik etkileri incelediler. Lukin ve Imamoglu (2001) ışığın elektromanyetik indüklenmiş saydamlık ile kontrol edilebildiğini ve bu ışığın kuantum hafızalarda kullanılabileceğini söylediler. Bunun yanında yavaş ışık, optik data depolamada kullanılabilir. Liu ve diğerleri (2001) yavaş ışığı kullanarak optik bilgi depolamasını deneysel olarak gösterdiler.

Deneylerde; grup hızı, gecikme zamanı kullanılarak ölçülür. Optik darbe ikiye bölünür. Bir tanesi atomik ortama girmeden boş uzayda ilerletilir, diğeri ise atomik ortama gönderilir. Böylece test lazeri için gecikme zamanı ölçülmüş olur. Atomik bulutun genliği görüntüleme lazeri tarafından ölçülür. Ortamın genliğinin gecikme zamanına oranı bize test lazerinin grup hızını verecektir. Teorik olarak grup hızını, ortamın soğurma katsayısını ve ikinci-dereceden dağınım katsayısını hesaplayabilmek için ilk önce ortamın uygunluğunu bulmak gerekir. Bunun için de atom için uygun iki adet enerji seviyesi seçtik.

## Atomik seviyeler

Şekil 1’de gösterildiği gibi iki lazer ışınıyla etkileşen  $N$  tane üç-seviyeli atomdan oluşan bir sis-

tem düşünelim.  $|1\rangle$  ile  $|2\rangle$  arasında dipol geçişine izin yoktur.  $|3\rangle$  ile  $|2\rangle$  arasında frekansı  $\omega_c$  olan güçlü lazer alanı,  $|3\rangle$  ile  $|1\rangle$  arasında ise frekansı  $\omega_p$  zayıf pomba lazeri uygulanmaktadır.



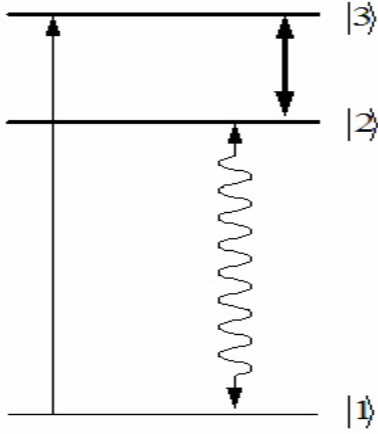
Şekil 1. İki lazerle etkileşen üç seviyeli atomun enerji seviye diyagramı

Şekil 1’deki sistemin uygunluğunu

$$\chi = \frac{N|\mu_{31}|^2}{\epsilon_0\hbar} \frac{i(i\Delta + \Gamma_2/2)}{[(\Gamma_2/2 + i\Delta)(\Gamma_3/2 + i\Delta) + \frac{\Omega_c^2}{4}]} \quad (1)$$

olarak hesapladık. Burada frekans farkı olan  $\Delta = \omega_{31} - \omega_p$ , rezonans elektronik geçiş  $\omega_{31}$ ’den test lazerin frekansı olan  $\omega_p$ ’nin farkına eşittir.  $\Omega_c$ , sürücü lazerin Rabi frekansıdır ve  $\mu_{31}$  ise  $|3\rangle$  ile  $|1\rangle$  arasındaki dipol matris elemanıdır.  $\Gamma_2$  ve  $\Gamma_3$ , karşı gelen durumların düşüş oranlarıdır. Şekil 1’de iki adet lazer kullanılmaktadır. Frekansı  $\omega_c$  olan pomba lazeri çalıştığında ortam frekansı  $\omega_p$  test lazerini soğurmamaktadır.

Şekil 2’de uyarılmış seviye,  $|3\rangle$  ikinci seviye,  $|2\rangle$  ile güçlü mikrodalga ile kuantum uyumluluğu oluştururlar. İkinci seviye ile taban durumu arasında dipol geçişine izin vardır.  $|1\rangle$  ile  $|3\rangle$  arasında pomba lazeri uygulanmaktadır.



