

# Ricci-Rank 1 Lorentz manifoldlarında statik tam çözümler

Durmuş DAĞHAN\*, Ayşe H. BİLGE

İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programı, 34469, Ayazağa, İstanbul

## Özet

Einstein alan denklemlerinin çözümlerinde kullanılan ve kotanjant demetinin  $\{l, n, m, \bar{m}\}$  ışık sal yerel tabanı için hareketli çatı yaklaşımına eşdeğer olan, Newman-Penrose (NP) formalizmi kullanılarak,  $\Phi_{00} \neq 0$  durumu için Ricci tensörünün rankının 1 olma koşulu elde edildi. Daha sonra genel bir B tipi warped çarpım metrik için NP sistemi verilerek, bu sistemde manifoldun ikinci bileşeninin sabit eğriliğe sahip,  $R^3$ 'e gömülmüş, kompakt, bağlantılı ve regüler bir manifold olması durumunda uzay-zamanın küresel simetrik, Ricci tensörü matrisinin rankının 1 ve Enerji-momentum tensörü matrisinin tekil olmaması durumunda, fiziksel kaynağın kütle sız bir skaler alan olması gerektiği ispatlandı. Genel B tipi warped çarpım metriktten, küresel simetrik metriğe geçilerek, NP büyüklükleri hesaplandı. Einstein alan denklemleri, Ricci tensörü için rank 1 koşulu kullanılarak elde edildi. İkinci olarak, (3+1) boyutta Einstein alan denklemleri, küresel simetrik metriğe kütle sız skaler alanın kuple edilmesiyle çalışıldı. Başlangıçta "over determined" olan orjinal sistem,  $a, \alpha, r$  ve  $m$  değişkenleri Choptuik (Choptuik, M. W., (1993). "Universality and scaling in gravitational collapse of massless scalar field", Physical Review Letters, 70, 9) de olduğu gibi kullanılarak,  $\mu = m/r$  ve  $y = \alpha/ra$  fonksiyonları için efektif olarak zamana göre ikinci dereceden normal bir sisteme indirgendi.  $\mu$  ve  $y$  için, zamandan bağımsız (statik) duruma, skaler alanın  $\phi_t = 0$  veya  $\phi_s = 0$  olması durumunda geçildi ve bunlar sırasıyla pozitif ve negatif dal olarak adlandırıldı. Pozitif dal olarak adlandırdığımız statik durum için hem tam çözüm bulundu, hem de faz düzlemi analizi ile  $\mu = 0$  aşık ar çözümünün  $\mu_s + \mu = 0, \mu < 1/2$  bölgesinde bir genel çekim noktası olduğu kanıtlandı. Negatif dal olarak adlandırdığımız statik durum, dinamik bir sistem olarak incelendi ve tüm çözüm eğrileri karakterize edilerek  $(1/4, 0)$  noktasının  $\mu_s + \mu = 0, \mu < 1/2$  bölgesinde genel bir çekim noktası olduğu ispat edildi.

**Anahtar Kelimeler:** Choptuik uzay zamanı, küresel simetrik statik çözümler, kütle sız skaler alan.

\*Yazışmaların yapılacağı yazar: Durmuş DAĞHAN, daghand@itu.edu.tr; Tel: (212) 285 32 83.

Bu makale, birinci yazar tarafından İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Mühendisliği Programında tamamlanmış olan "Ricci-Rank1 Lorentz manifoldlarında tam ve yaklaşık çözümler" adlı doktora tezinden hazırlanmıştır. Makale metni 27.03.2007 tarihinde dergiye ulaşmış, 12.06.2007 tarihinde basım kararı alınmıştır. Makale ile ilgili tartışmalar 31.03.2009 tarihine kadar dergiye gönderilmelidir.

## Ricci-Rank 1 Lorentzian manifolds: static exact solutions

### Extended abstract

In 4-dimensions, the Newman-Penrose (NP) formalism (Newman, et al, 1962) which has found wide applications in General relativity uses a "moving frame" consisting of null 1-forms  $\{l, n, m, \bar{m}\}$  and it is related to a spin structure on manifold  $M$ .

In this paper firstly, the Ricci tensor matrix is expressed with respect to  $\{l, n, m, \bar{m}\}$  local base by using the Newman-Penrose formalism and determined its structure when  $\Phi_{00} \neq 0$ . When the case  $\Phi_{00} \neq 0$ , the rank 1 condition of the Ricci tensor matrix is found. For the general type B warped product metric, when the second component of the manifold has the space of constant curvature and is embedded in  $R^3$ , compact, connected and regular, it is shown that space-time must be spherically symmetric. When the Ricci tensor has rank 1 and the Energy-momentum tensor is non-singular, it is shown that physical source must be a massless scalar field. Newman-Penrose quantities are calculated by reducing the general type B warped metric to spherically symmetric metric. For the spherically symmetric metric, Einstein's field equations are obtained by using the Ricci tensor rank 1 condition.

In the paper secondly, Einstein's field equations are studied independently of the Ricci rank 1 classification via a spherically symmetric metric coupled to a massless scalar field in (3+1)-dimensions. The initial value problem for this problem was studied analytically and the existence of solutions was proved in (Christodoulou, 1986a and 1986b). The numerical investigation of the same problem (Choptuik, 1993) led to the discovery of the "threshold phenomenon", for which a detailed overview can be found for example in Gundlach (Gundlach, 2003).

The field equations used in numerical studies in the literature form a consistent but over-determined system. In this paper, we made use of the complete set of field equations as in Harrison (Harrison, 2004) to decouple the equations for the metric functions from the equations for the scalar field. These equations form a normal system and they are effectively of

second order in time. In logarithmic coordinates, they have no explicit dependency on the independent variables, as expected from the symmetry analysis of the original equations. The second order hyperbolic equation for the mass density involves a parameter that can be either plus or minus one, hence the decoupled system has positive and negative "branches". Besides its suitability for perturbative studies, in the time independent case, this system reduces to an autonomous second order system and allows a rigorous analysis of the negative branch, which is not transparent in the original formulation.. In particular the non-flat special solution for the negative branch corresponding to  $\mu = 1/4$  or  $m = (1/4)r$ , is obvious.

We noted that the static case can be realized either by  $\phi_t = 0$  or by  $\phi_s = 0$ , corresponding respectively to the positive and negative branches and then static special solutions for the positive and negative branches are given.

For the positive branch we obtained an exact analytic solution and by using the phase plane analysis, it is proved that the trivial solution  $\mu = 0$  is a global attractor in the region  $\mu + \nu > 0$ ,  $\mu < 1/2$ , while for the negative branch, is examined as a dynamical system and all of the solution curves are characterized and we proved that all solutions starting in the region  $\mu + \nu > 0$ ,  $\mu < 1/2$ , stay in that region and the constant solution  $\mu = 1/4$  is a global attractor. The vacuum solution and the Schwarzschild solution with  $\mu_s + \mu = 0$  are of course common both branches.

The solution for the positive branch dates back to Fisher (Fisher, 1948) and has been rediscovered many times, the most popular one being the reference (Janis et.al). We also note a recent paper on this subject by Zecca (2006) using the Newman-Penrose formalism.

The second class of static solutions that we call the negative branch has been only noticed by Wyman (Wyman, 1983) where it was studied perturbatively, hence our implicit solution for the negative branch is new.

**Keywords:** Choptuik spacetime, spherically symmetric static solution, massless scalar fields.

## Giriş

$M$ , herhangi bir yarı-Riemann manifoldu ve  $g$ ,  $M$  üzerindeki yay elemanı olsun.  $(M, g)$  manifoldunda,  $g$  metriğiyle uyumlu, burulmasız tek bir bağlantı vardır (O'Neil, 1983). "Levi-Civita bağlantısı" olarak adlandırılan bu bağlantı, koordinat çatısında Christoffel sembolleri ile, hareketli bir çatıda ise dış türevler veya komütatörler ile hesaplanabilir. Bağlantı kullanılarak eğrilik tensörü bileşenleri, buradan da Ricci tensörü bileşenleri elde edilir.  $g$ , metriği  $(-, +, \dots, +)$  işaretine sahipse  $(M, g)$  Lorentz manifoldu olarak adlandırılır. Biz bu çalışmada Einstein alan denklemlerini Lorentz manifoldu üzerinde inceleyeceğiz.

Makale, 2 temel bölüm halinde düzenlenmiş olup, ilk olarak, kotanjant demetinin  $\{l, n, m, \bar{m}\}$  ışık sal bir yerel tabanı için hareketli çatı yaklaşımına eşdeğer olan Newman-Penrose (NP) formalizminde (Newman ve Penrose, 1962) herhangi bir metrik için Ricci tensörünün matrisi ifade edilecek ve  $\Phi_{00} \neq 0$  durumu için rankının 1 olma koşulu bulunacaktır. Daha sonra genel bir B tipi warped çarpım metrik için NP sistemi verilerek, bu sistemde, manifoldun ikinci bileşeninin sabit eğriliğe sahip,  $R^3$ 'e gömülmüş, kompakt, bağlantılı ve regüler olması durumunda uzay-zamanın küresel simetrik, Ricci tensörünün rankının 1 olması ve Enerji momentum tensörünün tekil olmaması durumunda fiziksel kaynağın kütesiz bir skaler alan olması gerektiği gösterilecektir. Genel warped çarpım metrikten, küresel simetrik metriğe geçilerek, NP büyüklükleri hesaplanacak ve Einstein alan denklemleri, Ricci tensörü için rank 1 koşulu kullanılarak üçüncü bölümden bağımsız olarak elde edilecektir.

İkinci olarak, (3+1) boyutta Einstein alan denklemleri, küresel simetrik metriğe kütesiz skaler alanın kuple edilmesiyle çalışılacaktır. Bu durum için başlangıç değer problemi Christodoulou tarafından ele alınmış ve analitik olarak çözümün varlığı ispat edilmiş (Christodoulou, 1986a, 1986b), aynı problemin nümerik incelemesi ise "eşik davranışının" keşfine yol açmıştır (Choptuik, 1993). Bu konuyla

ilgili oldukça geniş bir literatür özeti Gundlach (Gundlach, 2003) tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada, yukarıdaki problem için alan denklemleri, efektif olarak ikinci dereceden kısmi türevli bir diferansiyel denklem sistemine indirgenecek ve statik çözümler aranacaktır. Statik duruma "pozitif" ve "negatif" dallar olarak adlandıracağımız iki durumda geçilecek, ilk durum için analitik çözüm verilecek, her iki durum için de faz düzlemi analizi ile global çekim noktaları belirlenecektir.

Pozitif dal olarak adlandıracağımız durum, aslında 1948 yılında Fisher (Fisher, 1948) tarafından elde edilmiştir. Daha sonraki yıllarda bu çözüm defalarca yeniden keşfedilmiştir. Bunlardan en önemlisi Janis-Newman ve Winicour tarafından bulunan çözümdür (Janis ve diğerleri, 1968). Yakın bir zamanda ise, bu çözüm yeniden NP formalizmi kullanılarak elde edilmiştir (Zecca, 2006).

Bizim negatif dal olarak adlandıracağımız ikinci çeşit statik durum ise, yalnızca pertürbatif olarak çalışılmıştır (Wyman, 1981). Bu nedenle, negatif dal için faz düzleminde eğrilerin davranışlarını belirleyerek elde ettiğimiz çözüm, literatürde yenidir.

## Ricci tensörü için rank 1 olma koşulu

Kotanjant demeti için yerel tabanlar  $\{l, n, m, \bar{m}\}$  olmak üzere Ricci tensörü ve izsiz Ricci tensörü bileşenleri arasındaki ilişkiler aşağıda verilmiştir (Stephani vd., 2003):

$$S_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{4} R g_{ab},$$

$$\Phi_{00} = \frac{1}{2} R_{ab} l^a l^b = \bar{\Phi}_{00}, \quad \Phi_{01} = \frac{1}{2} R_{ab} l^a m^b = \bar{\Phi}_{10},$$

$$\Phi_{02} = \frac{1}{2} R_{ab} m^a m^b = \bar{\Phi}_{20},$$

$$\Phi_{11} = \frac{1}{4} R_{ab} (l^a n^b + m^a \bar{m}^b) = \bar{\Phi}_{11},$$

$$\Phi_{12} = \frac{1}{2} R_{ab} n^a m^b = \bar{\Phi}_{21}, \quad \Phi_{22} = \frac{1}{2} R_{ab} n^a n^b = \bar{\Phi}_{22},$$

Bu durumda, Ricci tensörünün matris gösterimi

$$R_a^b = 2 \begin{bmatrix} -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & -\Phi_{00} & \Phi_{10} & \Phi_{01} \\ -\Phi_{22} & -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & \Phi_{21} & \Phi_{12} \\ -\Phi_{12} & -\Phi_{01} & (\Phi_{11} + 3\Lambda) & \Phi_{02} \\ -\Phi_{21} & -\Phi_{10} & \Phi_{20} & (\Phi_{11} + 3\Lambda) \end{bmatrix}$$

şeklinde dir.  $rank(R_a^b) = 1$  ise, sadece bir tane lineer bağımsız sütun var demektir. Bu durumda, herhangi bir sütun ya tamamen sıfır ya da bu sütunun katı olmak zorundadır. Biz burada genel durumu ihmal edip, yalnızca  $\Phi_{00} \neq 0$  ile ilgileneceğiz.  $\Phi_{00} \neq 0$  ise 2. sütun sıfırdan farklıdır ve diğer tüm sütunlar 2. sütunun katıdır. Ayar dönüşümleri kullanılarak  $\Phi_{01} = 0$  yapılabilir. Bu durumda, 2. sütun;

$$\begin{bmatrix} -\Phi_{00} \\ -(\Phi_{11} - 3\Lambda) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde olup,  $rank(R_a^b) = 1$  ise,

$$\Phi_{12} = 0, \Phi_{11} + 3\Lambda = 0, \Phi_{02} = 0 \quad (1)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{bmatrix} -(\Phi_{11} - 3\Lambda) & -\Phi_{00} \\ -\Phi_{22} & -(\Phi_{11} - 3\Lambda) \end{bmatrix}$$

matrisinin determinantının da sıfır olması gerekir. Bu ise

$$(\Phi_{11} - 3\Lambda)^2 - \Phi_{00}\Phi_{22} = 0 \quad (2)$$

şartını verir.