Şekil 2. Üst-seviye mikrodalga şematik enerji seviye diyagramı

Şekil 2'deki atomik sistemde soğurma yoktur. Bu sistem için duygunluk,

$$\chi \approx \frac{3\lambda^3}{40\pi^2} \rho(r) \quad (2)$$

şeklinde dir. Denklem(2)'deki  $\lambda$ ,  $|3\rangle$  ile  $|1\rangle$  geçişindeki dalgaboyudur,  $\lambda = 589nm$ . Modelimizde Hau vd., (1999)'in deneysel parametrelerini kullandık. Bunlar,  $N = 8.3 \times 10^6$  tane atomdan oluşan  $^{23}Na$  sodyum,  $M = 23amu$ ,  $\lambda = 589nm$ ,  $\gamma = 2\pi \times 10.01MHz$ ,  $\Gamma_2 = 2\pi \times 10^3 Hz$ ,  $\Gamma_3 = 0.5\gamma$  ve saçılma uzunluğu,  $a_s = 2.75nm$ 'dir. Tuzaklama potansiyeli için parametreler ise  $\omega_r = 2\pi \times 69Hz$  ve  $\omega_z = 2\pi \times 21Hz$ 'dir.

### Kısa optik darbe ilerlemesi

Çok yavaş ışık deneyleri için üçüncü ve daha yüksek dağınım katsayılarının ihmal edilebileceğini hesapladık. Grup hızı dağınımını hesaba katan yoğunluk maddede darbe ilerlemesi için dalga denklemini yazdığımızda aşağıdaki denklem (3)'ü elde ederiz.

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \alpha E + \frac{1}{v_g} \frac{\partial E}{\partial t} + ib_2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Burada, soğurma katsayısı:

$$\alpha = -\frac{i\pi}{\lambda} \chi(\omega_0), \quad (4)$$

grup hızı ise,

$$\frac{1}{v_g} = \frac{1}{c} - \frac{\pi}{\lambda} \frac{\partial \chi}{\partial \omega} \Big|_{\omega_0} \quad (5)$$

ve ikinci dereceden dağınım katsayısı

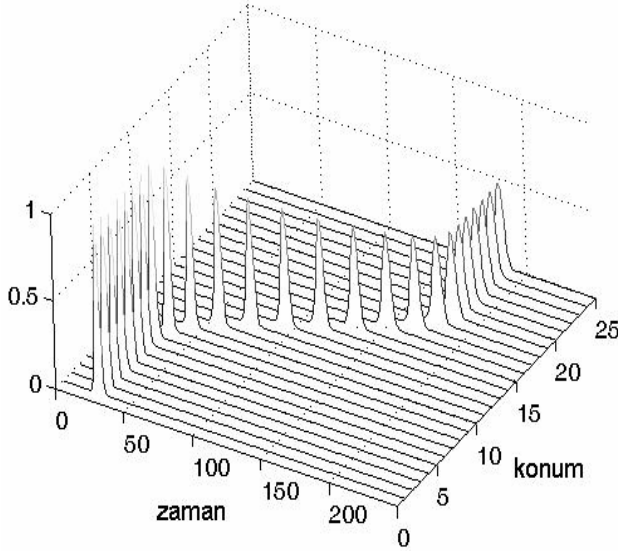
$$b_2 = \frac{\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \chi}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega_0} \right], \quad (6)$$

rezonans durumunda denklem(6)'daki gibidir. Denklem (3)'deki katsayılar konuma bağlıdır. Eğer bu denklemi analitik çözmek istersek yoğunlaşmış maddenin pik değerlerini alabiliriz. Bu durumda denklem(3) için genel çözüm (Saleh ve Teich(1991)),

$$E(z, t) = \left[ \frac{q(0)}{q(z)} \right]^2 \exp\left[i\pi \frac{(t - \tau_d)^2}{b_2 q(z)}\right] \quad (7)$$