### B Tipi Warped çarpım metrik için, Ricci tensörünün rank-1 olma koşulu

$M$ , Lorentz manifoldu üzerindeki B tipi warped çarpım metriği,  $(u, v, x, y)$  yerel koordinatlarında,

$$a_i = a_i(u, v), G = G(u, v), f = f(x, y), g(x, y)$$

olmak üzere,

$$ds^2 = -2[a_1 a_3 du^2 + (a_1 a_4 + a_2 a_3) dv^2] + 2G^2[f^2 dx^2 + g^2 dy^2] \quad (3)$$

şeklinde verilmiş olsun. (3) metriği için NP büyüklükleri kapalı formda aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\kappa = \nu = \tau = \pi = \lambda = \sigma = 0, \quad (4.a)$$

$$\bar{\mu} = \mu, \bar{\rho} = \rho, \bar{\varepsilon} = \varepsilon, \bar{\alpha} + \beta = 0, \quad (4.b)$$

$$\Psi_0 = \Psi_1 = \Psi_3 = \Psi_4 = 0, \quad (4.c)$$

$$\Phi_{01} = \Phi_{02} = \Phi_{12} = 0, \quad (4.d)$$

$$\Psi_2 + 2\Lambda = D\mu - \rho\mu + 2\varepsilon\mu, \quad (5.a)$$

$$\Phi_{00} = D\rho - \rho^2 + 2\varepsilon\rho, \quad (5.b)$$

$$\Phi_{22} = -\Delta\mu - \mu^2 - 2\gamma\mu, \quad (5.c)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} + 3\Lambda &= D\mu + \delta\alpha - \bar{\delta}\beta - 2\mu\rho + 2\varepsilon\mu \\ &- \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + 2\alpha\beta, \end{aligned} \quad (5.d)$$

$$\Phi_{11} - 3\Lambda = \Delta\rho + D\gamma - \Delta\varepsilon - 2\gamma\rho + 4\varepsilon\gamma \quad (5.e)$$

Bu büyüklüklerin açık ifadesini yazmak mümkünse de verdiğimiz kapalı form daha kullanışlı olacaktır. Bu koşullar kullanılarak tutarlı olduğu gösterilebilen NP sistemi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$D\rho = \rho^2 + 2\varepsilon\rho + \Phi_{00}, \Delta\rho = -\rho\mu + 2\gamma\rho - \Psi_2 - 2\Lambda,$$

$$D\mu = \rho\mu - 2\varepsilon\mu + \Psi_2 + 2\Lambda, \Delta\mu = -\mu^2 - 2\gamma\mu - \Phi_{22},$$

$$D\gamma = \Delta\varepsilon - 4\varepsilon\gamma + \Psi_2 + \Phi_{11} - \Lambda,$$

$$\delta\alpha = \bar{\delta}\alpha + \mu\rho - 4\alpha^2 - \Psi_2 + \Phi_{11} + \Lambda,$$

$$D\alpha = \rho\alpha, \Delta\alpha = -\mu\alpha, \delta\rho = 0, \delta\mu = 0, \delta\gamma = 0,$$

$$\Delta\Phi_{00} = -D(\Phi_{11} + 3\Lambda) + (4\gamma - 2\mu)\Phi_{00} + 4\rho\Phi_{11},$$

$$D\Phi_{22} = -\Delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) + (2\rho - 4\varepsilon)\Phi_{22} - 4\mu\Phi_{11},$$

$$D\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = 3\rho\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda), \delta\Phi_{22} = 0,$$

$$\Delta\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = -3\mu\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda), \delta\Phi_{00} = 0,$$

$$\delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = 0, \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) = 0$$

Herhangi bir B tipi warped çarpım metrik için, Ricci tensörünün bazı bileşenlerinin sıfır olduğunu kullanırsak, Ricci tensörünün rankının 1 olması için aşağıda (6) ile verilen şarta ulaşırız:

$$\Phi_{11} + 3\Lambda = 0, (\Phi_{11} - 3\Lambda)^2 - \Phi_{00}\Phi_{22} = 0. \quad (6)$$

Yukarıdaki çıkarımlar genel bir B tipi sarmal çarpım için elde edilmiştir.  $M = M_1 \times_{G^2} M_2$  şeklinde (3) metriğiyle verilmiş B tipi warped çarpım bir manifold olsun. Teorem 2 (Haddow ve Carot 1996) gereği  $M_2$ ,  $\delta(\Phi_{11} + 3\Lambda) = 0$  koşulu altında, sabit eğriliğe sahiptir. Ayrıca,  $M_2$ ,  $R^3$ 'e gömülmüş, kompakt bağlantılı ve regüler ise küredir (Do Carmo 1976). Dolayısıyla  $(M, g)$  küresel simetriye sahiptir. Çalışmamızın bundan sonraki bölümünde doğrudan, küresel simetrik metriklerle ilgileneceğiz.

### Küresel simetrik metrik

Burada, küresel simetrik metrikler için NP sistemini yazıp, skaler alan denklemini bu sistemden, Ricci tensörünün rankının 1 olması ve Enerji momentum tensörünün tekil olmaması durumunda fiziksel kaynağın küresel bir skaler alan olması gerektiğini göstereceğiz. Genel warped çarpım metrik için verilen Ricci tensörü matrisinden, Enerji momentum tensörünün tekil olmaması için  $\Phi_{00} \Phi_{22} \neq 0$  şartı elde edilir. Genel B tipi metrik için verilen NP sisteminde  $\Phi_{11} = -3\Lambda$  alınarak küresel simetrik bir metrik için aşağıdaki sistem elde edilir:

$$D\rho = \rho^2 + 2\varepsilon\rho + \Phi_{00}, \quad \Delta\rho = -\rho\mu + 2\gamma\rho - \Psi_2 - 2\Lambda,$$

$$D\mu = \rho\mu - 2\varepsilon\mu + \Psi_2 + 2\Lambda, \quad \Delta\mu = -\mu^2 - 2\gamma\mu - \Phi_{22},$$

$$D\gamma = \Delta\varepsilon - 4\varepsilon\gamma + \Psi_2 - 4\Lambda,$$

$$\delta\alpha = \bar{\delta}\alpha + \mu\rho - 4\alpha^2 - \Psi_2 - 2\Lambda,$$

$$D\alpha = \rho\alpha, \quad \Delta\alpha = -\mu\alpha, \quad \delta\rho = 0, \quad \delta\mu = 0, \quad \delta\gamma = 0,$$

$$\Delta\Phi_{00} = (4\gamma - 2\mu)\Phi_{00} + 4\rho\Phi_{11}, \quad (7.a)$$

$$D\Phi_{22} = (2\rho - 4\varepsilon)\Phi_{22} - 4\mu\Phi_{11}, \quad (7.b)$$

$$\delta\Phi_{00} = 0, \quad \delta\Phi_{22} = 0$$

$$\delta(\Psi_2 + 2\Lambda) = 0, \quad \delta(\Phi_{11} - 3\Lambda) = 0.$$

$$\Phi_{00} = (D\phi)^2, \quad \Phi_{22} = (\Delta\phi)^2$$

yazarsak (6) ile verilen rank 1 koşulundan;

$$\Phi_{11} = \frac{1}{2} D\phi \Delta\phi$$

elde edilir.  $\Phi_{00}, \Phi_{11}, \Phi_{22}$  ifadeleri (7.a,b) denklemlerinde yerlerine yazılırsa,

$$\Delta D\phi = (2\gamma - \mu)D\phi + \rho\Delta\phi,$$

$$D\Delta\phi = (\rho - 2\varepsilon)\Delta\phi - \mu D\phi$$

bulunur. Son iki denklem komütasyon bağıntısında yerlerine yazılırsa sistemin tutarlı olduğu görülür. Denklemler taraf tarafa toplanırsa  $\phi$  skaler alanı için dalga denklemi

$$(\Delta D + D\Delta)\phi = 2(\gamma - \mu)D\phi + 2(\rho - \varepsilon)\Delta\phi \quad (8)$$

şeklinde elde edilir. Bu ikinci mertebeden denklemin çözümünde tek değişkene bağlı iki keyfi fonksiyon olduğu için, (7.a,b) denklemlerinin genel çözümü (8) denkleminin çözümü cinsinden ifade edilebilir.