şeklinde olacaktır. Burada  $q(z) = z + iz_0$ ,  $z_0 = -\pi\tau_0^2/b_2$  ve  $\tau_d = z/v_g$ . Denklem (3)'ü çözmek için paket program olan *Mathematica'nın* "NDSolver" ini kullanarak sayısal çözdüğümüz durumda Şekil 3'i elde ederiz. Başlangıç olarak Gausyen bir darbe aldık.  $e^{-(t/\tau_0)^2}$ , Gausyen optik darbesinin genişliği  $\tau_0 = 10^{-6}sn$ 'dir. Şekil 3'de hem konum hem de zaman birimsiz hale getirilmiştir. Atomik bulutun toplam uzunluğu  $250\mu m$ 'dir. Optik darbeyi yoğunluk maddeye gönderdiğimizde darbe ortam içinde  $60\mu sn$  kalmaktadır. Darbenin ilk genişliği  $\tau_0 = 10^{-6}sn$ , son genişliği ise  $\tau_s = 1.7 \times 10^{-6}sn$ 'dir. Darbenin malzeme içine geldiğinde grup hızının çok yavaşladığı Şekil 3'de de görülmektedir. Bu şekilde zaman  $0.4\mu sn$  ile konum ise  $10\mu m$  ile skala edilmiştir.

Bose-Einstein yoğunluk maddesinin yoğunluğu,  $\rho \sim 10^{20} - 10^{21}m^{-3}$  olduğunda rabi frekansı,  $\Omega_c \sim 5\gamma - 15\gamma$  için pompa gücü kurulabilir. Darbenin yayılımı, pompa gücüne grup hızından daha



Şekil 3. Genişliği  $10^{-6}$  saniye olan optik darbenin Bose-Einstein yoğuşmuş maddede ilerleyişinin gösterimi

duyarlıdır. Bu durum, bir depolama kapasitesinin maksimum amaçlar için grup gecikmesinin ve darbe yayılımının optimize edilmesinde kullanılabilir. Yoğuşuk maddenin efektif boyu  $L$ , ve yoğunluğunu da uniform alırsak, gecikme zamanını,

$$t_d = \frac{L}{v_g} - \frac{L}{c} \quad (8)$$

olarak buluruz. Darbenin yayılımı  $\tau(L)$ , ise

$$\tau(L) = \tau_0 \left[ 1 + \left( \frac{L}{z_0} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9)$$

olarak hesaplarız. Burada  $z_0 = -\pi\tau_0^2 / b_2$  'dır. Eğer  $L \gg z_0$  olursa yayılma aşağıdaki ifadeye yaklaşık olarak eşit olur.

$$\tau(z) \approx |b_2| \frac{z}{\pi\tau_0} \quad (10)$$

Optik bilgi kapasitesini  $C$  ile gösterirsek ve  $C = L / 2v_g\tau$  formülünü kullanarak optik bilgi kapasitesini elde ederiz.

$$C = \frac{L}{2\tau_0 \sqrt{4\pi^2\Omega_c^4 / 9\lambda^4\gamma^2\rho^2 + 4L\Gamma_3 / \pi\tau_0^2\Omega_c^2}} \quad (11)$$

### Bose-Einstein yoğuşuk maddesinin profili

Optimum bit depolama kapasitesinin kontrol parametrelerinden biri olan homojen olmayan atomik bulutu detaylı olarak inceleyelim. Düşük sıcaklıklarda Bose gazı iki kısım olarak düşünülebilir. Birinci kısım yoğuşuk maddeden, ikinci kısım ise termal gazdan oluşmaktadır. Bu durum, analitik olarak 1998 yılında modellenmiştir (Naraschewski ve Stamper-Kurn,1998). Atomik yoğunluk,

$$\rho(\vec{r}) = \rho_c(\vec{r}) + \rho_{th}(\vec{r}) \quad (12)$$

şeklinde tanımlanır. Buradaki  $\rho_c(\vec{r})$  ise denklem(13) ile modellenir.

$$\rho_c(\vec{r}) = \frac{\mu - V}{U_0} \theta(\mu - V) \theta(T_C - T) \quad (13)$$