(3+1) boyutlu  $M$  Lorentz manifoldunda  $b = b(t, r)$ ,  $a = a(t, r)$  olmak üzere yerel koordinatlarda küresel simetrik metrik

$$ds^2 = -b^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 \quad (9)$$

şeklinindedir. Bu ise, genel bir sarmal çarpımda,

$$u = t, \quad v = r, \quad y = \varphi, \quad x = \theta,$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}b, \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}a, \quad a_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}b, \quad a_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}a,$$

$$G = \frac{r}{\sqrt{2}}, \quad f = \sin \varphi, \quad g = 1$$

seçimine karşı gelmektedir. (9) ile verilen küresel simetrik metrik için kullanacağımız gerekli NP büyüklükleri şu şekildedir:

$$\Psi_2 + 2\Lambda = \frac{1}{2a^2 r} \left[ \frac{a_r}{a} - \frac{b_r}{b} \right], \quad (10.a)$$

$$\Phi_{00} = \frac{1}{2a^2 r} \left[ -2 \frac{a_t}{a} + \frac{a_r}{a} + \frac{b_r}{b} \right], \quad (10.b)$$

$$\Phi_{22} = \frac{1}{2a^2 r} \left[ 2 \frac{a_t}{a} + \frac{a_r}{a} + \frac{b_r}{b} \right],$$

$$\Phi_{11} + 3\Lambda = \frac{1}{2a^2 r} \left[ \frac{a_r}{a} - \frac{b_r}{b} \right] + \frac{1}{2r^2} \left[ 1 - \frac{1}{a^2} \right], \quad (10.c)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{11} - 3\Lambda = & \frac{1}{2a^2 r} \left[ \frac{b_r}{b} - \frac{a_r}{a} \right] + \frac{1}{2a^2} \frac{b_{rr}}{b} - \frac{1}{2b^2} \frac{a_{tt}}{a} \\ & + \frac{1}{2b^2} \frac{a_t}{a} \frac{b_t}{b} - \frac{1}{2a^2} \frac{a_r}{a} \frac{b_r}{b} \end{aligned} \quad (10.d)$$

Yukarıdaki (10.a,b) denklemlerinde (6) ile verilen Ricci tensörünün rankının 1 olması koşulu;

$$b = ary, \quad r = e^s, \quad a^2 = \left[1 - \frac{2m}{r}\right]^{-1}, \quad m = r\mu \quad (11)$$

değişken değişimleri yapılarak kullanılırsa,  $\Phi_{11} + 3\Lambda = 0$  şartından;

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu} \quad (12.a)$$

denklemini,  $(\Phi_{11} - 3\Lambda)^2 - \Phi_{00}\Phi_{22} = 0$  şartından da,

$$\begin{aligned} \mu_{ss} + \mu_s - \frac{1}{y} \left( \frac{\mu_r}{y} \right)_t + \frac{2}{1-2\mu} \left[ (\mu_s + \mu)(\mu_s + 2\mu) - \left( \frac{\mu_r}{y} \right)^2 \right] \\ \pm 2 \sqrt{(\mu_s + \mu)^2 - \left( \frac{\mu_r}{y} \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad (12.b)$$

denklemini elde edilir. Bu sistem, bir sonraki kısımda standart olarak alan denklemleri kullanılarak yeniden elde edilecektir.

### (3+1) Boyutta skaler alanın kuple edilmesiyle elde edilen tam çözümler

Bu kısımda, (3+1) boyutta Einstein alan denklemleri, küresel simetrik metriğe kütleli skaler alanın kuple edilmesiyle çalışacağız. Başlangıçta "over determined" olan orjinal sistemden, normal bir sisteme, dönüşümleri Choptuik (Choptuik, 1993) gibi kullanılarak geçeceğiz. Zamandan bağımsız duruma skaler alanın  $\phi_t = 0$  veya  $\phi_s = 0$  olması durumunda geçeceğiz ve sırasıyla pozitif ve negatif dal olarak adlandıracağız. Pozitif dal için hem tam çözüm verilecek hem de  $\mu = 0$  aşıkör çözümünün genel bir çekim noktası olduğu kanıtlanacaktır. Negatif dal olarak adlandırdığımız statik durum, dinamik bir sistem olarak incelenecek ve  $(1/4, 0)$  noktasının bölgesinde genel bir çekim noktası olduğu ispat edilecektir.

#### Einstein alan denklemleri

$M$ , (3+1) boyutlu Lorentz manifoldu,  $x^\mu = (t, r, \varphi, \theta)$  lokal koordinatlar olsun.  $M$  manifoldu üzerindeki küresel simetrik metrik

$\alpha = \alpha(t, r)$ ,  $a = a(t, r)$  olmak üzere,

$$ds^2 = -\alpha^2 dt^2 + a^2 dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 \quad (13)$$

$$t_0 \leq t < \infty, \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \varphi < \pi, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

ile verilir (Choptuik, 1993). Einstein alan denklemleri

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa T_{\mu\nu}$$

şeklinindedir (Wald, 1984). Kütleli skaler alan için enerji momentum tensörü

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi)$$

şeklinde olur ve skaler alan  $\phi$  aşağıdaki dalga denklemini sağlar.

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi = (-g)^{-1/2} \partial_\mu [(-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi] = 0$$

Burada,  $\det |g_{\mu\nu}| = g$  olarak tanımlanır (Birrel ve Davies, 1982). Gravitasyonel sabit  $\kappa = 8\pi$  olarak alınıp Einstein alan denklemleri hesaplanırsa,

$$\frac{a_t}{a} = 4\pi r \phi_t \phi_r, \quad (14.a)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{a_r}{a} + \frac{1-a^2}{r} = 0, \quad (14.b)$$

$$\frac{\alpha_r}{\alpha} + \frac{a_r}{a} = 4\pi r \left[ \phi_r^2 + \left( \frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 \right], \quad (14.c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{rr}}{\alpha} - \frac{\alpha_r}{\alpha} \frac{a_r}{a} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\alpha_r}{\alpha} - \frac{a_r}{a} \right] + \left( \frac{a}{\alpha} \right)^2 \left[ \frac{a_{tt}}{a} + \frac{a_t}{a} \frac{\alpha_t}{\alpha} \right] \\ - 4\pi \left( \frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t^2 + 4\pi \phi_r^2 = 0, \end{aligned} \quad (14.d)$$

$$\left[ \left( \frac{a}{\alpha} \right)^2 \phi_t \right]_t = \frac{1}{r^2} \left[ r^2 \left( \frac{\alpha}{a} \right) \phi_r \right]_r, \quad (14.e)$$

elde edilir. (14.d) ve (14.e) denklemleri özdeş olup sistem tutarlıdır. Dolayısıyla, (14.a-c,e) den meydana gelen denklem takımıyla çalışmak ye-

terlidir. Bu dört denklem,  $a, \alpha$  ve  $\phi$  için “over determined” sistem olup genel çözüm içinde serbestlik derecesi, tek değişkenli üç keyfi fonksiyon olarak görünür.