Denklem(13) Thomas-Fermi yaklaşımı altında yoğuşmuş kısmı temsil eder. Bose gazın termal kısmı ise

$$\rho_{th}(\vec{r}) = \frac{g_{3/2}(ze^{-\beta V(\vec{r})})}{\lambda_T^3} \quad (14)$$

denklem(14) ile verilir. Burada  $V(r) = (m/2)(\omega_r^2 r^2 + \omega_z^2 z^2)$  silindirik koordinatlarda harmonik tuzaklama potansiyelidir. Denklem(13) ve (14)'deki terimleri açıklayacak olursak, atomik etkileşim katsayısı  $U_0 = 4\pi\hbar^2 a_s / m$ , burada  $m$ , atomik kütle,  $a_s$  atomik s-dalgası saçılma uzunluğu ;  $\mu$  kimyasal potansiyel;  $\Theta(\cdot)$  Heaviside basamak fonksiyonu;

$g_\alpha(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^j / j^\alpha$ , Bose fonksiyonu;  $\lambda_T$  termal

De Broglie dalga boyu;  $\beta = 1/k_B T$ ;  $z$  uçuculuk olmak üzere  $z = \exp(\beta\mu)$ ; ve  $T_C$  kritik sıcaklık şeklinde tanımlanır. Kritik sıcaklığın altında kimyasal potansiyel

$$\mu(T) = \mu_{TF} \left( \frac{N_0}{N} \right)^{2/5} \quad (15)$$

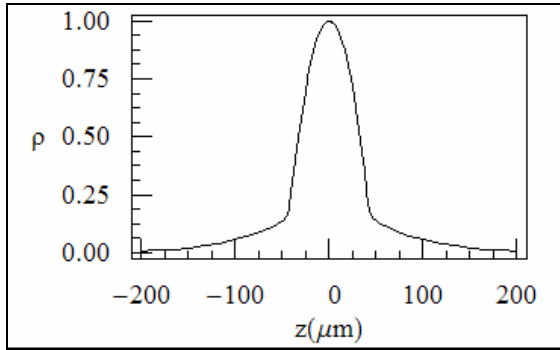
denklem(15) ile tanımlanır. Buradaki  $\mu_{TF}$ , Thomas-Fermi yaklaşımı altında elde edilir. Yoğuşukluk oranı da aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{N_0}{N} = 1 - x^3 - s \frac{\zeta(2)}{\zeta(3)} x^2 (1 - x^3)^{2/5} \quad (16)$$

Denklem (16)'da  $x=T/T_C$  ve  $\zeta$  ise Riemann-Zeta fonksiyonudur. Skala parametresi  $s$  ise bu durum, atomik etkileşimlerin gücünü karakterize eder.

$$s = \frac{\mu_{TF}}{k_B T_C} = \frac{1}{2} \zeta(3)^{1/3} (15 N^{1/6} \frac{a_s}{a_h})^{2/5} \quad (17)$$

Burada,  $a_h = \sqrt{\hbar / (\omega_z \omega_r^2)^{1/3}}$  harmonik osilatörün uzunluk skalasının ortalamasıdır. Bose-Einstein yoğuşuk maddenin aksiyal yöndeki(z eksen), profili Şekil 4'te gösterilmiştir.



Şekil 4. Aksiyal(z) yöndeki Bose-Einstein yoğuşuk profili

Tarhan ve diğerleri (2006), uniform olmayan bosonik atom bulutu için dalga ilerleme parametrelerini,  $\alpha, v_g, b_2$  hesapladılar. Atomik bulutun efektif uzunluğu,

$$L = \left[ \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty r dr \int_0^\infty z^2 \rho(r, z) dz \right]^{1/2} \quad (18)$$

denklem(18) ile verilir. Tarhan ve diğerleri (2006), yoğuşmuş maddenin sıcaklığa ve atomlar

arası etkileşmeye bağlı olan pik yoğunluğunu kullanarak optik darbenin yayılmasını analitik olarak modellediler.