Literatürde, eşik davranışı (threshold behavior) (14.b,c,e)'den oluşan sistemde  $\phi$  üzerine verilen çeşitli başlangıç koşulları için çalışılmıştır. Biz burada literatürden farklı olarak Harrison (Harrison, 2004) gibi (14.a) denklemini de kullanacağız. Önce,  $a(t, r)$  yerine  $m(t, r)$  fonksiyonu tanımlayıp, daha sonra da logaritmik koordinatlara geçerek over determined olmayan normal bir sistem elde edeceğiz. Bunun için,

$$a^2 = \left[ 1 - \frac{2m}{r} \right]^{-1}, \quad s = \ln r, \quad \frac{\alpha}{a} = ry, \quad m = r\mu \quad (15)$$

değişken dönüşümleri yukarıdaki denklemlerde kullanılırsa, alan denklemleri logaritmik koordinatlarda;

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu}, \quad (16.a)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\mu_t/y}{1-2\mu} = 2\phi_s \frac{\phi_t}{y}, \quad (16.b)$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu} = \phi_s^2 + \frac{\phi_t^2}{y^2}, \quad (16.c)$$

$$\left[ \frac{\phi_t}{y} \right]_t = 2y\phi_s + [y\phi_s]_s \quad (16.d)$$

şeklinde yazılır. Burada,  $\mu_s + \mu$  ve  $\mu_t/y$  için şu şartlar verilir.

$$\frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu} \geq 0, \quad \frac{1}{2\pi} \frac{(\mu_s + \mu) \pm (\mu_t/y)}{1-2\mu} = \left[ \phi_s \pm \frac{\phi_t}{y} \right] \geq 0.$$

### Alan denklemlerinin indirgenmesi ve statik özel çözümler

$\mu$  ve  $y$  için ikinci dereceden bir sisteme geçişi, alan denklemlerini indirgeyerek yapacağız. Bunun için, (16.a-d) denklem sisteminden  $\phi$ 'yi elimine edeceğiz ve  $\mu$  ve  $y$  için efektif olarak zamana göre ikinci dereceden bir sistem elde edeceğiz. Bunun için aşağıdaki önermeyi ispat-

sız olarak verelim. Önermenin ispatı düz, fakat oldukça uzun, karmaşık hesaba dayanmaktadır.

**Önerme 1.** (16.a-d) sistemi,  $\phi_s^2 - (\phi_t/y)^2 \neq 0$  için aşağıda verilen efektif olarak zamana göre ikinci dereceden sisteme indirgenir.

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu}, \quad (17.a)$$

$$\mu_{ss} + \mu_s - \frac{1}{y} \left( \frac{\mu_t}{y} \right)_t + \frac{2}{1-2\mu} \left[ (\mu_s + \mu)(\mu_s + 2\mu) - \left( \frac{\mu_t}{y} \right)^2 \right] \pm 2\varepsilon \sqrt{(\mu_s + \mu)^2 - \left( \frac{\mu_t}{y} \right)^2} = 0 \quad (17.b)$$

Burada,  $\varepsilon = \text{sgn}(1-2\mu)$  olarak tanımlanmıştır.

Bundan sonra,  $\mu_s + \mu > 0$  olduğunu kabul edeceğiz, bu ise (17.b) denkleminde  $\varepsilon = 1$  seçilmesi anlamına gelir.

Bu kısımda, bütün dikkatimizi zamandan bağımsız (statik) özel çözümlere vereceğiz. Bunun için, (17.b) denkleminde  $\mu_t = 0$  alalım. Bu ise,  $\phi_s = 0$  veya  $\phi_t = 0$  olmasını gerektirir. Bu durumda alan denklemleri, pozitif ve negatif dallar için aşağıdaki şekilde yazılırlar:

#### I. $\phi_t = 0$ (Pozitif dal)

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu}, \quad (18.a)$$

$$\mu_{ss} + \mu_s + \frac{2}{1-2\mu} (\mu_s + \mu)(\mu_s + 2\mu) + 2(\mu_s + \mu) = 0, \quad (18.b)$$

$$\phi_s^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu} \quad (18.c)$$

#### II. $\phi_s = 0$ (Negatif dal)

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1-2\mu}, \quad (19.a)$$

$$\mu_{ss} + \mu_s + \frac{2}{1-2\mu} (\mu_s + \mu)(\mu_s + 2\mu) - 2(\mu_s + \mu) = 0, \quad (19.b)$$

$$\frac{\phi_t^2}{y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_s + \mu}{1-2\mu} \quad (19.c)$$

$y_o$  ve  $\mu_o$  keyfi integrasyon sabitleri olmak üzere, pozitif ve negatif dal için statik özel çözümler aşağıda verilmiştir.

1.  $\mu = 0$ , pozitif ve negatif dal için bir tam çözüm olup,  $\phi_s = \phi_t = 0$  durumudur. Burada yay elemanı şu şekildedir.

$$ds^2 = -y_o^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2$$

2.  $\mu = 1/4$  negatif dal için bir çözüm olup,  $\phi_s = 0$  ve  $\frac{\phi_t}{y} = \frac{2}{2\sqrt{\pi}}$  durumuna karşılık gelir.

Yay elemanı ise şu şekilde yazılır:

$$ds^2 = -2y_o^2 r^2 dt^2 + 2dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2$$

3.  $\mu_s + \mu = 0$ , pozitif ve negatif dal için ortak çözümdür.  $\mu = \mu_o e^{-s}$  ve  $y = \frac{y_o}{\mu_o} \mu |1 - 2\mu|$  olarak

elde edilir. Bu ise çok iyi bilinen Schwarzschild çözümü olup, yay elemanı;

$$ds^2 = -y_o^2 \left[ 1 - \frac{2\mu_o}{r} \right] dt^2 + \left[ 1 - \frac{2\mu_o}{r} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2$$

şeklindedir.

4.  $\mu_s + 2\mu = 0$  pozitif dal için özel çözümdür.  $\mu = \mu_o e^{-2s}$  ve  $y = y_o \left| \mu / \mu_o \right|^{1/2} |1 - 2\mu|^{1/2}$  olup, yay elemanı aşağıdaki şekildedir.

$$ds^2 = -y_o^2 dt^2 + \left[ 1 - \frac{2\mu_o}{r^2} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2$$

### Pozitif dal için tam çözüm

Bu kısımda önce, pozitif dal için tam çözümü verip daha sonra faz uzayı analizinden  $\mu = 0$  aşıkâr çözümünün genel bir çekim noktası olduğunu ispatlayacağız. Şimdi, pozitif dal için (18.a-c) ile verilen denklem takımını  $\phi_s = \psi$  için yeniden yazalım.

$$\frac{y_s}{y} = -2 + \frac{1}{1 - 2\mu}, \quad (20.a)$$

$$\mu_s = -\mu + 2\pi(1 - 2\mu)\psi^2, \quad (20.b)$$

$$\frac{\psi_s}{\psi} = -\frac{1}{1 - 2\mu}. \quad (20.c)$$

Burada, (20.a-c) adi diferansiyel denklem sistemi için tam çözümü veren aşağıdaki önermeyi verelim:

**Önerme 2.**  $y_o$ ,  $r_o$  ve  $c$  integrasyon sabitleri olmak üzere, (20. a-c) adi diferansiyel denklem sisteminin çözümü,

$$\mu = \frac{1}{2} \left[ \frac{\psi^2 - \frac{c}{4\pi} \psi}{\psi^2 - \frac{c}{4\pi} \psi - \frac{1}{4\psi}} \right], \quad (21.a)$$

$$\frac{y}{y_o} = |\psi| |\psi - p|^{B_1} |\psi + q|^{B_2}, \quad (21.b)$$

$$\frac{r}{r_o} = |\psi|^{-1} |\psi - p|^{C_1} |\psi + q|^{C_2} \quad (21.c)$$

şeklinde yazılır. Burada,  $\psi = \phi_s$ ,  $r = e^s$  dir. Ayrıca,

$$p = \frac{1}{8\pi} (c + \sqrt{c^2 + 16\pi}) = \frac{c}{8\pi} \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right),$$

$$q = \frac{1}{8\pi} (-c + \sqrt{c^2 + 16\pi}) = \frac{c}{8\pi} \left( -1 + \frac{1}{\delta} \right),$$

$$B_1 = -(1 - \delta), \quad B_2 = -(1 + \delta),$$

$$C_1 = \frac{1}{2} (1 - \delta), \quad C_2 = \frac{1}{2} (1 + \delta)$$

olmak üzere,  $\delta = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 16\pi}}$  olarak verilir.