### Bose-Einstein yoğuşuk maddesinde çoklu optik modlar

Kuantum optik hafıza olarak atomik yoğuşmuş maddelerin kapasitesini kısa darbeler kullanarak arttırmadaki teknik ve temel zorlukları da ortaya çıkaran ve alternatifler sunan çalışmalarımız sonucunda, atomik yoğunluk profilinin bu konudaki önemini iyice anladık. Bunu avantaja çevirebilmek için sadece hareket eksenindeki yoğunluk profilini değil bu eksene dik yöndeki yoğunluk profilini de dikkate alan daha genel bir yaklaşım ve modelleme belirleyebiliriz. Bu fiber optikte iyi bilinen eğimli indeks fiber profili ile homojen olmayan eken profilili fiberi beraberce ele alan karmaşık bir model olmakla beraber, WKB metodu ile bazı analitik çözümler bulabildik. Yoğuşuk maddenin kırılma indisini

$$n(r) = \begin{cases} n_1 [1 - 2\Delta (\frac{r}{R(T)})^2]^{1/2} \\ 1 \end{cases} \quad (19)$$

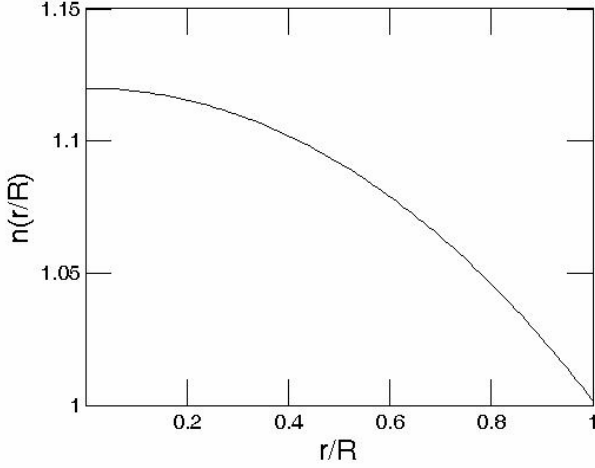
şeklinde modelleyebiliriz. Bu model eğimli indeks fiber profilidir. Burada  $2\Delta = (n_1^2 - n_2^2) / 2n_1^2$ ;  $n_1 = \sqrt{1 + \chi(0)}$  atomik bulutun merkezindeki maddenin kırılma indisidir;  $n_2 = 1$ 'dir; yarıçap  $R$  ise  $R(T) = \sqrt{2\mu(T) / m\omega_r^2}$ 'ye eşittir. Kırılma indisi bazı parametreler için Şekil 5'de gösterilmiştir. Kırılma indisi kenardan merkeze doğru artmaktadır. Tam merkezdeki değeri ise  $n(0) = 1.12$ 'dir. Bu ortamda modları bulmak için iki yöntem kullandık: Birinci yöntem, analitik olan Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) yaklaşık metodu, ikinci yöntem ise sayısal metoddur.

Yatay yöndeki elektrik alan için dalga denklemini yazarsak

$$[\nabla^2 + k^2] E_t = 0 \quad (20)$$

olduğunu görürüz. Burada  $k^2 = \omega^2 n^2 / c^2$  'dir. Denklem(20) için bir önerim yaparsak,  $E_i = \Psi(r)e^{i\phi} \exp[i(\omega t - \beta z)]$  ve bunu denklem (20)'de yerine koyarsak silindirik radyal denklemini elde ederiz.

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + p^2(r) \right] \Psi(r) = 0 \quad (21)$$



Şekil 5.  $n_1=1.12$  değeri için korun kırılma indisi

Burada  $p^2(r) = k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2}$  ve  $k_0 = \omega / c$  'dir.