**İspat.**  $u = (1 - 2\mu)\psi$  olsun.  $u$ 'nun  $\psi$ 'ye göre türevi alınıp, (20. b, c) denklemleri kullanılırsa, aşağıdaki değişkenlerine ayrılabilen denkleme ulaşılır:

$$\frac{du}{d\psi} = u^2 \left( 4\pi + \frac{1}{\psi^2} \right)$$



Bu denklemin çözümü,  $c$  keyfi bir integrasyon sabiti olmak üzere,

$$u = \frac{\psi}{1 + c\psi - 4\pi\psi^2}$$

şeklinde elde edilir.  $u$ 'nun tanımından da  $\mu$ ,  $\psi$ 'nin bir fonksiyonu olarak (21. a) da verilen şekliyle elde edilir.  $\psi = p$  ve  $\psi = -q$  düşey asimtotlar olup,  $p$  ve  $q$  değerleri önermenin ifadesinde verildiği şekildedir.  $y$ 'nin çözümü için, (20.a) ve (20.c) denklemleri kullanılırsa,  $A=1$  ve önermenin ifadesinde verilen  $B_1$  ve  $B_2$  için aşağıdaki denklem yazılabilir.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{d\psi}{\psi} (1 - 4\mu) = \frac{d\psi}{\psi} \left[ \frac{-\psi^2 + \frac{c}{4\pi}\psi - \frac{1}{4\pi}}{\psi^2 - \frac{c}{4\pi}\psi - \frac{1}{4\pi}} \right] \\ &= d\psi \left[ \frac{A}{\psi} + \frac{B_1}{\psi - p} + \frac{B_2}{\psi + q} \right]. \end{aligned}$$

Bu ifade integre edilirse  $y$  ifadesinin (21.b) de verilen şekline ulaşılır. Son olarak,  $\mu$  değeri, (20. c) de yerine yazılırsa

$$\frac{d\psi}{4\psi(\psi^2 - \frac{c}{4\pi}\psi - \frac{1}{4\pi})} = d\psi \left[ \frac{A}{\psi} + \frac{C_1}{\psi - p} + \frac{C_2}{\psi + q} \right] = ds$$

elde edilir. Burada,  $A = -1$ ,  $C_1$  ve  $C_2$  değerleri ise önermenin ifadesinde verildiği gibidir. Bu son ifade integre edilirse, gerekli düzenlemeden sonra (21. c) denkleminde ulaşılır.

Şimdi  $\mu_s = v$  olarak, pozitif dal için (18.b) ile verilen ikinci derecen denklemini dinamik bir sistem olarak aşağıda yeniden yazalım.

$$\begin{bmatrix} \mu_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -3v - 2\mu - \frac{2}{1-2\mu}(v^2 + 3\mu v + 2\mu^2) \end{bmatrix} \quad (22)$$

Bu sistemin tek kritik noktası  $(0,0)$  olup, bu noktada sistem lineerleştirilirse,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{v} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad (23)$$

şeklinde elde edilir. (23) lineer sistemi için öz değerler  $-2$  ve  $-1$  olarak bulunur.  $-2$  ve  $-1$  öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler sırasıyla,  $(1, -2)$  ve  $(1, -1)$ 'dir.  $\mu_s + \mu = 0$  ve  $\mu_s + 2\mu = 0$  tam çözümler,  $(0,0)$  kritik noktası bir düğüm noktasıdır. Şimdi,  $\mu_s + \mu > 0$  ve  $\mu < 1/2$  tarafından sınırlanan yarım düzlemde,  $(0,0)$  noktasının genel bir çekim noktası olduğunu aşağıdaki teoremle ispat edelim.

**Teorem 1.**  $D$ ,  $\mu + v > 0$ ,  $\mu < 1/2$  tarafından sınırlanmış bölge ve  $(\mu(s), v(s))$  (22) denkleminin  $(\mu(0), v(0))$  ile  $D$  bölgesinde başlayan çözüm eğrisi olsun.  $(\mu(s), v(s))$ ,  $s \in (-\infty, \infty)$  için yine  $D$  bölgesinde kalır ve

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\mu(s), v(s)) = (0, 0)$$

olur.

**İspat.** (22) denkleminde  $V$ , çözüm eğrilerinin hız vektörü olmak üzere

$$V = \left[ v, -\frac{2}{1-2\mu}(v^2 + \frac{3}{2}v + \mu) \right]$$

şeklinde yazılır.  $1-2\mu$  değeri, bölgenin tamamında pozitifdir.  $V$ 'nin yönü,  $v$ ,  $v + \mu = 0$  ve  $v^2 + (3/2)v + \mu = 0$  ifadelerinin işaretlerinden belirlenebilir. Bu ise,  $D$  bölgesini aşağıda Tablo 1'de verilen dört alt bölgeye ayırır:

Tablo 1. (22) sisteminde integral eğrileri

D	$\mu_s, v_s$
$D_1$	$v > 0, \mu + v > 0, 2\mu + v < 0$
$D_2$	$v > 0, 2\mu + v \geq 0, \mu < 1/2$
$D_3$	$v \leq 0, v^2 + (3/2)v + \mu > 0, \mu < 1/2$
$D_4$	$v \leq 0, \mu + v > 0, v^2 + (3/2)v + \mu \leq 0, \mu < 1/2$

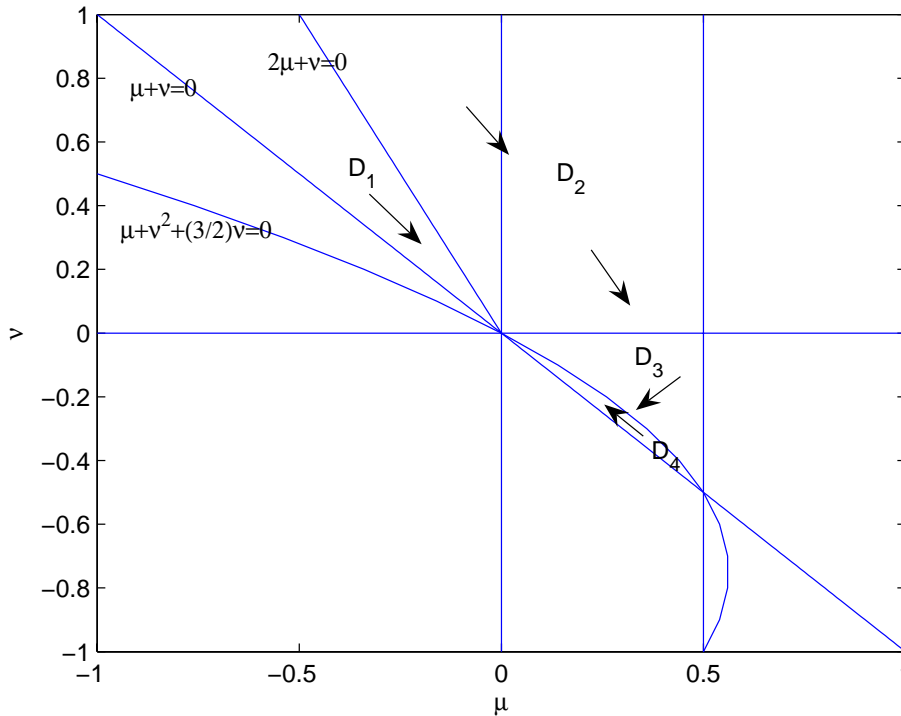
Şimdi, yukarıdaki her bir bölge için çözüm eğrilerinin durumlarını inceleyelim.