Yoğuşmuş madde tarafından desteklenen mod sayısı WKB metodu ile bulunabilir.

$$\int_{r_1}^{r_2} \left[ k_0^2 n^2(r) - \beta^2 - \frac{l^2}{r^2} \right]^{1/2} dr = (m + \frac{1}{2})\pi \quad (22)$$

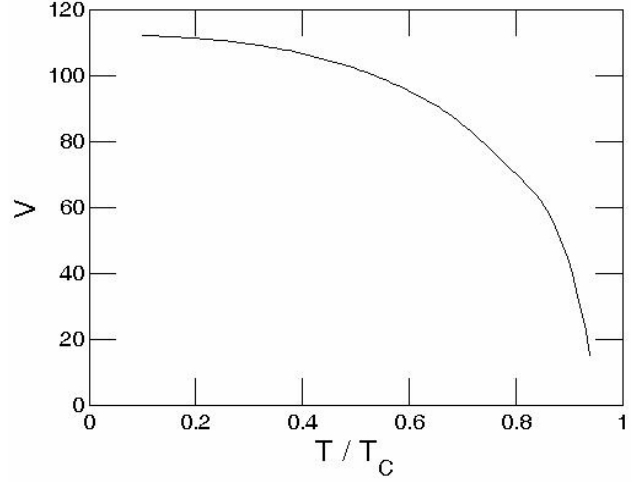
Denklem(22)'yi çözdüğümüzde  $z$  yönünde ilerleyen dalga sayısını,  $\beta_{lm}$  buluruz.

$$\beta_{lm} = n_1 k_0 \left[ 1 - \frac{2(2\Delta)^{1/2}}{n_1 k_0 R_{TF}} (|l| + 2m + 1) \right]^{1/2} \quad (23)$$

Mod sayısındaki bağ koşulu aşağıdaki gibi olur.

$$2(|l| + 2m + 1) \leq V = k_0 R (n_1^2 - n_2^2)^{1/2} \quad (24)$$

Eğer mod sayısını belirleyen  $V$ 'nin sıcaklığa göre değişimini çizdirirsek Şekil 6'yı elde ederiz. Sıcaklık  $T=42nK$  de maksimum mod sayısı 115'dir. Sıcaklığı kritik sıcaklığa doğru yükselttiğimizde mod sayısı düşmektedir. Bu da beklediğimiz bir sonuçtur. Çünkü hem yoğunlaşmış maddenin yarıçapı hem de kırılma indisi azalmaktadır.



Şekil 6.  $V$ 'nin sıcaklığa bağımlılığı

Bose-Einstein yoğunlaşması için tek mod koşulu atomik bulutun radyal uzunluğuna bağlıdır. Deneysel parametreleri  $T=42nK$  sıcaklığında kullandığımızda radyal yarıçapı  $R_{TM} \leq 1.13 \mu m$  olarak buluruz. WKB yaklaşığını kullanarak  $z$  yönündeki dalga sayısını açılal momentum sayısı olan  $l=0$  ve  $l=1$  için analitik olarak hesaplayabiliriz. Tablo 1'de analitik sonuç olarak  $\beta_{lm}$ ,  $R$  ile çarpılarak birimsiz hale getirilmiştir. Tablo 2'de ise sayısal sonuç verilmiştir.

Denklem(21)'i WKB yaklaşığını ile çözdük. Eğer daha doğru bir çözüm istiyorsak bu denklemi sayısal çözmemiz gerekir. Onun için de Bessel fonksiyonlarını kullanırız. Bunun içinse ortamın kırılma indisinin kenardan merkeze doğru yavaşça artması gerekir. Sayısal çözüm yapmak için, radyal yöndeki yoğunlaşmış maddenin silindirik kabuklardan oluştuğunu düşündük. İçerdeki çözümleri  $\psi = A_l J_l(q_i r) + B_l Y_l(q_i r)$  şeklinde aldık. Burada  $J_l(q_i r)$  ve  $Y_l(q_i r)$  birinci ve ikinci dereceden Bessel fonksiyonlarıdır. Dı-

şarındaki çözüm ise  $\psi = A_l I_l(q_l r) + B_l K_l(q_l r)$  şeklindedir.  $I_l(q_l r)$  ve  $K_l(q_l r)$  birinci ve ikinci dereceden modifiye Bessel fonksiyonlarıdır. Dalganın merkezde ve sonsuzda patlamaması için  $B_0 = 0$  ve  $A_{N+1} = 0$  (Dalganın sonsuzda sonlu olması). Dalganın kendisi ve türevi süreklidir. Bu süreklilik, katsayılar  $A_i, B_i$  arasında bir tekrarlılama bağıntısı sağlar. Bu katsayılar arasındaki oranın sabit olmasından  $z$  yönünde ilerleyen dalganın dalga sayısını,  $\beta$  bulabiliriz.