$D_1$  bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadrantta bulunur.  $v + \mu = 0$  ve  $v + 2\mu = 0$  tam çözümlerdir. Çözümün tekliliğinden dolayı, hız vektörü bu iki doğruyu kesemez. Yerel davranışı çözüm eğrilerinin orijine gitmesini garanti eder.  $D_2$  bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadrantta bulunur. Bu bölgede, çözüm eğrilerinin bir  $(\mu, v)$  noktasında,  $\mu = 1/2$  çizgisine çarpmayacağını ispat edelim. Bunun için,  $V$  hız vektörünün,  $(\mu, v)$  noktası ile  $(1/2, 0)$  noktasından daha önce birleşeceğini ispat etmemiz gerekir. Bunun içinde şu eşitsizliği ispat etmek yeterlidir.

$$\left| \frac{\mu_s}{v_s} \right| > \left| \frac{v}{(1/2) - \mu} \right|.$$

$1 - 2\mu$  ve  $\mu_s = v$ 'nün bu bölgede pozitiftir. Buradan,  $|v_s|(1 - 2\mu) - 2v^2 > 0$  yazılır. Bu ifadede  $v_s$  değeri yerine yazılırsa,

$$3v + 2\mu > 0 \quad (24)$$



Şekil 1. (22) sisteminde integral eğrileri

elde edilir.  $v$  ve  $\mu$  bu bölgede pozitif olduğundan eşitsizlik sağlanmış olur. Böylece, çözüm eğrileri  $\mu$  eksenini  $\mu = 1/2$  çizgisine çarpmadan geçerek üçüncü bölgeye düşerler.

$D_3$  bölgesinde, çözüm eğrisinin hız vektörü üçüncü kuadrantta bulunur.  $v^2 + (3/2)v + \mu = 0$  eğrisine kadar her iki yönde de azalan çözüm eğrilerinin hız vektörü bu eğriyi keserek dördüncü bölgeye geçer.  $D_4$  bölgesinde ise, çözüm eğrilerinin hız vektörü ikinci kuadrantta bulunur. Çözümün tekliliğinden,  $\mu_s + \mu = 0$  çizgisi kesilemez ve yerel davranışı orijine gitmesini garanti eder. Sonuç olarak,  $D$  bölgesinin herhangi bir yerinden başlayan çözüm eğrileri Şekil 1'de de görüleceği üzere orijine giderler. Bu ise, orijinin bir çekim noktası olduğunu gösterir.

#### Negatif dal için faz uzayı analizi

Burada, negatif dal için faz uzayı analizinden  $\mu = 1/4$  noktasının genel bir çekim noktası olduğunu ispat edeceğiz. Bunun için, (19.b) ile verilen ikinci dereceden denklemini  $\mu_s = v$  için bir dinamik sistem olarak yazalım.

$$\begin{bmatrix} \mu_s \\ v_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ v + 2\mu - \frac{2}{1-2\mu}(v^2 + 3\mu v + 2\mu^2) \end{bmatrix} \quad (25)$$

(25) ile verilen dinamik sisteminin kritik noktaları  $(0,0)$  ve  $(1/4,0)$ 'dir.  $(0,0)$  noktasında sistem lineerleştirilmesi,

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{v} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ile verilir. (26) lineer sisteminin öz değerleri  $-1$  ve  $2$  olup, bu öz değerlere karşılık gelen öz vektörler sırasıyla,  $(1,-1)$  ve  $(1,2)$ 'dir. Orijin bir semer noktası olup, çözüm eğrileri,  $v = -\mu$  boyunca orijine yaklaşırken,  $v = 2\mu$  boyunca ise orijinden uzaklaşır.

İkinci olarak, (25) sistemi  $(1/4,0)$  kritik noktasında lineerleştirilirse aşağıdaki sisteme ulaşılır.

$$\begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{v} \end{bmatrix}_s = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mu} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \quad (27)$$

(27) lineer sisteminin öz değerleri  $-1 \pm i\sqrt{3}$  olup,  $(1/4,0)$  noktası kararlı odak noktasıdır. Çözüm eğrilerinin,  $(0,0)$  ve  $(1/4,0)$  noktalarının yakınındaki lokal davranışları, çözümlerin global davranışları için oldukça önemlidir. Şimdi,  $\mu_s + \mu > 0$  ve  $\mu < 1/2$  tarafından sınırlanan yarım düzlemde,  $(1/4,0)$  noktasının genel bir çekim noktası olduğunu ispat edeceğiz.

**Teorem 2.**  $D$ ,  $\mu + v > 0$   $\mu < 1/2$  tarafından sınırlanmış bölge ve  $(\mu(s), v(s))$  (25) denkleminin  $(\mu(0), v(0))$  ile  $D$  bölgesinde başlayan çözüm eğrisi olsun.  $(\mu(s), v(s))$ ,  $s \in (-\infty, \infty)$  için yine  $D$  bölgesinde kalır ve

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (\mu(s), v(s)) = (1/4, 0)$$

olur.

**İspat.**  $V$ , çözüm eğrilerinin hız vektörü olsun. Bu durumda,  $V$  aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$V = \left[ v, -\frac{2}{1-2\mu}(v+2\mu)(v+2\mu-\frac{1}{2}) \right].$$

$1-2\mu$  değeri,  $D$  bölgesinin tamamında pozitifdir. Çözüm eğrisinin hız vektörü  $V$ 'nin yönü,  $v$ ,  $v+2\mu$  ve  $v+2\mu-1/2$  ifadelerinin işaretlerinden belirlenebilir. Bu ise,  $D$  bölgesini Tablo 2'de de görüleceği üzere aşağıda sınırları verilen beş alt bölgeye ayırır.

Tablo 2. (25) sisteminde integral eğrileri

D	$\mu_s, v_s$
$D_1$	$v > 0, \mu + v > 0, 2\mu + v < 0$
$D_2$	$v > 0, 2\mu + v > 0, 1 - 4\mu - 2v < 0$
$D_3$	$v > 0, 1 - 4\mu - 2v \geq 0, \mu < 1/2$
$D_4$	$v \leq 0, 1 - 4\mu - 2v > 0, \mu < 1/2$
$D_5$	$v \leq 0, \mu + v > 0, 1 - 4\mu - 2v \leq 0, \mu < 1/2$

Şimdi, yukarıda verilen her bir bölge için çözüm eğrilerinin durumlarını inceleyelim.

$D_1$  bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadrantta bulunur.  $v + \mu = 0$  tam çözümdür. Çözümün tekliğinden dolayı, hız vektörü bu doğruyu kesemez. Dahası, orijin bir semer noktası olmasından dolayı yön olarak orijine yönelen çözüm eğrileri, orijine yaklaştıkça orijin tarafından uzaklaştırılacaktır. Dolayısıyla  $v + 2\mu = 0$  çizgisini keserek  $D_2$  bölgesine geçecektir.  $D_2$  bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü birinci kuadrantta bulunur. Bu bölgedeki yönden dolayı,  $s$  artarken her bir çözüm eğrisi  $D_3$  bölgesine geçer.  $D_3$  bölgesinde, çözüm eğrilerinin hız vektörü dördüncü kuadrantta bulunur. Burada, çözüm eğrilerinin,  $v + 2\mu = 1/2$  ve  $\mu = 1/2$  sınırlarına çarpmadan bir sonraki bölgeye geçeceğini ispat edelim. Öncelikle, çö-