Tablo 1.  $z$  yönündeki dalga sayısı (WKB)

$l$	$\beta_1 R$	$\beta_2 R$	$\beta_3 R$	$\beta_4 R$
0	32.4740	33.4395	34.3779	35.2914
1	31.9803	32.9603	33.9119	34.8376

Tablo 1.  $z$  yönündeki dalga sayısı (sayısal)

$l$	$\beta_1 R$	$\beta_2 R$	$\beta_3 R$	$\beta_4 R$
0	32.4914	33.4400	34.3778	35.2912
1	32.0661	32.9635	33.9119	34.8375

## Sonuçlar

Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Bose-Einstein yoğuşuk maddesini teorik olarak modelledik ve deneysel parametreleri kullanarak yoğunluk profilini çizdirdik.
- Dağılım etkilerine rağmen, bit depolama kapasitesinin, kritik bir rabi frekansı seçilerek artırılabilirliğini gösterdik.
- Bose-Einstein yoğuşuk maddesini modellerken zayıf atomik etkileşimler de göz önüne alındı .
- Eğimli kırılma indisli yoğuşuk maddede ışık modları tartışıldı.
- $z$  yönündeki dalga sayısı WKB yaklaşıklığı yapılarak bulundu ve ayrıca yine bu yöntemle mod koşulları incelendi.  $z$  yönündeki dalga sayısı, hem analitik hem de sayısal metotla bulundu ve karşılaştırıldı.

- Maksimum mod sayısı  $V$ 'nin sıcaklığa bağımlılığı gösterildi. Kritik sıcaklıkta minimum mod bulundu.
- Kırılma indisi artırılma modu için tek mod koşulu belirlendi.

## Kaynaklar

- Anderson, M.H., Ensher, J. R., Matthews, M. R., Wiemann, C. E., ve Cornell E. A., (1995). Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor, *Science*, **269**, 198.
- Davis, K.B., Mewes, M. O., Andrews, M. R., van Druten, N. J., Durfee, D. S., Kurn, D. M., ve Ketterle, W., (1995). Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms, *Physical Review Letters*, **75**, 3969.
- Hau, L.V., Harris, S. E., Dutton, Z., ve Behroozi, C. H., (1999). Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas, *Nature*, **397**, 594-598.
- Harris, S.E. (1997) Electromagnetically induced transparency, *Physics Today*, **50**, 36-42.
- Kash, M .M., Sautenkov, V. A., Zibrov, A. S., Hollberg, L., Welch, G. R., Lukin, M. D., Rostovtsev., Y. Fry. E. S., ve Scully., M. O. (1999). Ultraslow Group Velocity and Enhanced Nonlinear Optical Effects in a Coherently Driven Hot Atomic Gas, *Physical Review Letters*, **82**, 5229-5232.
- Liu, C., Dutton, Z., Behroozi, C. H., ve Hau, L.V., (2001). Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses, *Nature*, **409**, 490-493.
- Lukin, M. D. ve Imamoglu, A., (2001) Controlling photons using electromagnetically induced transparency, *Nature*, **413**, 273-276.
- Naraschewski M., ve Stamper-Kurn D.M, (1998). Analytical description of a trapped semi-ideal Bose gas at finite temperature, *Physical Review A*, **58**, 2423-2426.
- Saleh, B. B. A. ve Teich, M. C., (1991). *Fundamentals of photonics*, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Tarhan, D., Sennaroglu A. ve Müstecaplıoğlu Ö. E., (2006) Dispersive effects on optical information storage in Bose-Einstein condensates using ultraslow short pulses. *Journal of Optical Society of America B*, **23**, 9, 1925-1933.