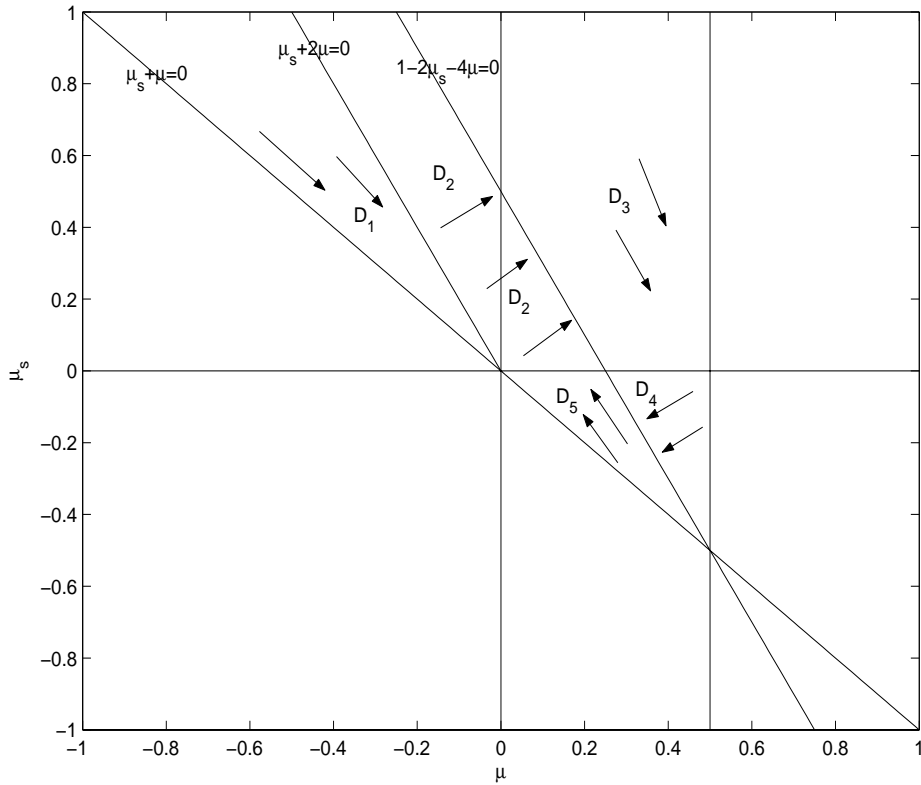
züm eğrisinin  $\nu + 2\mu = 1/2$  sınırına çarpmaması için, hız vektörünün eğiminin  $-2$  den daha büyük olduğunu ispat etmemiz gerekecektir. Bunun için de,

$$(\nu + 2\mu)(\nu + 2\mu - 1/2) < \nu(1 - 2\mu)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır. Bölgedeki  $\nu + 2\mu = 1/2$  yarım çizgisi,  $\mu < 1/4$  çizgileri eşitsizliği sağlar. Böylece,  $\nu = 0$  seviyesinden gelen  $V$  hız vektörü,  $\nu + 2\mu = 1/2$  çizgisinden gittikçe uzaklaşır. Diğer taraftan,  $(1/4, 0)$  noktası bir odak noktası olduğundan, çözüm eğrileri  $\nu$  gittikçe sıfıra yaklaşırken asla bu noktaya çarpmazlar ve böylece  $\mu = 1/4$  düşey çizgisini keserler. Çözüm eğrilerinin bir  $(\mu, \nu)$  noktasında,  $\mu > 1/4$  için,  $\mu = 1/2$  çizgisine çarpmayacağını ispat edelim. Bunun için,  $V$  hız vektörünün,  $(\mu, \nu)$  noktası ile  $(1/2, 0)$  noktasından daha önce birleşeceğini ispat etmemiz gerekir. Bunun için de şu eşitsizliği ispat etmek yeterlidir:

$$\left| \frac{\mu_s}{\nu_s} \right| > \left| \frac{\nu}{(1/2) - \mu} \right|.$$

$1 - 2\mu$  ve  $\mu_s = \nu$ 'nün bu bölgede pozitifliğinden,  $|\nu_s|(1 - 2\mu) - 2\nu^2 > 0$  yazılır. Bu ifadeye  $\nu_s$  değeri yerine yazılırsa,  $4\mu\nu + (\nu + 2\mu)(4\mu - 1)$  elde edilir.  $\mu > 1/4$  için bu eşitsizlik sağlanmış olur ve çözüm eğrileri  $\mu$  eksenini  $\mu = 1/2$  çizgisine çarpmadan geçerek dördüncü bölgeye düşerler.  $D_4$  bölgesinde, çözüm eğrisinin hız vektörü üçüncü kuadrantta bulunur. İkinci bölgedekine benzer bir hareketle,  $\nu + 2\mu = 1/2$  çizgisine çarparak  $D_5$  bölgesine geçer.  $D_5$  bölgesinde ise, çözüm eğrilerinin hız vektörü ikinci kuadrantta olur. Çözümün tekliğinden,  $\mu + \nu = 0$  çizgisi kesilemez ve yerel davranışı orijine gitmemesini garanti eder. Ayrıca, orijinin bir semer noktası olmasından dolayı, çözüm eğrileri  $\mu$  eksenini keserler. Tekrar, çözümün tekliğinden, çözüm eğrileri  $(1/4, 0)$  noktasında dolanır ki bu nokta zaten kararlı odak noktasıdır. Her bir bölge için çözüm eğrilerinin davranışları Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2. (25) sisteminde integral eğrileri

## Kaynaklar

- Birrel, N.D., Davies, P.C.W., (1982). *Quantum fields in curved spacetime*, The University of Cambridge Press, Cambridge.
- Choptuik, W.M., (1993). Universality and scaling in gravitational collapse of massless scalar field, *Physical Review Letters*, **70**, 9-12 .
- Christodoulou, D., (1986). The problem of a self-gravitating scalar field, *Communications in Mathematical Physics*, **105**, 337.
- Christodoulou, D., (1986). Global existence of generalized solutions of the spherically symmetric Einstein-scalar equations in the large, *Communications in Mathematical Physics*, **106**, 587.
- Do Carmo, M. P., (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Fisher, I.Z., (1948). Scalar mesostatic field with regard for gravitational effects, *Zhurnal Eksperimental'noj i Teoreticheskoy Fiziki*, **18**, 636.
- Zloshchastiev, K.G., (1999). Translation and foreword, gr-qc/9911008.
- Gundlach, C., (2003). Critical phenomena in gravitational collapse, *Physics Reports*, **376**, 339, gr-qc/0210101.
- Haddow B., M., Carot, J., (1996). Energy-momentum types of warped spacetimes, *Classical Quantum Gravity*, **13**, 289.
- Harrison, B.K., (2004). Applications of symmetry to general relativity, *The Fifth International Conference on Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, **Part 1**, 131.
- Janis, A.I., Newman, E.T., Winicour, J., (1968). Relativity of the Schwarzschild singularity, *Physical Review Letters*, **20**, 878.
- Newman, E.T., and Penrose, R., (1962). An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients, *Journal of Mathematical Physics*, **3**, 566-578.
- O'Neil, B., (1983). *Semi Riemannian geometry*, Academic Press, inc.London.
- Stephani, H., Kramer, D., Maccallum, M., Hoense-laers, C., Herlt, E., (2003). *Exact solutions of Einstein's field equations*, Cambridge University Press.
- Wald, R.M., (1984). *General relativity*, Chicago University Press, Chicago.
- Wyman, M., (1981). Static spherically symmetric scalar fields in general relativity, *Physical Review D* **24**, 839.
- Zecca, A., (2006). Comoving self-gravitating scalar field in the Newman-Penrose formalism, *International Journal of Theoretical Physics*, **45**, No. 2, 385-393.